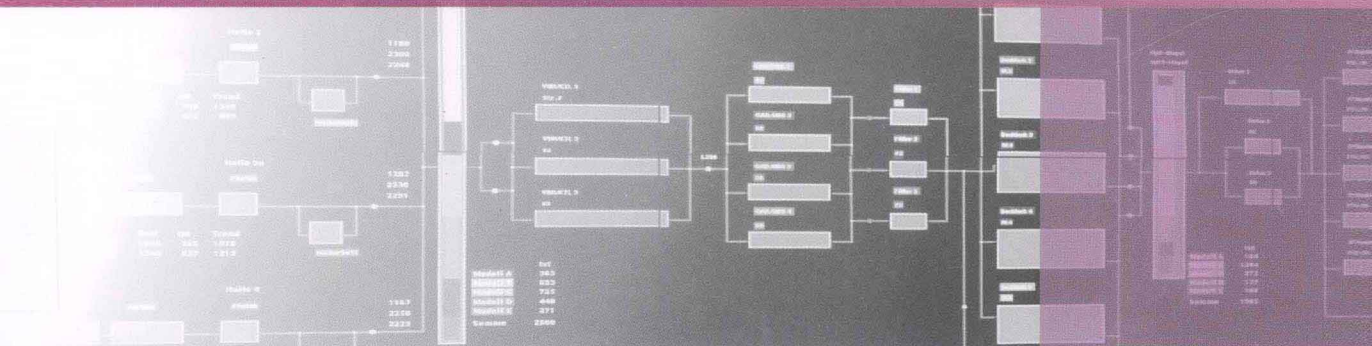




普通高等教育“十二五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

控制系统分析与设计

郭百巍 刘藻珍 刘永善 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

电气工程、自动化专业规划教材

控制系统分析与设计

郭百巍 刘藻珍 刘永善 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书内容包括控制系统建模、控制系统分析与设计以及控制系统的计算机仿真 3 个部分。第一部分介绍数学模型的分类、各类参数模型和非参数模型,以及 MATLAB 下模型的生成和转换方法。第二部分涵盖控制系统分析与设计的频域法、根轨迹法和状态空间法,以及上述 3 种设计法的 MATLAB 实现。第三部分包括控制系统仿真的原理、基于 Simulink 的建模与仿真方法以及复杂系统仿真的 Simulink 支撑技术。

本书可作为高等院校信息控制类专业、机电类专业“控制系统分析与设计”课程的教材,也可供相关工程技术人员学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

控制系统分析与设计 / 郭百巍, 刘藻珍, 刘永善编著. — 北京: 电子工业出版社, 2014. 1

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-22230-6

I. ①控… II. ①郭… ②刘… ③刘… III. ①过程控制—控制系统—系统分析—高等学校—教材②过程控制—控制系统—系统设计—高等学校—教材 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 311959 号

策划编辑: 凌 毅

责任编辑: 凌 毅

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张:12.75 字数:310 千字

印 次: 2014 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

“控制系统分析与设计”是控制理论和工程应用之间的一个桥梁,是信息控制类专业、机电类的专业技术课程之一。该课程注重控制理论的深入运用,以及学生综合能力的培养。通过本课程的学习,读者能够在学习控制系统建模基本方法的基础上,提高灵活运用控制理论解决控制问题的能力,以及掌握通过仿真进行控制系统设计验证的方法。

本书在内容编排上包括系统建模、控制系统分析与设计以及控制系统的计算机仿真 3 个部分。

控制系统建模的任务就是获得描述系统内部物理变量之间关系的抽象数学模型。通过对系统的数学模型的研究,可以揭示系统的内在运动过程和动态性能,同时数学模型又是系统综合设计的重要依据,以及进行系统仿真验证的基础。

控制系统分析与设计包括系统的稳定性分析和性能分析,其中性能分析包括稳态性能和动态性能。系统分析是提出设计指标的依据,也是对设计结果的评判标准。分析是设计的前提。广义来说,控制系统设计的内容应包括:任务分析、指标确定、方案选择、原理设计和工程实现。本书重点介绍原理设计,特别是控制参数的设计,并通过例题和练习进行设计过程的训练。本书涵盖了控制系统分析与设计的频域法、根轨迹法和状态空间法。

控制系统的计算机仿真就是以控制系统的数学模型为基础,采用数学模型代替实际的系统,以计算机为主要工具,对控制系统进行实验和研究的一种方法。本部分主要讲述利用 MATLAB 的工具箱及 Simulink 仿真集成环境进行系统仿真的方法。

本书由北京理工大学郭百巍、刘藻珍、刘永善编著,其中,郭百巍、刘藻珍、刘永善共同编写了第 1~3 章,郭百巍编写了第 4~6 章。在本书编著过程中,参考了大量国内外文献资料和教材,在此对这些文献的作者表示衷心感谢。

本书提供免费的电子课件和 MATLAB 仿真程序,读者可登录华信教育资源网:www.hxedu.com.cn,注册后免费下载。

本书是编著者在多年教学和科研基础上完成的,但由于编著者水平有限,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请广大读者不吝指正。

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396；(010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036

目 录

| | |
|-----------------------------|----|
| 第 1 章 绪论 | 1 |
| 1.1 控制理论的发展 | 1 |
| 1.2 控制系统的概念 | 1 |
| 1.3 控制系统的分类 | 2 |
| 1.4 课程内容 | 4 |
| 第 2 章 控制系统的数学模型 | 5 |
| 2.1 数学模型的分类 | 5 |
| 2.2 系统的参数模型 | 5 |
| 2.2.1 微分方程 | 5 |
| 2.2.2 状态方程 | 8 |
| 2.2.3 传递函数 | 10 |
| 2.2.4 结构图描述 | 12 |
| 2.3 系统的非参数模型 | 14 |
| 2.3.1 频率特性 | 14 |
| 2.3.2 响应曲线 | 16 |
| 2.4 模型生成与转换的 MATLAB 实现 | 17 |
| 2.4.1 连续系统建模 | 17 |
| 2.4.2 离散系统模型 | 19 |
| 2.4.3 结构化简 | 20 |
| 2.4.4 模型转换 | 22 |
| 习题 | 22 |
| 第 3 章 控制系统分析与设计的频域法 | 24 |
| 3.1 控制系统的性能指标 | 24 |
| 3.1.1 稳态性能指标 | 24 |
| 3.1.2 动态性能时域指标 | 27 |
| 3.2 典型系统的动态性能 | 29 |
| 3.2.1 一阶系统的性能指标 | 29 |
| 3.2.2 典型二阶系统的性能指标 | 30 |
| 3.2.3 典型二阶系统的动态性能与闭环频率特性的关系 | 33 |
| 3.2.4 高阶系统的动态性能 | 35 |
| 3.3 控制系统的频率响应法 | 35 |
| 3.3.1 对数频率特性图 | 36 |
| 3.3.2 频域的动态性能指标 | 41 |

| | |
|-----------------------------|-----------|
| 3.3.3 频率响应法示例 | 43 |
| 3.4 控制器的设计方法和校正形式 | 45 |
| 3.4.1 控制器的设计方法 | 45 |
| 3.4.2 控制器的校正形式 | 46 |
| 3.5 串联控制器设计的综合法 | 48 |
| 3.5.1 工程系统的典型开环幅频特性形状 | 48 |
| 3.5.2 期望的开环频率特性设计 | 50 |
| 3.5.3 串联校正综合设计法举例 | 55 |
| 3.6 局部反馈控制器设计的综合法 | 57 |
| 3.6.1 局部反馈校正的作用分析 | 57 |
| 3.6.2 两类重要的局部反馈校正 | 57 |
| 3.6.3 局部反馈校正的综合法小结 | 64 |
| 3.7 控制器设计的分析法 | 65 |
| 3.7.1 超前校正网络 | 66 |
| 3.7.2 滞后校正网络 | 69 |
| 3.7.3 滞后-超前校正网络 | 72 |
| 3.8 调节系统的综合方法 | 75 |
| 3.8.1 调节系统的性能指标 | 75 |
| 3.8.2 调节系统的综合方法 | 76 |
| 3.9 复合控制 | 82 |
| 3.9.1 按扰动补偿的复合校正 | 82 |
| 3.9.2 按输入补偿的复合校正 | 83 |
| 3.10 频域法的 MATLAB 实现 | 84 |
| 3.10.1 单输入单输出系统的频率特性曲线 | 84 |
| 3.10.2 利用频率特性分析系统的稳定性 | 86 |
| 3.10.3 频率综合法的 MATLAB 实现 | 87 |
| 3.10.4 超前校正器设计的 MATLAB 实现 | 88 |
| 习题 | 89 |
| 第 4 章 控制系统分析与设计的根轨迹法 | 91 |
| 4.1 引言 | 91 |
| 4.1.1 根轨迹的定义 | 91 |
| 4.1.2 根轨迹的幅值和辐角条件 | 92 |
| 4.2 绘制根轨迹的基本规则及基于根轨迹的性能分析 | 93 |
| 4.2.1 绘制根轨迹的基本规则 | 93 |
| 4.2.2 增加零点和极点对根轨迹的影响 | 99 |
| 4.2.3 利用根轨迹计算系统的参数 | 103 |
| 4.3 根轨迹实现的超前校正 | 106 |
| 4.3.1 超前校正的基本原理 | 106 |

| | | |
|--------------|------------------------|------------|
| 4.3.2 | 超前校正的设计步骤 | 108 |
| 4.3.3 | 超前校正设计中的若干问题 | 108 |
| 4.3.4 | 超前校正示例 | 110 |
| 4.4 | 根轨迹实现的滞后校正 | 113 |
| 4.4.1 | 滞后校正的基本原理 | 113 |
| 4.4.2 | 滞后校正的设计步骤 | 115 |
| 4.4.3 | 滞后校正示例 | 115 |
| 4.5 | 根轨迹实现的超前-滞后校正 | 116 |
| 4.5.1 | 超前-滞后校正的原理与步骤 | 116 |
| 4.5.2 | 超前-滞后校正示例 | 117 |
| 4.6 | 根轨迹法的 MATLAB 实现 | 120 |
| 4.6.1 | 根轨迹图的绘制 | 120 |
| 4.6.2 | 根轨迹法的 MATLAB 示例 | 121 |
| | 习题 | 124 |
| 第 5 章 | 控制系统分析与设计的状态空间法 | 126 |
| 5.1 | 状态空间表达式 | 126 |
| 5.2 | 稳定性分析 | 127 |
| 5.2.1 | 稳定性的定义 | 127 |
| 5.2.2 | 李雅普诺夫第一法 | 129 |
| 5.2.3 | 李雅普诺夫第二法 | 130 |
| 5.3 | 能控性分析 | 132 |
| 5.4 | 能观性分析 | 133 |
| 5.5 | 极点配置方法 | 134 |
| 5.5.1 | 调节系统的极点配置设计法 | 134 |
| 5.5.2 | 随动系统的极点配置设计法 | 137 |
| 5.6 | 状态空间法的 MATLAB 实现 | 138 |
| 5.6.1 | 线性系统稳定性分析 | 138 |
| 5.6.2 | 线性系统的线性相似变换 | 138 |
| 5.6.3 | 能控性分析 | 141 |
| 5.6.4 | 能观性分析 | 145 |
| 5.6.5 | 极点配置 | 145 |
| 5.6.6 | 观测器设计 | 146 |
| 5.6.7 | 线性二次型指标最优调节器 | 147 |
| | 习题 | 148 |
| 第 6 章 | 控制系统的仿真技术 | 150 |
| 6.1 | 控制系统仿真原理 | 150 |
| 6.1.1 | 控制系统仿真的过程 | 150 |
| 6.1.2 | 系统仿真研究的优缺点 | 151 |

| | |
|---------------------------------|------------|
| 6.2 基于 Simulink 的建模与仿真方法 | 152 |
| 6.2.1 Simulink 简介 | 152 |
| 6.2.2 Simulink 常用模块介绍 | 153 |
| 6.2.3 Simulink 建模与仿真 | 160 |
| 6.3 复杂系统仿真的 Simulink 支撑技术 | 166 |
| 6.3.1 子系统概念及构成方法 | 167 |
| 6.3.2 模块封装方法 | 168 |
| 6.3.3 模块库的构造 | 173 |
| 6.3.4 M-函数和 S-函数 | 175 |
| 习题 | 178 |
| 附录 A MATLAB 基础 | 180 |
| 参考文献 | 193 |

第 1 章 绪 论

1.1 控制理论的发展

控制科学是从 19 世纪 40 年代发展起来的,刚开始时多用于工业,例如压力、温度、流量、位移、湿度、黏度控制,后来进入了军事领域,包括飞机自动驾驶、火炮自动跟踪、导弹及卫星、宇宙飞船控制等。

控制理论的发展可以分为 4 个阶段。

(1) 萌芽期(1940 年以前)

18 世纪,瓦特为控制蒸汽机的速度而设计的离心调速器,是自动控制领域的第一项重大成果。在控制理论发展初期,迈纳斯基、黑增、奈奎斯特等众多学者都作出过重大贡献。1922 年,迈纳斯基研制出船舶操纵自动控制器,并证明了如何从描述系统的微分方程确定系统的稳定性;1932 年奈奎斯特提出了一种相当简便的方法,根据系统对稳态正弦输入的开环响应,确定闭环系统的稳定性;1934 年黑增提出了用于位置控制系统伺服机构的概念,讨论了可以精确跟踪变化的输入信号的继电式伺服机构。

(2) 经典控制理论时期(1940—1960 年)

1945 年美国人 Bode 进行的“网络分析与放大器的设计”,奠定了经典控制理论的基础。经典控制理论在 19 世纪 50 年代趋于成熟,主要内容包括:采用频率法、根轨迹法、相平面图法、描述函数法对单输入单输出系统进行分析,讨论系统稳定性的代数和几何判据以及校正网络等。

(3) 现代控制理论时期(19 世纪 50 年代末至 60 年代)

随着空间技术的发展,导弹、人造卫星和宇宙飞船等应用引出了许多复杂的控制问题。卡尔曼提出的控制系统的一般理论奠定了现代控制理论的基础,解决了多输入多输出、时变参数、高精度复杂系统的控制问题。

(4) 大系统和智能控制时期(1970 年开始)

本时期的特点是各学科间相互渗透,要分析的系统越来越大,越来越复杂,出现了人工智能、机器人控制等问题。

1.2 控制系统的概念

为了实现一定任务,将被控对象和控制装置按照一定的方式连接成一个有机整体,并通过施加一定的控制,使系统能够达到要求的性能,这样的系统被称为控制系统。

控制系统所要求的性能有两个方面。

1. 跟随输入的性能

控制系统要求其输出量随着输入量的变化而变化,输入量可能是常值或随时间变化的

轨迹。输入量为常值的系统,如温度控制系统、压力控制系统等,称为恒值调节系统;输入量随时间变化的系统,如雷达的天线跟踪空中目标(飞机、导弹)的运动等,称为随动系统。

2. 抗干扰的性能

控制系统不仅会受到参考输入的影响,还会受到外界干扰的作用。系统的抗干扰性要求系统对外界干扰响应尽可能小。

控制系统的目标不同,其对性能要求的侧重点也不同:恒值调节系统的参考输入为定值,主要要求抗干扰性能;随动系统(伺服系统、跟踪系统)的参考输入为随时间变化的量,主要要求系统输出尽量跟随参考输入的变化,同时要求不受干扰的影响。

1.3 控制系统的分类

依照不同的标准,控制系统可以进行多种分类。按照系统中有无反馈测量装置,可以将控制系统划分为开环控制系统和闭环控制系统两种基本形式,将开环控制和闭环控制结合就构成了复合控制系统。

1. 开环控制

开环控制是指控制装置与控制对象之间只有顺向作用而没有反向联系的控制。在开环系统中,控制对象的输出量不对系统的控制产生影响。

图 1-1 所示的简单开环系统对外界干扰没有采取任何控制措施。

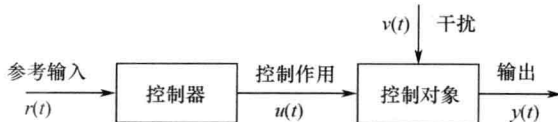


图 1-1 开环控制结构图

图 1-2 所示系统虽然增加了对干扰的补偿控制,但它还是开环控制,因为没有控制对象到控制器的反向联系,即没有输出到参考输入的联系。

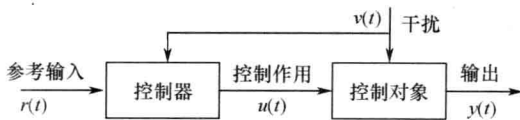


图 1-2 具有干扰补偿的开环控制结构图

这里,对干扰的补偿仅限于可测量到的干扰。开环控制的优点在于控制结构简单,缺点是控制精度不高。

2. 闭环控制

闭环反馈控制的典型结构如图 1-3 所示。广义的控制器包括给定装置、比较装置、校正装置、放大装置、执行装置和量测装置等。图中闭环控制系统中控制器和控制对象之间既有

正向作用又有反向作用,控制对象对控制器的反向作用称为反馈,闭环控制又称反馈控制。反馈控制的基本原理是:利用误差来产生调节作用进而减小误差。

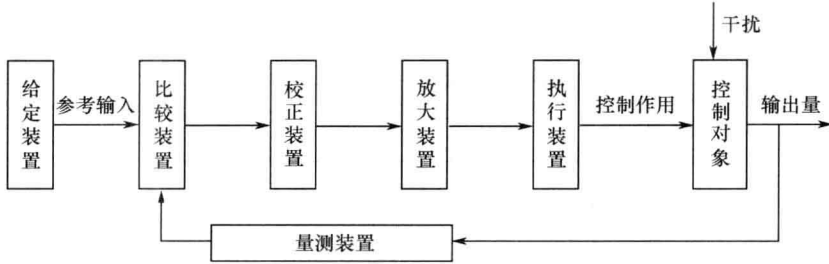


图 1-3 闭环控制系统的典型结构图

反馈的极性是反馈控制系统中的一个重要问题。只有负反馈,才能使误差减小。

如何判断反馈的极性在实际系统调试中是一个很重要的问题,因为有些系统一旦出现正反馈,就可能导致破坏性的后果,所以不能直接闭环去试。一个实用的方法是:在反馈通路上取一点 a 处断开,如图 1-4 所示,在断开处 a 加一个小的扰动输入,然后检测在断点的另一端 a' 处的输出信号,如果 a' 处的输出信号与 a 处的输入信号极性相反,则连接的是负反馈。由于是开环测试,所以不会发生破坏现象。这种方法也适合控制程序的调试。

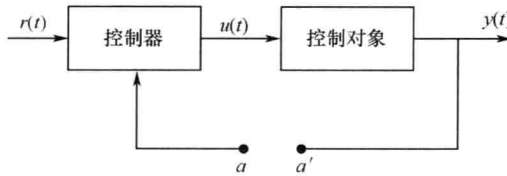


图 1-4 判断反馈极性

闭环反馈控制的优点是控制精度高,缺点是控制结构复杂。

3. 复合控制

复合控制是将开环控制和闭环控制相结合的一种控制方式,它吸取两者的长处,从而达到较好的控制性能。

图 1-5 和图 1-6 分别给出了跟随输入的复合控制和抗干扰的复合控制两种结构形式。其中前馈补偿是开环控制,反馈控制则是闭环控制。很多工程实际控制系统都具有前馈+反馈的复合控制结构。

根据采用信号处理技术的不同,还可以把控制系统划分为模拟控制系统和数字控制系统。前者处理信号所用的是模拟技术,而后者采用数字技术处理信号。

根据控制系统的给定量是恒定的还是变化的,可以把控制系统划分为恒值调节系统和随动系统。恒值调节系统的给定量一般是恒定的,例如稳压电源、恒温箱等。随动系统的控制输出是随着给定量的变化而变化的,例如导弹的控制系统、工厂车间的数控机床等。

根据控制系统中变量的变化是否连续,可以将控制系统划分为连续控制系统和离散控制系统。

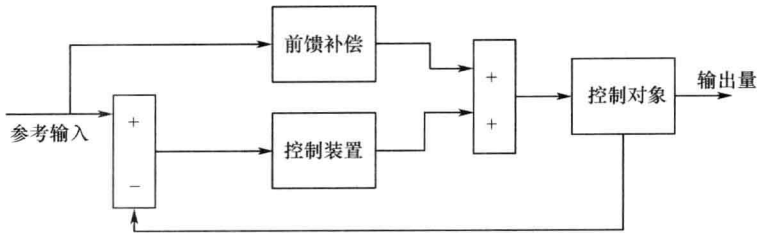


图 1-5 跟随输入的复合控制结构图

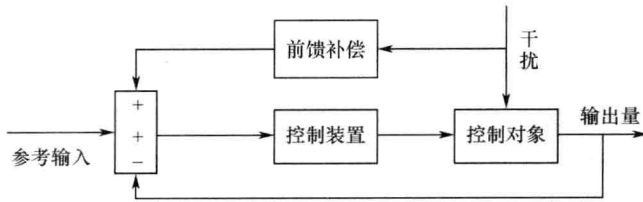


图 1-6 抗干扰的复合控制结构图

1.4 课程内容

控制系统的分析与设计是控制理论课程和工程应用之间的一个桥梁，主要内容包括 3 大部分。

1. 控制系统建模

控制系统建模的任务就是获得描述系统内部物理变量之间的关系的抽象数学模型。通过对系统的数学模型的研究，可以揭示系统的内在运动过程和动态性能，同时数学模型又是系统综合设计的重要依据，以及进行系统仿真验证的基础。

2. 控制系统分析与设计

系统分析是提出设计指标的依据，也是对设计结果的评判标准。分析是设计的前提，包括系统的稳定性分析和系统的性能分析，其中性能分析包括稳态性能和动态性能。

广义来说，控制系统设计的内容应包括：任务分析、指标确定、方案选择、原理设计和工程实现。本课程重点讲述原理设计，特别是控制参数的设计，并通过例题和练习进行设计过程的训练。

本书涵盖了控制系统分析与设计的频域法、根轨迹法和状态空间法。

3. 控制系统的仿真

控制系统的计算机仿真就是以控制系统的数学模型为基础，采用数学模型代替实际的系统，以计算机为主要工具，对控制系统进行实验和研究的一种方法。控制系统的仿真主要讲述利用 MATLAB 的工具箱及 Simulink 仿真集成环境进行系统仿真。

第 2 章 控制系统的数学模型

控制系统的数学模型是描述系统内部物理量之间关系的一组数学方程或曲线。控制系统的数学模型能够用于对系统进行理论分析,获得系统在输入作用下的运动过程、动态性能及稳态特性,同时还是进行系统综合设计和仿真的基础。

2.1 数学模型的分类

在控制理论中,用来描述系统内在规律的数学模型有很多,主要分为参数模型和非参数模型两大类,如表 2-1 所示。

表 2-1 两类常用的数学模型

| 模型类 | 模型名称 |
|----------|--------------------|
| 系统的参数模型 | 微分方程,状态方程,传递函数 |
| 系统的非参数模型 | 频率特性,阶跃响应曲线,脉冲响应曲线 |

参数模型根据系统遵循的物理规律,用某种数学式子来描述系统中各变量之间的相互关系,此种数学模型表达式中明显地包含系统的参数。在以单输入单输出系统为研究目标的经典控制理论中,主要采用微分方程、传递函数等参数模型来描述系统,比如常见的机械位移系统、直流电机等系统模型都可以简化为微分方程,并转换为传递函数;而在现代控制理论中,对于复杂的多变量系统,主要采用传递函数矩阵、状态空间表达式等作为描述系统的数学模型。

非参数模型是指用典型输入下的系统输出作为系统模型,如阶跃响应曲线、脉冲响应曲线,以及不同频率的正弦信号的响应曲线。

数学模型可以有多种形式。随着具体系统和具体条件的不同,某些数学模型可能比其他模型更合适。例如,在单输入、单输出、线性、定常系统的瞬态响应或频率响应分析中,采用传递函数表达式可能比其他方法更为方便。而在最优控制问题中,采用状态空间表达式比较有利。一旦获得系统的数学模型,就可以采用各种分析方法和计算机工具对系统进行分析 and 优化。

2.2 系统的参数模型

2.2.1 微分方程

许多系统,不论它们是机械的、电气的、热力的,还是经济学的,其动态特性都可以用微分方程来描述。这些微分方程可以通过利用支配具体系统的物理学定律,例如机械系统中的牛顿定律和电系统中的基尔霍夫定律来得到。必须牢记,找出一个合理的数学模型是整

个分析和设计过程中最基础和最重要的工作。

要建立描述控制系统运动的微分方程,首先要分析系统的各个部件运动的机理,根据这些机理分别列出描述系统每一部件运动的微分方程,这些部件运动的微分方程合在一起便是整个系统的微分方程(组)。微分方程是描述各种事物的最基本的数学工具,是各种数学描述方法的共同基础。

控制系统的微分方程是在时间域内描述动态系统性能的数学模型。线性系统或部件微分方程的典型形式为

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = b_m(t)u^{(m)}(t) + b_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1(t)\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (2-1)$$

式中, $u(t)$ 为系统的输入量; $y(t)$ 为系统的输出量。

在该方程式中,输出量 $y(t)$ 及其各阶导数都是一次的,并且各系数与输入量(自变量)无关,这一类系统称为线性系统。按照系统参数对时间的变化情况可将系统分为定常系统和时变系统。式(2-1)中若有系数为时间的函数,则是以高阶微分方程描述的线性时变系统的模型。

表 2-2 中 3 个方程分别给出非线性系统、线性时变系统和线性定常系统的微分方程的例子。

表 2-2 各种微分方程模型

| 表达式 | 模型名称 |
|-------------------------------------|----------|
| $\ddot{y} + \dot{y} = 2\sin t$ | 非线性系统模型 |
| $\ddot{y} + \dot{y}\sin t + ty = a$ | 线性时变系统模型 |
| $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \sin t$ | 线性定常系统模型 |

线性系统满足叠加原理,即两个不同的作用函数同时作用于系统的响应,等于两个作用函数单独作用的响应之和。由于这一原理,使我们有可能由一些独立的简单输入对线性系统形成的简单响应,构造出复杂输入对线性系统形成的复杂响应。

而非线性系统不能利用叠加原理。因此,非线性系统不能通过对两个输入量的响应单独地进行计算,然后将它们的计算结果相加来获得总的响应。

建立系统的微分方程式(组),目的在于确定被控制量与给定量或扰动量之间的函数关系。给定量和扰动量可以看作系统的输入量,被控制量可以看作输出量。具体建模时,往往是从系统的各环节开始,先确定各环节的输入量和输出量,然后根据各环节所遵循的物理规律(如力学、运动学、电磁学、热学等)来列写微分方程。本节通过以下几个线性定常系统的例子来说明建立原始微分方程式(组)的基本方法。

【例 2-1】如图 2-1 所示为一个包括质量块、弹簧、阻尼器的机械位移系统。当外力 $f(t)$ 作用于系统时,质量块产生位移 $x(t)$ 。列出该系统以 $f(t)$ 为输入量 $u(t)$,位移 $x(t)$ 为输出量 $y(t)$ 的运动微分方程式。

【解】当外力 $f(t)$ 未作用于系统时,质量块、弹簧和阻尼器保持相对稳定,当 $f(t)$ 作用后系统产生位移 $x(t)$,如图 2-1 所选的 x 正向,当 $f(t)$ 为正时压缩弹簧,弹簧力为负,而阻尼器产生的力总与速度方向相反,根据牛顿第二定律可知,作用于质量块 m 的合力由下述

方程给出

$$f(t) - f_s(t) - f_d(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

式中, $f_s(t) = Kx(t)$ 为弹簧力, 其中 K 为弹性系数; $f_d(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$ 为阻尼器产生的阻尼力, 其中 B 为阻尼系数。

将 $f_s(t)$ 和 $f_d(t)$ 的表达式代入运动方程式中, 整理后得到系统的运动微分方程式为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

令 $u(t) = f(t)$, $y(t) = x(t)$, 上式可表示为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = u(t) \quad (2-2)$$

这就是一个典型的二阶系统的微分方程模型。

【例 2-2】 图 2-2 所示是一个由电阻器、电感器、电容器串联组成的电路。

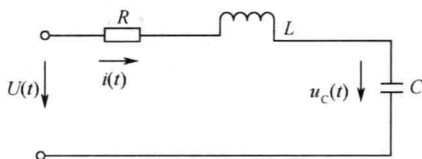


图 2-2 电阻器、电感器、电容器串联电路

$U(t)$ 是外加电压, $i(t)$ 是电路中流经各元件的电流, $u_c(t)$ 是电容器上的电压, 那么根据基尔霍夫定律和电路原理容易写出其微分方程

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = U(t) \\ i = C \frac{du_c}{dt} \end{cases} \quad (2-3)$$

式(2-3)就是描述图 2-2 电路的微分方程组, 它是由两个一阶微分方程组成的。外加电压 $U(t)$ 是输入量, 电流 $i(t)$ 和电容器上的电压 $u_c(t)$ 是两个独立的受控量, 方程数目等于独立受控量数目。在受控量有多个的情形下, 往往只需要着重研究其中的某几个, 而认为其他受控量是次要的, 这些需要着重研究的受控量成为对象的输出量。其他受控量则视为对象的中间变量或内部变量。在一个控制系统中, 把哪些受控量选作输出量, 都是人们自主决定的, 对于系统本身的运动性质没有影响, 有时可以在方程中消去一些中间变量而只留下输出量。在本例中, 如果需要着重研究电容器上的电压 $u_c(t)$, 就可以把式(2-3)中的 $i(t)$ 消去得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U(t) \quad (2-4)$$

这时待求量与方程的数目都减为 1, 但微分方程的阶次则上升为 2。

式(2-2)是机械位移系统的数学模型, 而式(2-4)是电路系统的数学模型。二者的物理性质完全不同, 但它们的数学模型却极其相似。这表明: 数学模型舍弃了各种事物的个性, 而抽象出了它们的共性(即运动规律)。所以数学模型具有比具体事物更一般的属性。数学

模型相同的事物,其运动规律自然相同。所以,尽管例 2-1 和例 2-2 是完全不同的系统,但例 2-1 中物体的位移变化规律必然与例 2-2 中电压的变化规律有共同点。

2.2.2 状态方程

经典控制理论中习惯使用高阶微分方程来描述线性定常系统,这种数学模型实际上是将某个单变量作为输出,直接和输入联系起来,即把系统视为一个“黑箱子”,不去表征系统内部的结构和内部变量,只反映外部变量即输入/输出变量间的因果关系,它对系统的描述是不完整的,不能反映黑箱子内部的某些特性。

现代控制理论中采用的状态空间表达式是一种基于系统内部结构分析的数学模型。从结构的角动,一个动力学系统可以用图 2-3 所示的方框图来表示。其中, x_1, \dots, x_n 是表征系统行为的状态变量组, u_1, \dots, u_p 和 y_1, \dots, y_q 分别为系统的输入变量组和输出变量组,箭头表示信号作用方向和部件变量组间的关系。

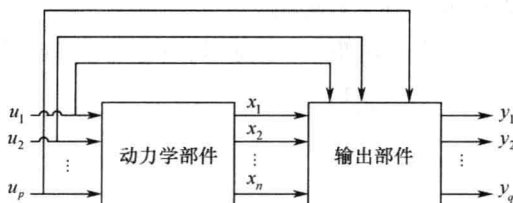


图 2-3 动态系统结构示意图

与微分方程模型关于输入/输出的描述不同,状态空间表达式中把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程,输入引起系统状态的变化,而状态和输入的变化则决定了输出的变化。输入引起状态的变化是一个动态的过程,数学上需采用微分方程或差分方程来表征,并且称这组数学方程为系统的状态方程。

引入向量和方程组

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

那么状态方程可以简洁地表示为向量形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2-6)$$

输出方程也表示为向量形式

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2-7)$$

一般地,在选定一组状态变量 \mathbf{x} 下,系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (2-8)$$

式(2-8)中,如果向量函数 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 中至少有一个分量为状态变量 \mathbf{x} 和输入 \mathbf{u} 的非线性函数,那么它就是一个非线性系统的状态空间表达式。如果向量函数 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 的全部分量都是状态变量 \mathbf{x} 和输入 \mathbf{u} 的线性函数,则相应的系统称为线性系统。线性系统的状态空间表达式可表示为