

代数难题详解

研究代數必要之參考書

# 代數難題詳解

全 一 冊

楊 怡 庭 編 著

著 者 書 店 發 行

# 版權所有

代 數 難 題 詳 解

定 價 國 幣 伍 角

中 華 民 國 二 十 五 年 六 月 初 版

編 著 者      楊 怡 庭

發 行 人      孫 蘊 璞

印 刷 所      炳林印書館  
北 平 西 河 沿

發 行 所      北平宣外後河  
著 者 書 店  
沿 路 南 二 十 號

## 序

近年來科學救國之空氣，甚囂塵上，於是算學一科極為學者所注意，然考之全國會考成績及招生統計，莫不以算學成績為最劣，此何故歟？蓋因算學一科，理法嚴整，變化無端，簡以御繁，雖有一定之規矩，而因便施巧，學者或昧於訣竅，故習者比比，而失敗者屢見也。吾友楊君怡庭，執教多年，深悉此問題癥結之所在，爰於平素講授之時，無不廣揭理法之義，詳示變化之跡，學者有左右逢源之樂，而忘其艱澀乾燥之苦，若楊君者，可謂教導有方者矣。所著代數難題詳解一書，廣集各書之精華，詳示演算之訣竅，理明文簡，式備法詳，誠為研究算理之嚆矢，習代數者之津梁也，苟能人手一編，必有如晤良師之益者焉，是為序。

濬縣劉子劭 1936, 6.

## 序

數學者，探求現代科學之利器也，無論專攻自然科學或社會科學，苟無數學之基礎，則難免歸而結網之歎，是故讀任何種書不可不求甚解，讀數學尤其不可不求甚解，乃近代學生之習代數者，往往知公式而不明原理，能應用而不能推廣，演算時，依樣葫蘆，錯誤疊出，費時多而效率少，此無他，缺少清新淺鮮之課本，與精詳之教材，不能引起學生自修演算之興趣也。

吾友楊怡庭先生執教多年，對於數學貢獻殊多，今本其素日之經驗，與研究之心得，採取代數之各種習題，分門別類，爲之逐題詳解，其眉目之清楚，與方法之簡明巧妙，當爲有目者所共賞，無庸贅述，是書之編，既便於自修，免却周咨博訪之煩勞，又可節省時間，增加研究之效率，莘莘學子，獲益匪淺，誠爲參考必備之書，是爲序。

古閩林述硯卅五年六月寫於故都

# 自序

戰爭的恐怖，銳敏的刺激着人們神經的尖端，和平之神失了踪。危急已在吞蝕着整個的世界；在這樣動亂的時代，我這本小小的冊子，居然能會平安的問世，自己覺得切實是心神不寧中的一件可喜之事。

在我近幾年來教書的生涯裡，特別感覺着像這樣書籍的缺乏與重要，同時個人的志趣也格外在心坎上鼓盪着，於是忙裡偷閒來作這本書。

本書所解之題，大半是由查理斯密小代數數學辭典初等代數學及近世各大書局出版的教科書內選錄出來的，編輯的方法及意義是這樣：

1. 先將每類題集在一處。
2. 把題解放在每類題的後邊。

因為這樣可以免去不加思索而直看題解的毛病；至於解題之方法，力求整齊簡易，使讀者容易明白，還有些地方，也許是普通人所思索不到的；牠不惟適宜於升學及教書者之需，凡愛好代數者讀之也許不無小補。本書的內容我不再來喋喋了，免得用屈解及吹噓的烟幕迷混了讀者清晰的目力和心靈；一切一切，都要牠的本身赤裸裸的告訴大家。

本書的印成，蒙劉子劭先生的指導與忙中爲我作序，惟他寫得太客氣了，沒有指摘出裡邊的缺陷，却啓示我一條坦廣的道路。孫錦璞先生的幫助印行同摯友熊濟亞的校閱，作者特在這裡向他們三人道謝。

這本冊子和大家見面了，牠的身上當然是帶着許多不健全，虔誠的希望關心牠的讀者們來指正。

## 目 錄

|                         | 頁   |
|-------------------------|-----|
| 1. 緊要公式. ....           | 1   |
| 2. 一次方程式習題及題解. ....     | 4   |
| 3. 一次方程式應用問題及題解. ....   | 10  |
| 4. 一次聯立方程式習題及題解. ....   | 22  |
| 5. 一次聯立方程式應用問題及題解. .... | 39  |
| 6. 因式分解習題及題解. ....      | 52  |
| 7. 最高公因式習題及題解. ....     | 70  |
| 8. 最低公倍式習題及題解. ....     | 80  |
| 9. 分式習題及題解. ....        | 85  |
| 10. 分方程式習題及題解. ....     | 103 |
| 11. 分方程式應用問題及題解. ....   | 113 |
| 12. 虛數習題及題解. ....       | 117 |
| 13. 二次方程式習題及題解. ....    | 119 |
| 14. 無定方程式習題及題解. ....    | 135 |
| 15. 無定方程式應用問題及題解. ....  | 143 |
| 16. 高次方程式習題及題解. ....    | 152 |
| 17. 二次聯立方程式習題及題解. ....  | 168 |
| 18. 二次方程式應用問題及題解. ....  | 188 |
| 19. 等差級數習題及題解. ....     | 203 |
| 20. 等比級數習題及題解. ....     | 210 |
| 21. 調和級數習題及題解. ....     | 218 |
| 22. 簡單級數例題. ....        | 221 |
| 23. 比習題及題解. ....        | 229 |
| 24. 比例習題及題解. ....       | 237 |
| 25. 開平方習題及題解. ....      | 247 |
| 26. 開立方習題及題解. ....      | 252 |

|                         | 頁   |
|-------------------------|-----|
| 27. 對數及指數方程式習題及題解. .... | 259 |
| 28. 排列習題及題解. ....       | 264 |
| 29. 組合習題及題解. ....       | 270 |
| 30. 分離係數法. ....         | 279 |
| 31. 日本 梯田截積歌訣之研究. ....  | 282 |

## 代數難題詳解

## 緊要公式

1.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4.  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5.  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6.  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7.  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
8.  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
9.  $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
10.  $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
11.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$
12.  $ax^2 + bx + c = a \left\{ x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \left\{ x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$

## 13. 二次方程式之普通形爲

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{故 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 14. 一次聯立方程式之普通形爲

$$ax + by = c \dots\dots\dots (1)$$

$$a'x + b'y = c' \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{由 (1) (2)} \quad \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{-1}{ab' - a'b}$$

## 級 數

### 等 差 級 數

$$15. L = a + (n-1)d$$

$$16. S = \frac{n}{2}(a+L)$$

$$17. S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

### 等 比 級 數

$$18. L = ar^{n-1}$$

$$19. S = \frac{a-rL}{1-r}$$

$$20. S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

此式之  $r$  之絕對值小於 1, 而  $n$  爲無窮大時,

此式變爲  $S = \frac{a}{1-r}$ .

### 三 種 級 數 之 中 項

$$21. (A) \text{ 等差級數之中項} = \frac{a+b}{2}$$

$$22. (G) \text{ 等比級數之中項} = \sqrt{ab}$$

$$23. (H) \text{ 調和級數之中項} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$24. \text{ 由 } 21, 22, 23 \quad A \cdot H = G^2$$

### 排 列

$$25. {}_nP_r = \frac{n!}{n(n-r)!}$$

$$26. {}_nP_n = n!$$

$$27. P = \frac{n!}{p!q!r!}$$

## 組 合

$$28. \quad {}_nC_r = n / \{r\} (n-r)$$

$$29. \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$$30. \quad {}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

31.  $n$  爲正整數時,  $x^n - a^n$  常被  $x - a$  除盡, 即

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

32.  $n$  爲偶數之時,  $x^n - a^n$  常被  $x + a$  除盡, 即

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} - a^{n-1}$$

33.  $n$  爲奇數之時,  $x^n + a^n$  常被  $x + a$  除盡, 即

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}$$

## 對 數

$$34. \quad \text{Log}_a \left( \frac{1}{N} \right) = -\text{Log}_a N$$

$$35. \quad \text{Log}_a (M \times N) = \text{Log}_a M + \text{Log}_a N$$

$$36. \quad \text{Log}_a \left( \frac{M}{N} \right) = \text{Log}_a M - \text{Log}_a N$$

$$37. \quad \text{Log}_a (NP) = P \text{Log}_a N$$

$$38. \quad \text{Log}_a \sqrt[r]{N} = \frac{\text{Log}_a N}{r}.$$

## 一 次 方 程 式

解法之次序：一

第一 先去方程式之分母，或整理括號內之式而去括號。

第二 整理全式。

第三 凡含未知量之項，移於方程式之左邊；已知量之項於右邊，再整理之，使成  $ax=b$  之形。

第四 以前式之係式除後式。

例題解  $\frac{1}{4}(x+1) - \frac{1}{3}(x-1) = 1$ 。

以 12 乘之得

$$3(x+1) - 4(x-1) = 12$$

去括號  $3x+3-4x+4=12$

整理  $-x+7=12$

移項  $-x=12-7$

即  $-x=+5$

反號  $x=-5$

## 習 題

解以下各方程式。

1.  $3(x-1) - \{3x - (2-x)\} = 5$ 。

2.  $\frac{x-1}{2} + \frac{x-3}{3} = 3$ 。

3.  $\frac{x-2}{4} + \frac{1}{3} = x - \frac{2x-1}{3}$ 。

4.  $(x-1)(x-2) = (x-3)(x-4)$ 。

5.  $5(x+1)^2 + 7(x+3)^2 = 12(x+2)^2$ 。

6.  $(x-1)^3 + (x-2)^3 + (x-3)^3 = 3(x-1)(x-2)(x-3)$ 。

7.  $\frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \frac{2x-\frac{1}{2}}{5} + 1\frac{1}{4} = 0$
8.  $\frac{1}{2}(a+x) + \frac{1}{3}(2a+x) + \frac{1}{4}(3a+x) = 3a.$
9.  $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} = a^2 + b^2.$
10.  $(a+bx)(b+ax) = ab(x^2-1).$
11.  $(a^2+x)(b^2+x) = (ab+x)^2.$
12.  $a(x+a) + b(b-x) = 2ab.$
13.  $(x-a)(x-b) + (a+b)^2 = (x+a)(x+b).$
14.  $(x+a+b+c)(x+a-b-c) = (x-a-b+c)(x-a+b-c).$
15.  $ax(x+a) + bx(x+b) = (a+b)(x+a)(x+b).$
16.  $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c).$

## 一 次 方 程 式 題 解

1. 解  $3x-3-3x+(2-x)=5$

$$3x-3-3x+2-x=5$$

整理之  $-x=6 \quad \therefore x=-6.$

2. 以  $2 \times 3$  同乘兩邊

$$3(x-1)+2(x-3)=18$$

$$3x-3+2x-6=18$$

$$5x=27 \quad \therefore x=\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}.$$

3. 以分母之最小公倍數 12 乘兩邊,得

$$3x-6+4=12x-8x+4$$

$$3x-2=4x+4$$

移項  $3x-4x=4+2$

即  $-x=6 \quad \therefore x=-6.$

4.  $x^2-x-2x+2=x^2-3x-4x+12$

$$x^2-x^2-x-2x+3x+4x=12-2$$

整理  $4x=10 \quad \therefore x=2\frac{1}{2}.$

5.  $5(x^2+2x+1)+7(x^2+6x+9)=12(x^2+4x+4),$

$$5x^2+10x+5+7x^2+42x+63=12x^2+48x+48,$$

移項  $5x^2+7x^2-12x^2+52x-48x=48-63-5.$

$$4x=-20 \quad \therefore x=-5.$$

6.  $(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3-6x^2+12x-8)+x^3-9x^2+27x-27$

$$=3(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$3x^3-18x^2+42x-36=3x^3-18x^2+33x-18$$

移項  $3x^3-3x^3-18x^2+18x^2+42x-33x=-18+36$

$$9x=18 \quad \therefore x=2.$$

7. 以 10 乘各項得

$$5(x+\frac{1}{2})-2(2x-\frac{1}{2})+10 \times \frac{5}{4}=0$$

$$5x + \frac{5}{2} - 4x + 1 + \frac{25}{2} = 0$$

$$5x - 4x = -\frac{5}{2} - \frac{25}{2} - 1 = -\frac{30}{2} - 1 = -15 - 1 = -16$$

$$\therefore x = -16.$$

8. 以 12 乘兩邊, 得

$$6(a+x) + 4(2a+x) + 3(3a+x) = 36a,$$

$$6a + 6x + 8a + 4x + 9a + 3x = 36a,$$

$$\text{移項} \quad 6x + 4x + 3x = 36a - 6a - 8a - 9a$$

$$13x = 13a$$

$$\therefore x = a$$

9. 以  $ab$  乘兩邊, 得

$$a^2x + b^2x = ab(a^2 + b^2)$$

$$(a^2 + b^2)x = ab(a^2 + b^2)$$

$$\therefore x = ab(a^2 + b^2) \div (a^2 + b^2) = ab.$$

10. 去括弧  $ab + b^2x + a^2x + abx^2 = abx^2 - ab$

$$\text{移項} \quad a^2x + b^2x + abx^2 - abx^2 = -ab - ab$$

$$\text{整理} \quad a^2x + b^2x = -2ab$$

$$(a^2 + b^2)x = -2ab$$

$$\therefore x = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

11. 去括弧  $a^2b^2 + b^2x + a^2x + x^2 = a^2b^2 + 2abx + x^2$

$$\text{移項} \quad b^2x + a^2x + x^2 - x^2 - 2abx = a^2b^2 - a^2b^2$$

$$(a^2 - 2ab + b^2)x = 0$$

$$\therefore x = 0.$$

12. 去括弧  $ax + a^2 + b^2 - bx = 2ab$

$$\text{移項} \quad ax - bx = -a^2 + 2ab - b^2 = -(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a-b)x = -(a-b)^2$$

$$\therefore x = -(a-b)^2 \div (a-b) = -(a-b) = b-a.$$

13. 移項 即  $(x-a)(x-b) - (x+a)(x+b) = -(a+b)^2$

$$x^2 - ax - bx + ab - (x^2 + ax + bx + ab) = -(a+b)^2$$

$$x^2 - ax - bx + ab - x^2 - ax - bx - ab = -(a+b)^2$$

$$-2ax - 2bx = -(a+b)^2$$

$$-2(a+b)x = -(a+b)^2$$

$$\therefore x = \left\{ -(a+b)^2 \right\} \div \left\{ -2(a+b) \right\} = \frac{1}{2}(a+b).$$

14.  $(x+a+b+c)(x+a-b-c) = \left\{ (x+a) + (b+c) \right\}$

$$\left\{ (x+a) - (b+c) \right\} = (x+a)^2 - (b+c)^2,$$

$$(x-a-b+c)(x-a+b-c) = \left\{ (x-a) - (b-c) \right\}$$

$$\left\{ (x-a) + (b-c) \right\} = (x-a)^2 - (b-c)^2.$$

由此  $(x+a)^2 - (b+c)^2 = (x-a)^2 - (b-c)^2$

移項  $(x+a)^2 - (x-a)^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2.$

$$x^2 + 2ax + a^2 - (x^2 - 2ax + a^2) = b^2 + 2bc + c^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - b^2 + 2bc - c^2$$

整理  $4ax = 4bc$

$$\therefore x = 4bc \div 4a = \frac{bc}{a}.$$

15.  $ax^2 + a^2x + bx^2 + b^2x = (a+b)(x^2 + ax + bx + ab)$

$$= ax^2 + a^2x + abx + a^2b + bx^2 + abx + b^2x + ab^2$$

移項  $ax^2 + bx^2 - ax^2 - bx^2 + a^2x + b^2x - a^2x - b^2x - 2abx$

$$= a^2b + ab^2$$

即  $-2abx = a^2b + ab^2$

$$\therefore x = -\frac{a^2b + ab^2}{2ab} = -\frac{1}{2}(a+b).$$

$$16. \left. \begin{aligned} (x-a)^3 &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\ (x-b)^3 &= x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 \\ (x-c)^3 &= x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3 \end{aligned} \right\} \text{相加}$$

$$3x^3 - 3(a+b+c)x^2 + 3(a^2+b^2+c^2)x - (a^3+b^3+c^3) \dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 3(x-a)(x-b)(x-c) &= 3(x^2 - ax - bx + ab)(x-c) \\ &= 3(x^3 - ax^2 - bx^2 + abx - cx^2 + acx + bcx - abc) \\ &= 3\{x^3 - (ax^2 + bx^2 + cx^2) + (abx + acx + bcx) - abc\} \\ &= 3\{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc\} \\ &= 3x^3 - 3(a+b+c)x^2 + 3(ab+ac+bc)x - 3abc \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

由題意移 (1), (2) 諸項; 且約其同類項, 得

$$3(a^2+b^2+c^2)x - 3(ab+bc+ca)x = (a^3+b^3+c^3) - 3abc,$$

$$3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)x = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\begin{aligned} \text{故 } x &= \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)} = \frac{1}{3} \times \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c). \end{aligned}$$