河南省“十二五”普通高等教育规划教材

河南省数学教学指导委员会推荐用书

线性代数

王天泽 主编

科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材

河南省数学教学指导委员会推荐用书

线性代数

王天泽　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是河南省数学教学指导委员会推荐用书，根据一般工科本科类线性代数课程教学大纲的基本要求，结合作者多年实际教学经验编写而成. 内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、二次型、Matlab 实验. 每章后配备 A、B 两层次习题.

全书注重体现课改精神和大众化教育背景，强调数学的应用，在满足教学基本要求的前提下，适当降低了理论推导，概念讲解力求深入浅出以便于理解和掌握.

本书可作为高等院校非数学专业理工类、经管类、医药类、农林类等专业的线性代数课程教材，也可供自学者阅读和有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王大泽主编. —北京：科学出版社, 2013

河南省"十二五"普通高等教育规划教材·河南省数学教学指导委员会推荐用书

ISBN 978-7-03-037481-3

I. 线… II. 王… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 099697 号

责任编辑：昌 盛 胡海霞 / 责任校对：桂伟利

责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2013 年 12 月第二次印刷 印张：10 1/4

字数：207 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数》编写委员会

主　编：王天泽

编　委：（按拼音顺序排序）

刘法贵　李亦芳　宋长明

徐少贤　张之正

前　言

线性代数是一个植根深远的数学分支, 起源较早、思想很深、理论完善、应用广泛. 它在培养现代大学生数学素质和利用数学解决实际问题能力方面具有重要作用, 是大学本科相关专业人才培养方案中课程体系和知识体系的重要组成部分, 是后续专业课程学习的知识基础、思想基础和方法基础.

线性代数的主要研究对象是线性方程组. 建立线性方程组求解的基本理论, 展现其广泛深入的应用, 是线性代数的一项重要任务. 线性代数的基本工具是矩阵及其基本理论. 线性方程组求解的实质可以理解为矩阵的初等变换. 因此, 建立关于矩阵的初步理论是线性代数的第二项重要任务. 不管是线性方程组还是矩阵, 它们都来源于生产和生活实践. 随着理论的发展完善, 它们反过来又能够用于解决生产和生活中的实际问题. 所以, 从思想、内容、方法等方面, 体现线性代数来源于实际反过来又解决实际问题的本质, 是线性代数的第三项重要任务. 本书就是按照这些任务要求进行写作的.

根据作者多年的教学实践和体会, 作为一本线性代数教程, 应该突显其构筑知识体系基础和锻炼实际应用能力的特点及需要. 因此, 本书在取材上尽量做到精简且实用: 以行列式、矩阵、线性方程组、二次型等经典题材为内容, 呈现线性代数的核心思想和主要脉络; 以线性方程组求解理论为目标和驱动, 以矩阵理论来贯穿和联系, 展示代数方法的严密逻辑和运算技巧. 然而, 对可能冲淡、甚至干扰到主要思想表达的一些细节, 或舍去, 或只谈大意. 同时, 在具体例子和问题的选取上, 希望体现大众化高等教育和学生职业需求的实用性要求. 书中每章都有一节以思考和拓展为题的内容, 给出延伸阅读的一些材料, 希望以此展现线性代数与其他知识体系的广泛联系, 开阔读者视野.

除了一些最基本的数学素质外, 比如中学解二元一次方程组的 Gauss 消元法, 本书基本不需要其他预备知识. 个别用到其他知识的内容, 一般都是例子. 跳过它们, 不会影响任何学习. 在习题安排上, A 类习题一般是用来巩固基本知识的, B 类习题一般会有体现拓展和应用的考虑.

本书由刘法贵初步取材. 第 1~5 章分别由李亦芳、宋长明、刘法贵、徐少贤和张之正执笔. 全书统稿和定稿由王天泽完成. 限于作者水平, 不当或错误之处在所

难免, 欢迎读者批评指正.

编 者

2013 年 2 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数的一个基本概念和重要工具, 应用领域十分广泛. 本章介绍 n 阶行列式的定义, 讨论其基本性质和计算. 作为应用, 给出求解一类特殊线性方程组的 Cramer 法则.

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　2 阶和 3 阶行列式的定义

行列式的概念出现于线性方程组的求解, 最早是一种速记的表达式. 按照习惯, 先来介绍比较简单的 2 阶行列式. 给出 $4 = 2^2$ 个实数 a_{ij} $(i, j = 1, 2)$, 用表达式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示由它们给出的一个新的实数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

在上式中, 其左边比右边明显既简捷又有规律, 比较容易记忆. 因此, 我们就给式 (1.1) 左边的表达式冠一名称, 把它称为**2 阶行列式**, 它所表示的就是式 (1.1) 右边的实数, 其中“2 阶”一词表示式 (1.1) 左边表达式的行数和列数是 2. 为了叙述方便, 有时也用记号 D_2 来表示式 (1.1). 由此, 当 $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 含有 2 个未知元 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

就可以有规律地表示为下述容易记忆的形式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地, 由 $9=3^2$ 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 组成的**3 阶行列式**

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

定义为

$$D_3=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.3}$$

很明显, 记忆式 (1.2) 右边的表达式比记忆式 (1.3) 右边的烦琐表达式方便很多. 并且, 利用 Gauss 消元法, 通过计算不难得到, 当 $D_3\neq 0$ 时, 含有 3 个未知元 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的唯一解可以简捷地表示为

$$x_1=\frac{d_1}{D_3},\quad x_2=\frac{d_2}{D_3},\quad x_3=\frac{d_3}{D_3},$$

其中 d_1,d_2,d_3 分别是下述 3 阶行列式

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ d_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

可以看出, 2 阶和 3 阶行列式分别是由 2^2 个数和 3^2 个数给出的另一个数的算式, 都表示一个具体的数值. 一般地, 对于给定的正整数 n, 我们自然希望考虑由 n^2 个实数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 行 n 列表达式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

按照类似规律给出一个新的实数的算式. 如果能够做到这一点, 就称其为**n 阶行列式**, 并且 a_{ij} 称为行列式 D_n 的第 i 行第 j 列**元素**, $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**, 相应的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元**, $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,$

a_{n1} 所在的对角线称为**次对角线**, 相应的元素 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 称为行列式的**次对角元**. 通常, 式 (1.4) 简记为 $D_n = |a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

在式 (1.4) 中, $n = 1$ 是特殊情况. 我们把由 1 个数 a 组成的 1 阶行列式 D_1 定义为数 a 本身.

1.1.2 n 阶行列式的定义

我们已经有了 1 阶、2 阶和 3 阶行列式的定义. 本节介绍当 $n \geqslant 4$ 时形如式 (1.4) 的 n 阶行列式 D_n 的具体算式. 为此, 先分析 2 阶和 3 阶行列式定义中的算式的特点. 在式 (1.1) 中, 记 $A_{11} = a_{22}, A_{12} = -a_{21}$, 则

$$D_2 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

注意到 A_{11} 和 A_{12} 都可看作 1 阶行列式, 上式表明, 2 阶行列式 D_2 可以通过"降阶"的办法, 转化为其第一行元素与 A_{1j} $(j = 1, 2)$ 乘积的和. 类似地, 在 D_3 的定义算式 (1.2) 和 (1.3) 中, 记

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

则由定义通过简单计算可得

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

这说明, 3 阶行列式 D_3 也可以通过"降阶"的办法, 转化为其第 1 行元素 a_{1j} 与 2 阶行列式 A_{1j} $(j = 1, 2, 3)$ 的乘积之和. 换句话说, 可以通过上式来给出 3 阶行列式 D_3 的具体算式.

沿用这一思想, 我们自然要问, 能否运用递归的方法, 通过一些 $n-1$ 阶行列式来给出 n 阶行列式的具体算式? 回答是肯定的. 为实现这一思想, 首先给出余子式和代数余子式的概念.

定义 1.1 设 $n \geqslant 2$. 在表达式 (1.4), 即 $D_n = |a_{ij}|$ 中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列上的元素, 余下来的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来相对位置构成的表达式

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij}. 用 $(-1)^{i+j}$ 乘 M_{ij} 得到的表达式 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**, 记为 A_{ij}, 即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如, 对于 $D_4=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&2&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}$, 其第 1 行元素的余子式和代数余子式分别是

$$M_{11}=\begin{vmatrix}0&1&4\\1&2&1\\1&1&0\end{vmatrix},\ M_{12}=\begin{vmatrix}3&1&4\\1&2&1\\0&1&0\end{vmatrix},\ M_{13}=\begin{vmatrix}3&0&4\\1&1&1\\0&1&0\end{vmatrix},\ M_{14}=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}$$

和 $A_{11}=M_{11},A_{12}=-M_{12},A_{13}=M_{13},A_{14}=-M_{14}$.

由定义可以看到, 余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 与 D_n 的第 i 行和第 j 列元素无关. 利用定义 1.1, 根据上面对于 2 阶和 3 阶行列式算式定义的分析, 现在可以用递归方法给出 n 阶行列式的下述定义.

定义 1.2　设 $n\geqslant 2$. n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 定义为

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{1.5}$$

其中 $A_{1j}\ (j=1,2,\cdots,n)$ 为元素 $a_{1j}\ (j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

例 1.1　计算行列式 $D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&5\\2&3&4\end{vmatrix}$.

解　根据式 (1.5), $D_3=A_{11}+2A_{12}+3A_{13}$, 由 2 阶行列式的定义知

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&5\\3&4\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3&5\\2&4\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}=1,$$

故 $D_3=1+2\times(-2)+3\times 1=0$.

例 1.2　设 a,b,c 为任意实数. 计算行列式 $D_3=\begin{vmatrix}a&b&c\\3&4&5\\2&3&4\end{vmatrix}$.

解　根据式 (1.5), $D_3=aA_{11}+bA_{12}+cA_{13}=a-2b+c$.

利用式 (1.5) 和数学归纳法, 容易证明**下三角行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0\\ *&a_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ *&*&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

以及行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

类似地, 不难得到**上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

以及行列式

$$\begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & a_1 \\ * & * & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

本书将总是用 $*$ 表示任意的数.

在 1.2 节我们将会看到, 计算行列式的一个基本方法, 就是利用行列式的性质将其化成三角行列式来计算. 因此, 读者应熟记以上几个特殊行列式的计算公式.

1.2 行列式的性质和计算

当 n 比较大时, 使用 1.1 节中的定义实际计算一个 n 阶行列式的值, 一般是比较烦琐的, 通常需要利用行列式的性质来简化其计算.

1.2.1 行列式的性质

我们先给出行列式的一些基本性质. 考虑到这些性质的证明都较为经典, 并且在参考文献所列的其他线性代数书中都能够找到, 本书不再列出. 仅以 2 阶行列式为例, 作简单说明.

性质 1.1 互换行列式的行和列, 其值不变.

通常, 互换一个行列式的行和列所得到的行列式称为原行列式的**转置行列式**. 因此, 性质 1.1 是说一个行列式与其转置行列式相等. 以 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为

例, 互换其行和列得到的行列式是 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. 由定义容易看到

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

性质 1.2 行列式某一行 (列) 的公因子 k, 可以提到行列式外面.

例如, $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k(ad-bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

性质 1.3 如果行列式某两行 (列) 成比例, 则其值为零.

性质 1.4 行列式两行 (列) 互换, 行列式变号.

将行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第 1 行和第 2 行互换, 得到行列式 $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$. 直接计算可知

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

为叙述方便, 互换行列式的 i, j 两行 (列) 简记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

性质 1.5 行列式某一行 (列) 的倍数加到另外一行 (或一列), 其值不变.

将行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第 2 行的 k 倍加到第 1 行得到 $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$. 直接计算可知

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+kc)d - (b+kd)c = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

行列式第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列) 简记为 $r_i + kr_j$ $(c_i + kc_j)$.

性质 1.6 如果行列式某一行 (列) 各元素都是两个元素之和, 则该行列式可以分拆为两个行列式之和.

对 2 阶行列式来说, 直接计算可得

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q \\ c & d \end{vmatrix} = (a+p)d - (b+q)c = (ad - cb) + (pd - qc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ c & d \end{vmatrix}.$$

1.2.2 n 阶行列式的展开式

根据定义 1.2, n 阶行列式 D_n 是其第 1 行元素与该行元素代数余子式对应乘积之和. 习惯上, 这也称为 n 阶行列式 D_n 按照第 1 行的**展开式**, 或称 D_n 可以按照第 1 行展开. 据此可以联想, D_n 能否按照其他行展开, 即对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, D_n 的第 i 行元素与该行元素代数余子式对应乘积之和是否也等于 D_n 的值? 进一步, 对

于 $1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j$, D_n 第 i 行元素与第 j 行元素代数余子式的对应乘积之和又如何? 再进一步, 如果把上述讨论中关于行列式"行"的分析都改为"列", 是否有类似结论? 下面定理对这些问题给出了一个十分完整的回答. 其证明不难由定义 1.2、性质 1.1、性质 1.3 和性质 1.4 给出.

定理 1.1 对于任一 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$, 我们有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \tag{1.6}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.7}$$

注意, 式 (1.6) 是关于"行"的结果, 式 (1.7) 是关于"列"的结果. 用一句话来说, 定理 1.1 断言, 行列式 D_n 的第 i 行 (列) 元素与其对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D_n, 而第 i 行 (列) 元素与第 j $(i \neq j)$ 行 (列) 元素代数余子式的对应乘积之和为 0.

例 1.3 已知 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

解 首先, 由于 D_n 为上三角行列式, 所以容易看出其值 $D_n = 1$. 因此, 由定义 1.2 得

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = 1.$$

其次, 在式 (1.6) 中, 令 $i = 1$, $2 \leqslant j \leqslant n$, 可得

$$A_{j1} + A_{j2} + \cdots + A_{jn} = 0.$$

将上述式子左右两边分别相加可得

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 1.$$

例 1.4 已知 n 阶行列式 D_n 的代数余子式 $A_{ij} = a_{ij}$, 且 D_n 含有非零元素. 证明: $D_n \neq 0$.

证明 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 把 D_n 按照第 1 行展开, 得 $D_n = a_{11}^2 + a_{12}^2 \cdots + a_{1n}^2 \neq 0$.

1.2.3 行列式的计算

下面通过一些例子说明如何利用行列式的性质来简化和计算行列式. 仔细揣摩这些例子, 对于熟记行列式的性质和应用会有帮助.

例 1.5 计算 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D_4 \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1, r_4 + 5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + 4r_2, r_4 - 8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + \frac{10}{8} r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

该例子的方法, 对计算元素为数字的行列式普遍适用. 对这类行列式, 一般总是利用行列式的性质将它化为上三角行列式 (或下三角行列式) 来计算. 同时, 在计算过程中, 应尽量调整行列式, 使得计算简捷.

把一个行列式化为上三角行列式的过程可以程序化. 首先, 不妨假设行列式的元素不全为 0. 于是, 利用行与行或列与列互换, 总可以把行列式中处于 a_{11} 位置上的元素调整为非零的数. 这样, 可以进一步假设 $a_{11} \neq 0$. 其次, 由于 $a_{11} \neq 0$, 所以能够利用性质 1.5 将行列式中第 1 列的其他元素全化为 0. 接着, 对其右下角的 $n-1$ 阶行列式实施同样的简化程序. 如此类推, 经过有限步骤, 即可将要计算的行列式化为上三角行列式. 类似程序也可将一个行列式化为下三角行列式. 具体做法请读者自行思考. 需要注意的是, 在化简的过程中, 若出现全为 0 的行 (列), 则行列式必为 0, 后续程序就不必再进行了.

要使得计算简捷, 一般需要观察和思考. 比如在例 1.5 的行列式中, 尽管 $a_{11} = 3$, 但是如果直接由此出发将第 1 列以下其余元素化为 0, 就会导致计算中出现很