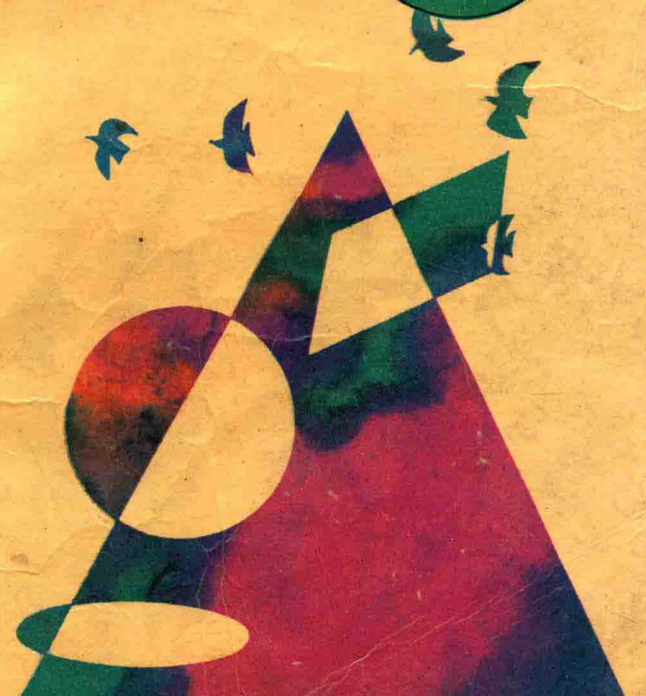
江苏省成人中专教材

数学教程

上册

江苏省教育委员会编

河海大学出版社



江苏省成人中专教材

数学教程

（上）

河 海 大 学 出 版 社

责任编辑　谢业保

数　学　教　程（上、下）

出版发行：　河海大学出版社

（地址：南京西康路一号，邮政编码 210098）

印　　刷：南京金阳彩色印刷厂

（地址：江宁县丹阳镇　　邮编：211157）

开本 787×1092 毫米　1/32 印张：11.125 字数：247 千字

1996 年 8 月第 2 版　1996 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—20，000 册

ISBN　7－5630－0861－6

G・128　　定价：8.20 元（上册）　8.90 元（下册）

（河海版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换）

说　明

为适应各类成人中等专业学校数学教学的需要，我们根据成人中等教育的特点和培养目标于1989年编写了江苏省成人中专数学教材。五年来的教学实践证明，这套教材能适应成人中专数学教学的需要，基本满足了后续课程对数学知识的需求，受到教师和学生的欢迎。

为了深入进行成人中专数学教学改革，在广泛征求对原教材使用意见的基础上，又针对初中数学教学大纲变动的情况，我们对原教材进行了必要的修改，编写了这套教材。

根据成人中等专业教育的特点和培养目标的要求，本套教材在编写时注意突出应用性，并为后续课程服务，在原教材的基础上，增加了“线性规划初步”、“投入产出”等内容，充实了应用举例，以进一步适应专业教学的需要；在不影响数学知识系统性和科学性的前提下，对理论证明不作过高要求。全书文字叙述力求通俗易懂，教材内容由浅入深，每章后都有简要的小结，还安排了一定数量的练习和习题，供教学中选用。书后备有自我检查题，便于学员自学和系统复习。

本套教材分上下两册，上册主要内容是初等数学，下册主要内容是高等数学。本套教材由王国华同志主编，参加编写的有王友林、项复民、杨大仁、仲善堡、黄中元、尤顺祥、杨万成，参加审稿的有沙小宏同志，最后由蒋声教授审定。

本套教材是江苏省教育委员会成人学校教育处组织编写的。在编写过程中，得到各市教育行政部门和有关成人中等专业学校的关心和支持，在此表示衷心感谢。

本套教材也可供职业中专班教学使用。

由于编者水平有限，敬请广大教师和读者批评指正。

江苏省成人中等专业学校

数 学 教 材 编 写 组

一九九四年十二月

目　　录

第一章　函　　数

函数是数学学科的重要内容，在学习其它数学知识和有关专业基础课、专业课时，将会经常用到函数，特别是基本初等函数的知识。本章主要研究函数的概念，并介绍幂函数、指数函数和对数函数等几种基本初等函数，讨论它们的图象和性质.

一、函　　数

1.1　函数的定义

在实践中，有一些量在某一变化过程中可以取不同的数值，而另一些量在某一变化过程中只能取同一数值，我们把在某一变化过程中可取不同数值的量叫做**变量**，而把数值保持不变的量叫做**常量**.

在研究问题时，我们经常可以看到，在同一个变化过程中，同时存在几个变量. 这几个变量之间按照某种规律互相联系.

例如，设某工人一天生产零件 40 个，则两天生产 80 个，三天生产 120 个 … 显然，生产的天数与生产的零件总数是两个变量，对于确定的生产天数，生产出的零件总数也随之确定. 如果用 x 表示生产的天数，y 表示生产的零件总数，则它们之间的关系可以用等式 $y = 40x$ 表示.

再如，当正方形的边长改变时，面积也随之改变. 这里，正

方形的边长和面积是两个变量.如果用 x 表示正方形的边长，y 表示面积，则它们之间的关系可以用等式 $y=x^2$ 表示.

一般地，如果在某一变化过程中，有两个变量 x、y，并且对于变量 x 在其允许范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 叫做 x 的**函数**，记为

$$y=f(x)$$

这里 x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的**定义域**；和自变量 x 的值对应的 y 的值叫做**函数值**，当 $x=a$ 时，对应的函数值用符号 $f(a)$ 表示，函数的取值范围叫做函数的**值域**；f 表示 y 与 x 之间的对应法则.

例如，函数 $y=2x+1$ 的定义域和值域都是全体实数，对应法则是“乘 2 加 1”.

例 1 已知函数 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(0)$、$f(-3)$、$f(a+1)$.

解 由函数值的概念可知，求函数值 $f(a)$，只要把 $x=a$ 代入函数表达式，即把函数表达式中的 x 全部换成 a，再进行必要的计算.

$f(0)=0^2-3\times 0+1=1$,

$f(-3)=(-3)^2-3\times(-3)+1=19$,

$f(a+1)=(a+1)^2-3(a+1)+1=a^2-a-1$.

例 2 已知函数 $f(x)=x^2$，

求 $f(x+h)$、$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2hx+h^2$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y = \frac{1}{2x - 4}$； (2) $y = \sqrt{3x - 1}$.

解 由函数定义域的概念可知，求函数的定义域，就是要找出自变量的取值范围，也就是根据函数的表达式，找出使表达式有意义的自变量的所有可能取的值.

(1) 当 $2x - 4 \neq 0$，即 $x \neq 2$ 时，分式 $\frac{1}{2x - 4}$ 有意义.

∴ 函数的定义域是 $x \neq 2$.

(2) 当 $3x - 1 \geqslant 0$，即 $x \geqslant \frac{1}{3}$ 时，根式 $\sqrt{3x - 1}$ 有意义.

∴ 函数的定义域是 $x \geqslant \frac{1}{3}$.

由例 3，我们可以看出

(1)若函数的表达式是分式，函数的定义域是一切使分母不等于零的实数；

(2)若函数的表达式是偶次根式，函数的定义域是一切使被开方数为非负数的实数.

例 4 求函数 $y = \sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x}$ 的定义域.

解 要使函数的表达式有意义，必须 $\sqrt{x + 3}$ 和 $\sqrt{2 - x}$ 同时有意义，因此有

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

解得 $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

∴ 函数的定义域是 $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

例 5 求函数 $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x + 1}$ 的定义域.

解 根据题意，有

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域是 $x \geqslant -1$ 且 $x \neq 0$.

例 6 某校学生从学校乘车去郊外祭扫烈士墓，汽车速度为每小时 30 公里，途中共用去 45 分钟. 若以 t(小时) 表示时间，s(公里) 表示从学校出发所走的路程，试将 s 表示为 t 的函数，并求函数的定义域和值域.

解 根据题意可知，s 与 t 的函数关系式为

$$s = 30t.$$

$\because$ 45 分钟$=\dfrac{3}{4}$小时，而 t 表示时间，它不能取负值，

$\therefore$ 函数的定义域是 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3}{4}$.

当 $t = 0$ 时，$s = 0$；$t = \dfrac{3}{4}$ 时，$s = 22.5$.

$\therefore$ 函数的值域是 $0 \leqslant s \leqslant 22.5$.

例 6 告诉我们，若自变量表示某一个有特定意义的量，在确定函数的定义域时，应考虑它具有的实际意义.

在上述各例中，函数的定义域都是用不等式来表示的. 为了今后学习的需要，下面我们介绍区间的概念，并用区间来表示某些函数的定义域.

设 a、b 是两个实数，且 $a < b$.

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体，叫做**闭区间**，记作 $[a,b]$；满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体，叫做**开区间**，记作 (a,b). 这里实数 a,b 分别叫做区间的左端点和右端点. 例如，满足不等式 $2 \leqslant x \leqslant 6$ 的实数 x 的全体记作 $[2,6]$；满足不等式 $-4 < x < 3$ 的实数 x 的全体记作 $(-4,3)$.

满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或不等式 $a < x \leqslant b$ 的实数 x 的全体，叫做**半开半闭区间**，分别记作$[a,b)$、$(a,b]$. 例如，满足不等式 $2 \leqslant x < 6$ 或不等式 $-4 < x \leqslant 3$ 的实数 x 的全体，可分别用区间表示为$[2,6)$、$(-4,3]$.

闭区间$[a,b]$、开区间(a,b)、半开半闭区间$[a,b)$ 和$(a,b]$可以在数轴上表示出来，如图 1－1 所示. 应当注意的是，包括在区间内的端点用实心点表示，不包括在区间内的端点用空心点表示.

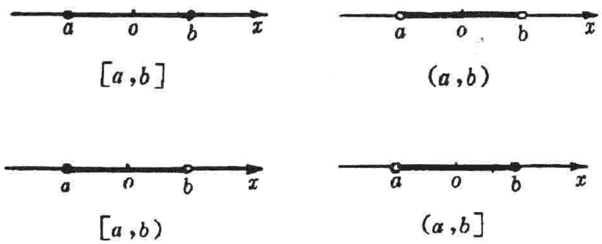


图 1—1

为了用区间表示实数的全体，我们引进符号∞，读作"无穷大"，∞不是一个确定的数. ＋∞、－∞分别读作"正无穷大"、"负无穷大".

实数的全体用区间$(-\infty、+\infty)$表示，由于∞不是一个确定的数，所以这个区间只能是开区间. 相应地，我们把满足不等式 $x \geqslant a$、$x > a$、$x \leqslant b$、$x < b$ 的实数 x 的全体分别用区间表示为$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$. 这些区间在数轴上的表示法如图 1－2 所示.

引进区间的概念以后，例 3 中函数 $y = \sqrt{3x-1}$ 的定义域可以写作$[\frac{1}{3},+\infty)$，例 4 中函数 $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$

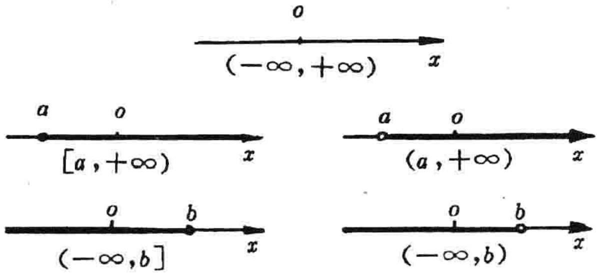


图 1—2

的定义域可以写作$[-3,2]$. 需要说明的是,函数的定义域是用不等式表示,还是用区间表示,本书不作统一要求.

练　习

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$,

求 $f(-1)$、$f(\dfrac{1}{2})$、$f(a-3)$、$f(\dfrac{1}{x-1})$.

2. 已知函数 $f(x)=x^2+3$,

求 $f(x+h)$、$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. 一个铜球在 0℃ 时的体积是 1000 立方厘米,加热后,温度 T 每增加 1℃,体积 V 增加 0.057 立方厘米,写出铜球体积 V 和温度 T 之间的函数关系式 $V=f(T)$,并计算铜球加热到 200℃ 时的体积.

4. 求下列函数的定义域:

(1)$y=x^2+1$;　　(2)$y=\dfrac{2x}{x+1}$;

(3)$y=\dfrac{1}{x^2-9}$;　　(4)$y=\sqrt{2x+3}$;

(5) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(6) $y=\sqrt{4x+3}+\frac{1}{2x-1}$;

(7) $y=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+2}$.

5. 把一切满足下列不等式的实数 x 用区间表示出来：

(1) $5\leqslant x\leqslant 8$;　　(2) $-4<x<0$;

(3) $\frac{1}{2}\leqslant x<3$;　　(4) $0<x\leqslant 1\frac{1}{2}$;

(5) $x\geqslant -8$;　　(6) $x<-2$;

(7) $x>1$;　　(8) $x\leqslant 4$.

1.2　函数的图象

在研究函数的时候，为了加强直观性，以便准确地掌握函数的性质，常需作出函数的图象.

作函数的图象，常用描点法，其方法是：在函数 $y=f(x)$ 的定义域内每取一 x 值，相应地得到一函数值 y，以 x 值为横坐标，y 值为纵坐标，在平面直角坐标系内就描出一点 (x,y)，得到足够多的点后，把它们用光滑曲线或分段光滑曲线连接起来，就得到函数 $y=f(x)$ 的图象.

例 1　作函数 $y=x^3$ 的图象

解　函数的定义域是一切实数. 选取自变量 x 的一些值，并求出相应的 y 值，列表如下：

x	…	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	…
y	…	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375	…

在平面直角坐标系内描出下列各点：

$(-1.5,-3.375)$、$(-1,-1)$、$(-0.5,-0.125)$、$(0,0)$、$(0.5,0.125)$、$(1,1)$、$(1.5,3.375)$.

把上述各点从左到右用光滑曲线连接起来，就得到函数

$y = x^3$ 的图象，如图 1－3.

应当注意，用描点法作函数的图象，必须取足够多的点，以反映出函数图象的全貌，例如上例中，由于函数的定义域是一切实数，我们选取的自变量的值就要兼顾到负数、零和正数，这样得到的图象较为完整. 如果自变量的值只取正数或只取负数，得到的图象都不是原来函数图象的完整的形状.

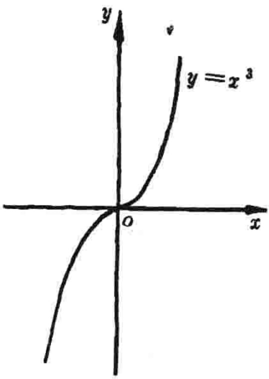


图 1－3

例 2　作函数

$$y = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$ 的图象.

解　函数的定义域是一切实数，但在自变量不同的取值范围内，函数的表达式不同. 作这个函数的图象，只要在同一直角坐标系内分别作出 $y = 1(x \geqslant 0)$、$y = -1(x < 0)$ 的图象即可，如图 1－4.

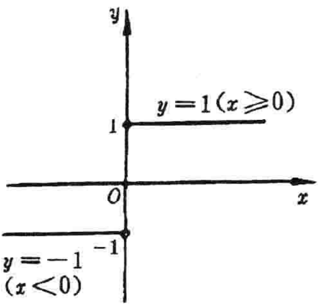


图 1－4

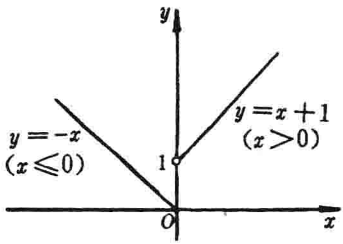


图 1－5

例 3　作函数

$$y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

的图象.

解 在同一直角坐标系内，分别作出 $y=x+1(x>0)$、$y=-x(x\leqslant 0)$ 的图象，即可得到函数的图象，如图 1－5.

例 2、例 3 中函数，称为分段函数，与通常在定义域内只用一个解析式表达的函数不同的是，它们在自变量不同的取值范围内，函数的表达式也不相同.

练　习

作下列函数的图象：

(1) $y=x+3(-2\leqslant x<4)$;

(2) $y=2x^2-1(-2\leqslant x\leqslant 2)$;

(3) $y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 20,\\ 20, & 20<x\leqslant 40;\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$

二、反　函　数

1.3　反函数的概念

先看下面的例子.

在研究匀速直线运动时，速度 v 保持不变，是一个常量. 如果把时间 t 看作自变量，则路程 s 与时间 t 的函数关系式是 $s=vt$；反过来，如果把路程 s 看作自变量，则时间 t 与路程 s 的

函数关系式是 $t=\frac{s}{v}$.

又如，在研究圆的周长 c 与半径 r 之间的关系时，如果把 r 看作自变量，则 c 与 r 函数关系式是 $c=2\pi r$；反过来，如果把 c 看作自变量，则 r 与 c 的函数关系式是 $r=\frac{c}{2\pi}$.

上述例子说明，研究两个变量的函数关系时，哪一个变量是自变量，并不是固定不变的. 在函数 $y=f(x)$ 中，y 是 x 的函数，但在一定条件下，x 也是 y 的函数. 因此，我们有下面的定义：

在函数 $y=f(x)$ 中，如果对于 y 在允许值范围内的每一个确定的值，x 都有唯一确定的值和它对应，那么，x 也是 y 的函数，这个函数叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y).$$

在这个式子中，y 是自变量，x 是 y 的函数，例如，函数 $y=x+1$ 中，对于 y 每取一个确定的实数，x 都有唯一确定的实数和它对应，因此 x 也是 y 的函数，且 $x=y-1$. 它就是函数 $y=x+1$ 的反函数.

但是，习惯上我们总是用 x 表示自变量，y 表示函数，为此只要在式子 $x=f^{-1}(y)$ 中，把字母 x 换成字母 y，同时把字母 y 换成字母 x，得到 $y=f^{-1}(x)$.

本书中，如果没有特别的说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数就是指 $y=f^{-1}(x)$.

根据反函数的定义以及本书中对反函数的上述规定，求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤是：

(1) 由等式 $y=f(x)$ 解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 在 $x=f^{-1}(y)$ 中，把字母 x 都换成字母 y，同时把 y 都换成 x.