

# Shock Dynamics of Solid

# 冲击固体力学

任会兰 宁建国 编著



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

# 冲击固体力学

Shock Dynamics of Solid

任会兰 宁建国 编著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了冲击载荷下固体介质动力学特性的理论基础和实验研究,以及梁、板、壳体等典型结构的动态响应。主要内容有:固体介质的力学基础;固体介质中的弹塑性加载波、卸载波、冲击波;典型结构梁、板、壳体的动态响应和分析;固体材料冲击加载的实验技术以及近年来作者对混凝土/钢筋混凝土、陶瓷、钨合金、钛基复合材料和泡沫材料等冲击动力学特性研究的科研成果。

本书可作为高等院校高年级本科生和研究生教材,也可作为从事爆炸与冲击动力学工作的科研人员和工程技术人员的理论参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

冲击固体力学 / 任会兰, 宁建国编著. — 北京:  
国防工业出版社, 2013. 4  
ISBN 978 - 7 - 118 - 08703 - 1

I. ①冲... II. ①任... ②宁... III. ①冲击(力学)-  
固体力学 IV. ①O347

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 036500 号

※

国防工业出版社出版发行  
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)  
北京奥鑫印刷厂印刷  
新华书店经售



\*

开本 787 × 1092 1/16 印张 19¼ 字数 443 千字  
2013 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 58.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776  
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

# 前 言

在各类工程技术应用、军事科学和科学研究等领域,冲击载荷下固体材料表现出的动力学特性与静态情况下固体材料表现出的动力学特性有很大的不同,它是在极端条件下的瞬态动力学问题,它的动力学过程在传统观测条件下是不可见的。此外,冲击过程实际上也是材料与结构的破坏过程,如层裂现象,强度极限提高等,这与固体介质本身的力学模型以及冲击载荷的压力高、短历时的特性是分不开的。目前,冲击载荷下固体介质的动力学特性及结构动力学响应的研究广泛地应用于地震研究、工程爆破、爆炸加工、爆炸合成、超声波技术、机械设备、建筑结构的设计以及航空航天、武器效应,核爆炸化学爆炸等各类民用领域和军事领域。国内外学者也对固体材料(金属、岩石、混凝土结构、钨合金、土体、泡沫材料等)在强冲击载荷下的本构模型、损伤破坏特性、冲击相变、物态方程等开展了理论模型、实验技术、数值计算方法等方面研究,取得了许多创新性的科研成果。

本书的突出特色是基于连续介质力学的角度,针对固体介质和典型结构的动力学特性的理论基础、相关实验技术和科研成果的探讨,其中许多内容是近些年作者的科研成果,希望本书能给从事冲击动力学的科研人员和学生提供一些有价值的信息。固体的冲击是一个相当复杂和难度极高的研究领域,大多数结果是通过实验获取的,由于实验手段和测试仪器与传统力学有很大差距,加上冲击实验均是破坏性的,很难直接用于对工程应用提供支持,因此,迫切需要有一本从力学基础理论出发,从各个方面来研究和探讨冲击动力学的有关理论基础、实验测试、数值模拟以及工程应用等,以进一步促进冲击动力学学科的发展。这正是本书出版的目的。

本书共分八章。第一章介绍了冲击动力学的研究内容;第二章是固体力学基础知识,主要介绍固体介质变形、运动规律和固体本构方程和状态方程;第三章、第四章和第五章主要讨论了固体中弹性波、塑性波和冲击波的传播,以及弹塑性波的相互作用;第六章侧重于梁、板、壳体等结构的动力学响应和分析,以及典型结构动力学响应的数值模拟;第七章介绍了弹体对固体介质的侵彻和穿甲力学问题;第八章对常用的冲击动力学实验方法和测试技术进行介绍,如 Hopkinson 压杆技术、轻气炮和平面波加载,并结合作者的科研成果,对典型材料混凝土/钢筋混凝土、陶瓷、钨合金、钛基复合材料和泡沫材料的动态实验进行了重点介绍。

本书内容完整、概念清晰,可作为高等院校本科生和研究生教材,也可供工程技术人员参考。

# 目 录

第一章 绪论 .....	1
1.1 固体材料的动力学特性 .....	2
1.2 冲击动力学研究内容 .....	4
参考文献 .....	6
第二章 固体力学基础 .....	7
2.1 连续介质运动学 .....	7
2.1.1 连续介质运动的描述 .....	7
2.1.2 物质坐标法 .....	8
2.1.3 空间坐标法 .....	10
2.2 固体的变形 .....	13
2.2.1 变形与变形梯度 .....	13
2.2.2 变形梯度的极分解 .....	13
2.2.3 应变与应变率 .....	15
2.2.4 小变形 .....	18
2.3 固体动力学 .....	19
2.3.1 应力张量 .....	19
2.3.2 动力学定理 .....	21
2.3.3 热力学定律 .....	22
2.4 固体本构方程与状态方程 .....	26
2.4.1 本构方程的构建 .....	26
2.4.2 理想弹性体与弹塑性体 .....	26
2.4.3 过应力模型理论和 Perzyna 方程 .....	28
2.4.4 拟线性本构方程 .....	32
2.4.5 热弹性体 - Duhamel - Neumann 法则 .....	34
2.4.6 固体高压状态方程 .....	35
参考文献 .....	37
第三章 固体中的弹性波 .....	38
3.1 一维弹性纵波控制方程 .....	38
3.2 特征线和特征线上的相容关系 .....	41

3.3	波阵面上的守恒条件	45
3.4	弹性波的反射	48
3.5	弥散波	49
3.6	非线性弹性波	51
3.7	体波和面波	54
3.7.1	体波	54
3.7.2	面波	55
	参考文献	59
<b>第四章</b>	<b>固体中的塑性波</b>	<b>60</b>
4.1	弹塑性加载波	60
4.1.1	简单弹塑性波	60
4.1.2	弹塑性加载波的相互作用	65
4.2	卸载波	67
4.2.1	卸载控制方程	67
4.2.2	追赶卸载	69
4.2.3	弹塑性加载波的反射	71
4.3	卸载边界的确定	78
	参考文献	83
<b>第五章</b>	<b>固体中的冲击波</b>	<b>84</b>
5.1	一维应变弹塑性本构关系	84
5.2	一维应变下的弹塑性波	87
5.3	冲击波的形成	90
5.4	冲击绝热线	93
	参考文献	98
<b>第六章</b>	<b>结构的动力学响应</b>	<b>99</b>
6.1	能量原理与弹塑性动力学基本关系式	99
6.1.1	间断面的传播及动力和运动连续条件	99
6.1.2	哈密顿(Hamilton)原理	105
6.1.3	虚速度原理与位移限界定理	105
6.1.4	刚塑性体动力学广义变分原理	108
6.1.5	解的唯一性定理	111
6.2	简单结构的动力响应	112
6.2.1	弹塑性梁的基本方程	112
6.2.2	简支弹塑性梁的动力响应	117
6.2.3	简单刚塑性梁的动力响应	124
6.2.4	弹塑性薄板的动力响应概述	132

6.2.5	刚塑性圆板的动力分析 .....	140
6.2.6	塑性薄壳动力学基本关系式及壳体的屈服条件 .....	150
6.2.7	圆柱壳在冲击压力作用下的塑性动力响应 .....	158
6.2.8	球壳的塑性动力响应 .....	167
6.2.9	冲击作用下球顶壳的动力学分析 .....	174
6.2.10	冲击载荷下典型结构动力响应的数值模拟 .....	184
	参考文献 .....	199
<b>第七章</b>	<b>侵彻与穿甲力学问题 .....</b>	<b>201</b>
7.1	一般概念 .....	201
7.2	弹体对土介质的侵彻 .....	202
7.2.1	尖头弹对土体的侵彻分析 .....	202
7.2.2	尖顶锥头与尖顶拱头弹体对两相介质的侵彻 .....	209
7.2.3	弹体对线性变形介质的侵彻问题 .....	215
7.3	穿甲力学问题 .....	216
7.3.1	穿甲力学问题的特征 .....	216
7.3.2	刚塑性平头长杆弹撞击刚性靶的 Taylor 理论 .....	219
7.3.3	Hawyard 能量法 .....	221
7.3.4	杆状弹高速撞击靶板的扩孔型贯穿分析 .....	222
7.3.5	尖头弹撞击靶板花瓣式贯穿分析 .....	227
7.3.6	刚性弹体对加筋板的侵彻 .....	229
7.4	超高速侵彻 .....	236
	参考文献 .....	240
<b>第八章</b>	<b>冲击加载实验与技术 .....</b>	<b>241</b>
8.1	Hopkinson 实验技术 .....	241
8.1.1	SHPB 实验技术 .....	242
8.1.2	冲击拉伸 Hopkinson 实验装置(SHTB) .....	245
8.1.3	冲击扭转的 Hopkinson 实验装置 .....	247
8.1.4	Hopkinson 实验技术研究现状及存在问题 .....	248
8.2	高压加载实验技术 .....	251
8.2.1	平面波加载 .....	251
8.2.2	气体炮 .....	251
8.3	激光测试技术 .....	262
8.3.1	激光干涉测速技术的发展 .....	264
8.3.2	LDA、LDV 及其与 VISAR 的区别 .....	265
8.3.3	VISAR - 可测量任意反射表面的速度干涉仪 .....	266
8.4	典型材料的冲击实验研究 .....	271
8.4.1	混凝土、钢筋混凝土材料冲击实验 .....	271

8.4.2	陶瓷材料的冲击实验 .....	277
8.4.3	钨合金材料的冲击实验 .....	291
8.4.4	钛基复合材料动态拉伸实验 .....	296
8.4.5	泡沫铝材料 .....	297
参考文献 .....		299



# 第一章 绪 论

冲击动力学是连续介质力学的一个分支学科,它主要是研究各种物体或结构在短时长载荷作用下的运动、变形以及破坏的规律。当物体在局部受到冲击载荷时,由于物质的惯性,突加载荷对于物体各部分质点的扰动不可能同时发生,而要经过一个传播过程,由局部扰动区逐步传播到未扰动区,这种现象通常称为应力波的传播。因为任何物体都具有一定的尺寸,所以,严格说来,物体受到突加载荷作用时,总会出现应力波的传播过程。当载荷作用的时间很短或是载荷变化极快,以及受力物体的尺寸又足够大时,这种应力波的传播过程就显得特别重要。外力对于物体的动力效应必须通过应力波的传播来加以研究,例如,在无限介质中局部扰动引起的动力效应、半无限介质表面以及半无限长杆端部的扰动所引起的动力效应等都属于这类问题。

对于像梁、拱、薄板、薄壳这类结构,它们在三个尺寸中,总有一个或两个尺寸远较其它尺寸为小,而突加载荷作用的方向又往往是尺寸最小的方向。在这种情况下,应力波在这一方向上传播所需要的时间比起载荷作用的时间要短得多(通常,纵波与剪切波在金属中的传播速度约为每秒几千米)。因此,应力波的传播现象很快就消失,结构的动力效应主要表现为结构的整体(弯曲)变形随时间的变化。这类问题通常属结构的弹塑性动力反应或动力响应问题。在动载荷作用下,当载荷强度比较大、作用时间又足够长时,结构的塑性变形将随时间而不断发展,其塑性区将不断扩大(包括出现新的塑性区以及若干塑性区因扩大而合并等),最终导致结构的断裂、贯穿或破坏。如果载荷的强度比较大,但作用的时间很短,此时施加于结构的能量仍然是有限的。在这种情况下,物体的运动和变形将在输入的能量消耗(主要由于塑性变形)完以后,停止于一个确定的状态。这个最后的状态往往是工程中最感兴趣的。

应力波的传播和动力响应是冲击动力学研究下的两类主要问题。前者研究局部扰动向未扰动区的传播,它是将动力效应作为一个传播过程来研究的;后者则忽略扰动的传播过程,研究结构的变形与时间的关系。一般来讲,较高应变率载荷作用应从应力波的角度来进行研究,而在较低应变率下,则应该考虑结构的应力学响应。这两类问题都是工程技术中广泛注意的问题。诸如在穿甲弹及装甲板的研究中,在船舰与飞行器的设计中,在原子弹爆炸所产生的强冲击波的防护工程设计中,以及在机械工业、土建水利工程、抗震结构设计等广泛的领域中,都会遇到弹塑性应力波的传播或动力响应问题。而工程技术中众多实际问题的不断提出,又促使冲击动力学作为一个独立的分支学科得到迅速发展。

在分析动力问题时,必须计入介质的惯性。这样,塑性动力学问题就比塑性静力学问题及弹性动力学问题都要复杂得多。在求解塑性动力学问题中,往往遇到不少数学上的困难,而不得不采用各种近似法、渐近法或数值方法等。同时,为了简化计算,目前有不少

的研究工作,都忽略材料的动态性质,在动力分析中仍可近似地采用静态塑性本构关系。显然,这种做法只在某些材料的低应变率情况下才有近似性。

## 1.1 固体材料的动力学特性

一般来说,准静态实验的应变率为量级  $10^{-5} \sim 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,而冲击实验的应变率范围为  $10^2 \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,甚至高达  $10^6 \text{ s}^{-1}$ 。材料的动力学性能往往与应变率有关,随着应变率提高,材料的屈服极限提高、强度极限提高、延伸率降低、屈服滞后和断裂滞后等,这些已经从许多动力实验的结果中得到证实。

### 1. 屈服极限有明显的提高

许多金属材料在快速加载条件下,屈服极限有明显提高,而屈服的出现却有滞后现象。图 1-1 中实线为软钢在不同应变率下的实验结果,它表明屈服极限  $\sigma_0$  随应变率的增加而明显提高。当应变率  $\dot{\epsilon} = 200 \text{ s}^{-1}$  时,屈服极限大约由静态情况下的  $2.71 \times 10^8 \text{ Pa}$  提高到  $5.76 \times 10^8 \text{ Pa}$ 。实验结果还表明,软钢在动载作用下屈服极限提高得最为明显,一般可提高 2~3 倍,直到与强度极限变化曲线相连接时为止(图 1-1 中的虚线)。随着屈服极限的提高,滞后时间则逐渐缩短,且与初始冲击应力有关。当初始应力为  $3.5 \times 10^4 \sim 5.6 \times 10^5 \text{ kPa}$  时,滞后时间在  $40 \sim 1500 \mu\text{s}$  之间。滞后时间还与材料性质和温度等条件有关。图 1-2 是 Johnson 等人对低碳钢的实验结果。

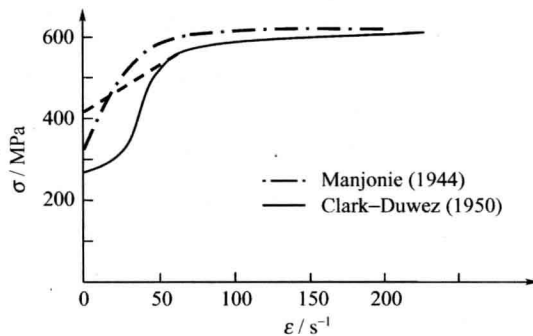


图 1-1 应变率与屈服强度的关系

### 2. 瞬时应力随应变率的提高而提高

在同一应变值下,动态应力要比静态应力高,两者的差常称为“过应力”。当应变率  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  时许多金属材料都呈现出这种特性。屈服极限和瞬时应力随应变率提高而提高的现象,统称为应变率效应。应变率敏感系数  $\lambda$  作为表征材料应变率敏感性的参数

$$\lambda = \frac{\partial \sigma}{\partial (\ln \dot{\epsilon}^p)} \quad (1-1)$$

式中:  $\dot{\epsilon}^p$  为塑性应变率。

对大多数金属材料来说,在一个很宽的应变率变化范围内,  $\lambda$  近似为一常数(见图 1-3)。

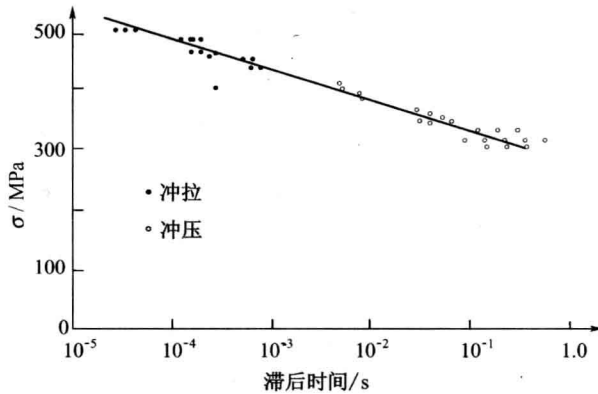


图 1-2 屈服滞后与冲击应力的关系

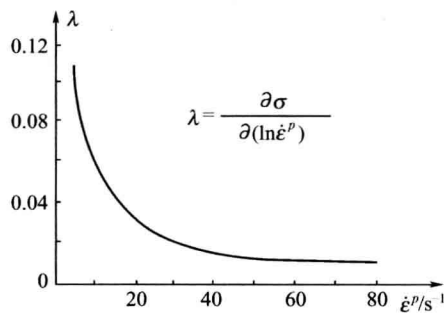


图 1-3 应变率敏感系数与应变率的关系曲线

应变率效应是固体材料动力特性的主要方面,在动态本构关系中要注意反映材料的这一动力特性。

### 3. 瞬时应力随温度升高而降低

从一般材料的动力实验中发现,低温和快速加载都将使材料的强度提高,即在给定应变率下,瞬时应力将随温度升高而降低。图 1-4 给出了钼在一定应变  $\varepsilon = 0.08$  下的流动应力在不同温度时与应变率  $\dot{\varepsilon}$  的关系曲线。

### 4. 应变率历史效应

在给定的应变率下,材料的应力应变曲线对于同种材料是一定的。设在加载过程中,应变率改变,此时,材料的应力—应变关系并不立刻遵守与改变后的应变率相对应的应力—应变关系。即一般固体材料对应变率历史往往是有“记忆”的,称为应变率历史效应。图 1-5 为铝合金材料的应变率历史效应。

此外,固体材料在动态条件下还有其它一些力学特性。例如,随着应变率的提高,材料的强化效应将有所降低,而破坏强度则有所提高。例如,玄武岩的抗压强度在应变率为  $10^{-4} \text{s}^{-1}$  时约为  $3.45 \times 10^5 \text{kPa}$ ,而当应变率为  $10^3 \text{s}^{-1}$  时,则可提高到  $6.9 \times 10^5 \text{kPa}$ 。又如,介质在很强的激波作用下可能发生相变,以及在超高速加载条件下介质将出现许多新的物理现象等。

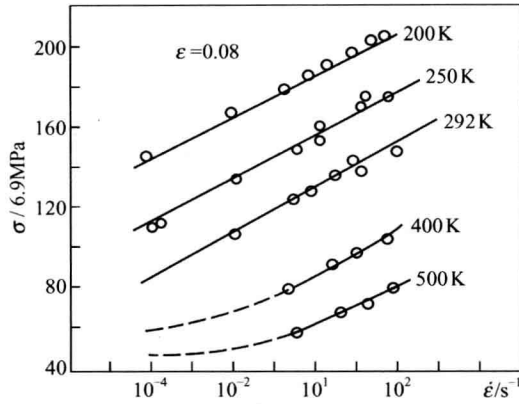


图 1-4 流动应力随温度升高而降低

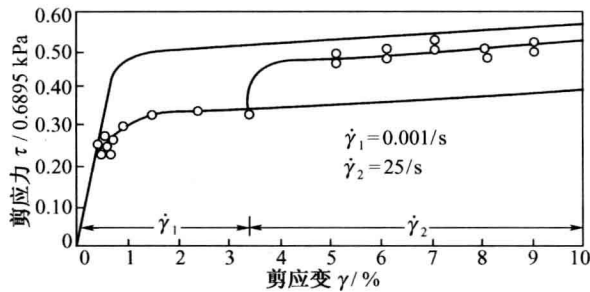


图 1-5 Nicholas 的实验结果(1971)

## 1.2 冲击动力学研究内容

不同材料的动态断裂有不同的断裂机理,载荷条件不同断裂情况也不一样。例如,6km/s 的高速弹体撞击钢板,钢板的动态破坏呈现非常复杂的情形,有绝热剪切、脆性裂纹的扩展和空穴的形成。冲击动力学领域的研究主要集中在工程应用领域的动态断裂类型、断裂机理和断裂模型的建立等。应力波的传播和断裂之间的关系最早始于 J. Hopkinson 关于“铁丝的冲击断裂”。大多数固体材料的抗压能力比抗拉能力强,压缩应力波固体介质中传播时,压缩波不能引起靶板的破坏,然而当压缩应力波达到靶板背面反射为拉伸波时,拉伸波回传时在自由面附近会出现层裂现象。层裂现象与入射波的形状、持续时间和固体介质的抗拉强度有关。应力波引起的层裂如图 1-6 所示。

除冲击波对物体所造成的冲击外,弹体对靶板的冲击是重要的研究领域。根据情况的不同可分为穿透性冲击和非穿透性冲击。非穿透性冲击根据靶板材料性质和板的结构尺寸的不同又可分为弹性弯曲变形和弹塑性弯曲变形两种情况。对于穿透性冲击(称为穿甲)则可分为冲塞型破坏、花瓣形破坏、粉碎型破坏、扩孔型破坏等(图 1-7)。

另一类问题则是弹体对介质的高速侵入,即所谓侵彻问题。侵入的弹体一般为炮弹,侵入的介质一般为岩石、土壤、液体等介质。弹体用炮击的速度约为 500 ~ 1300m/s,而

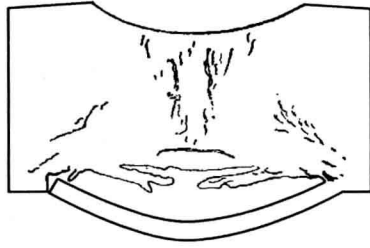


图 1-6 应力波引起的层裂

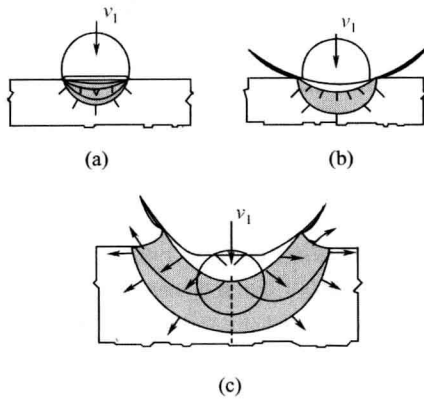


图 1-7 撞击物以高速  $v_1$  撞击靶体的三个主要阶段示意图

超高速冲击的速度为  $1300 \sim 3000\text{m/s}$ 。这时被侵彻的介质将发生相变。靶体材料将发生广泛的塑性变形、熔化和汽化,问题变得复杂起来。图 1-7 和图 1-8 给出了侵彻的主要阶段和穿甲破坏的几种形式。

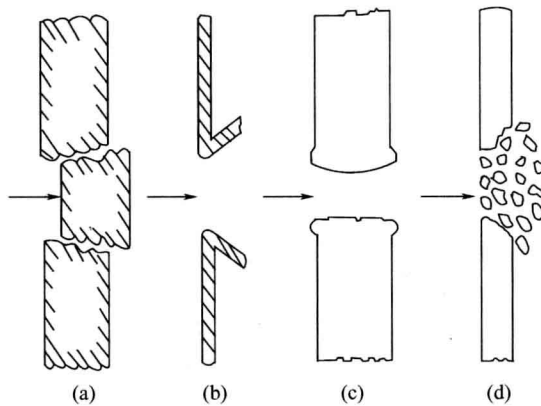


图 1-8 穿甲破坏的几种形式

(a) 冲塞型破坏; (b) 花瓣形破坏; (c) 扩孔型破坏; (d) 粉碎型破坏。

对于超高速侵彻,情况较为复杂。例如,一般金属材料的弹体对一固定靶的撞击,若撞击速度为  $2.0\text{km/s}$ ,则弹体变形形式可出现相变,如图 1-9 所示。

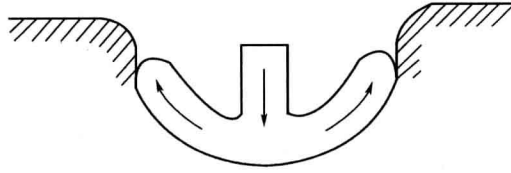


图 1-9 超高速侵彻弹体变形示意图

## 参 考 文 献

- [1] 钱伟长. 穿甲力学. 北京: 国防工业出版社, 1984.
- [2] 张守中. 爆炸与冲击动力学. 北京: 兵器工业出版社, 1993.
- [3] 孙承伟, 卫玉章, 周之奎. 应用爆轰物理. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [4] 张宝平, 张庆明, 黄风雷. 爆轰物理学. 北京: 兵器工业出版社, 2001.
- [5] Kinney G F. Explosive Shocks in Air. New York: The Macmillan Co. 1962.
- [6] 库尔 K. 水下爆炸. 罗耀杰, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1960.
- [7] 马晓青, 韩峰. 高速碰撞动力学. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [8] Lyakhov G M. Fundamentals of Dynamics of Explosive Waves in Soil and Rocks. Moscow: NEDRA, 1974.

## 第二章 固体力学基础

### 2.1 连续介质运动学

#### 2.1.1 连续介质运动的描述

连续介质力学把所研究的对象视为物体的质点(或分子)之间没有空隙、没有间断的连续体,即物体所占据的三维空间  $R^3$  全部被物体的质点所充满。 $R^3$  的部分空间称为它的子空间。设在时刻  $t_0$ ,  $R^3$  空间中充满域  $\Omega_0$  内的全部质点,即  $\Omega_0$  是一个非空集。时刻  $t$  变形后充满  $R^3$  中的域  $\Omega_t$ (也是非空集)。而  $\Omega_0$  内的任一质点  $A(X, Y, Z)$ , 记作  $A \in \Omega_0$ , 在给定时间  $t$  后,变形后移到了  $\Omega_t$  中的一点  $A'(x, y, z)$ , 记作  $A' \in \Omega_t$ 。

若按一定法则,  $\Phi$  对每个  $A \in \Omega_0$ , 在  $\Omega_t$  中有一个  $A'$  与之对应, 则称  $\Phi$  是定义在  $\Omega_0$  中而在  $\Omega_t$  中取值的映射(如图 2-1 所示)。 $\Omega_0$  称为  $\Phi$  的定义域, 这一映射记作:

$$\Phi: A \in \Omega_0 \mapsto A' \in \Omega_t$$

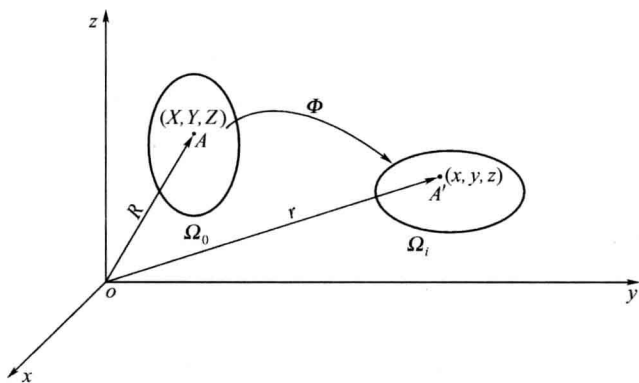


图 2-1 函数  $\Phi$  的映射

这就是说,函数  $\Phi$  由  $\Omega_0$  变换到  $\Omega_t$  是一一对应的。并假定从  $\Omega_0$  变到  $\Omega_t$  的变形  $\Phi$  是至少属于  $C^1$  类的微分同胚,即映射是连续可微的,且至少具有一阶导数。

根据介质连续性的假定,变形物体力学量的描述,例如流体的压力  $p$ ,总是用空间坐标  $(X, Y, Z)$  和时间  $t$  的函数来表示,即

$$p = p(X, Y, Z, t)$$

显然,当压力  $p$  在所考虑的区域变化极小,以致有  $\Delta l$  量级的变化时,  $p$  的变化可以忽略不计。这就是说,  $p$  的最大梯度  $|\text{grad} p|_{\max}$  远小于  $p/\Delta l$ 。这就是对连续介质力学模型型

格的要求。

设所讨论的可变形体所占据的空间  $\Omega_0$  其体积为  $V$ , 表面积为  $S_0$ , 把  $t = t_0$  时刻物体的这一构形称为初始构形(参考构形)  $\Omega_0$ 。任一时刻  $t$ , 物体变形后所占有空间  $\Omega_t$ , 称为瞬时构形。若令  $A$  点的矢径为  $\mathbf{R}$ , 有

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

而变形后与之相应的一点  $A'$  的矢径为  $\mathbf{r}$ , 有

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

于是, 一点的位置就可以用其矢径来表示, 而介质的运动则可以由下列矢量方程来描述:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad (2-1)$$

其展开式为

$$x = x(X, Y, Z, t); \quad y = y(X, Y, Z, t); \quad z = z(X, Y, Z, t) \quad (2-2)$$

以上采用的坐标法, 称为 Lagrange (拉格朗日) 坐标法, 又称为物质坐标法 (material description) 或质点法。

另一种坐标法是 Euler (欧拉) 坐标法, 又称为空间坐标法 (spatial description) 或流场法。以下分别介绍这两种介质运动的描述法。

### 2.1.2 物质坐标法

介质运动的这种描述法, 实际上不需要考虑物体的真实的初始构形  $\Omega_0$ , 而是选取  $\Omega_0$  为  $\Omega_t$  的一个在  $t = t_0$  时刻的构形, 作为参考构形。于是有

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{R}$$

不失一般性, 取  $t_0 = 0$ , 有

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{R}$$

于是,  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$  就是在  $t = 0$  时刻位于  $\mathbf{R}$  的质点在瞬时  $t$  时刻的位置。

在物质坐标法描述中, 把质点在每一瞬时的坐标看作是时间  $t$  和物质坐标  $X_k$  ( $k = X, Y, Z$ ) 的函数(今后令  $X_k$  表示物质坐标,  $x_k$  表示空间坐标)。意思是说, 我们跟踪一个指定的质点, 研究它随时间的微小变化和位置的变化有什么特征。

物质坐标法不总是方便的。有时不需了解每一质点的运动历史, 不需知道这些质点来自何处, 而只需了解任一时刻位于指定空间各点处的质点的运动。也就是说, 我们只对瞬时速度场和它们随时间的变化感兴趣。

根据以上的讨论, 物质坐标法描述的质点速度和加速度分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{a}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-3)$$

若令函数  $\Phi$  的梯度写成  $\text{grad}\Phi(\mathbf{X}) = \nabla\Phi(\mathbf{X})$ , 则因函数  $\Phi$  是微分同胚的, 变换  $\mathbf{r} \mapsto$



$\mathbf{R}$  或  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$  为一一对应的。则变换  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$  的雅可比行列式  $\det(\Delta\Phi)$  不等于零,即

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2-4)$$

由雅可比行列式  $J \neq 0$ , 可得出

$$J^{-1} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2-5)$$

方程(2-4)是以  $\mathbf{R}$  表示的, 而方程(2-5)则是以  $\mathbf{r}$  表示的。

令  $\rho(\mathbf{r}, t)$  和  $\rho_0(\mathbf{r})$  分别为在  $\mathbf{r}$  点, 时刻  $t$  的瞬时构形的密度和初始时刻参考构形的密度。根据质量守恒定理, 可得

$$\iiint_{\Omega_t} \rho(\mathbf{r}, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{r}) dx dy dz \equiv \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{R}, t) dXdYdZ \quad (2-6)$$

式中:  $\Omega_t$  和  $\Omega_0$  分别为变形后和变形前的体积。

考虑到

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (i = x, y, z; j = X, Y, Z) \quad (2-7)$$

其中

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \text{ 或 } \mathbf{F} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \quad (2-8)$$

称为变形梯度。由于  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  为位移, 故变形梯度也可写成

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2-9)$$

$\mathbf{F}$  可以写成  $3 \times 3$  的矩阵。实际上

$$J = \det \mathbf{F} \quad (2-10)$$

此处  $J$  即雅可比行列式。

参考构形内微元体积为

$$dV = d\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{Y} \times d\mathbf{Z}) \equiv (d\mathbf{X}, d\mathbf{Y}, d\mathbf{Z}) \quad (2-11)$$

类似地, 在瞬时构形内微元体积为(见图 2-4)