大学预科系列教材

数学

暨南大学华文学院 编

暨南大学出版社

大学预科系列教材

数 学

暨南大学华文学院编

编 写：数学教研室

暨南大学出版社

图书在版书目（CIP）数据

数学/暨南大学华文学院编．—广州：暨南大学出版社，
2000．8
（大学预科系列教材）
ISBN7－81029－385－0

Ⅰ．数…　Ⅱ．暨…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 37140 号

暨南大学出版社出版
新华书店经销
暨南大学出版社照排中心排版
番禺市石楼官桥彩色印刷厂
开本:787×1092　1/16　字数:370 千　印张:18.25
2000 年 8 月第 1 版　　2000 年 8 月第 1 次印刷
印数:1～2000 册
定价:25.00 元

《大学预科系列教材》编辑委员名单

序　言

贾益民

预科作为大学预备教育是高等教育的一个组成部分。在国际上,很多大学都设有预科,有的还设有专门的预科学院或预科学校。暨南大学的预科教育创办于1925年,是国内大学中开办预科最早的。

预科是高等教育的一种特殊形式,有自己特定的教学大纲、教学目的、教学内容和教学方式。它一方面要帮助学生补习中学阶段的某些学习内容,为进入大学本科学习打下良好的基础,另一方面又要根据大学本科教育的需要,补充一些新的学习内容,以全面提高学生的思想素质和文化素质。这种特殊要求就决定了预科教育既不能完全"炒冷饭",一味地复习中学已经学过的知识内容,也不能提前教授大学本科一年级的课程。这充分说明预科教育有自己的特殊规律,它既有别于中学教育,又有别于大学本科教育,可以说它是介乎于中学和大学本科之间的一种特殊教育学科,其中有许多教学理论问题非常值得研究和探讨。

暨南大学华文学院成立以来,一直把预科作为一个学科来建设,以推动预科教育事业的发展。多年来,暨南大学预科部为大学本科输送了一批又一批的优秀大学本科生。实践证明,暨南大学的预科教育是办得成功的。他们积多年预科教育的经验,组织编写了这套《大学预科系列教材》,包括《语文》、《数学》、《历史》、《地理》、《物理》、《化学》、《生物》。这套教材教学目的明确,教学内容系统科学,具有很强的针对性,充分体现了预科教育的特点。学生根据这套教材进行学习,必将为大学本科学习打下良好的基础。同时,它的出版发行,也必将对我国预科教育事业的发展,起到积极的推动作用。

2000年3月

目　　录

上　　篇

下 篇

上　　篇

第一章　函　数

一、集合与映射

1. 集合的有关概念

(1) 集合　把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合.一般用大写字母 A、B、C… 表示集合.

(2) 元素　集合里的各个对象叫做集合的元素.一般用小写字母 a、b、c… 表示集合里的元素.

(3) 元素与集合的关系　如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a \overline{\in} A$(或者 $a \notin A$).

2. 集合的特征

(1) 确定性　对于任何一个对象,都能够确定它是不是某一给定集合的元素.

(2) 元素互异性　对一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象.即集合里的元素没有重复现象.

(3) 元素无序性　对于一个集合,通常不考虑它的元素之间的顺序.两个集合只要它们所含的元素完全相同,就是同一个集合.

3. 集合的种类

(1) 有限集　含有有限个元素的集合叫做有限集.

(2) 无限集　含有无限个元素的集合叫做无限集.

(3) 单元素集　只含有一个元素的集合叫做单元素集.

(4) 空集　不含任何元素的集合叫做空集,空集用 $\varnothing$ 表示.

(5) 数集　元素为数的集合叫做数集.常用的数集有:

自然数集,记作 N;

整数集,记作 Z;

有理数集,记作 Q;

实数集,记作 R;

复数集,记作 C,等等.

4. 集合的表示法

(1) 列举法　把集合里的元素一一列举出来写在大括号内,这种表示集合的方法,叫做

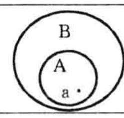
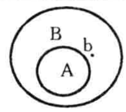
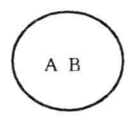
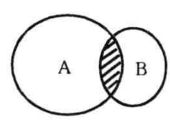
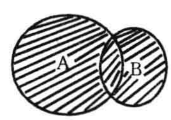
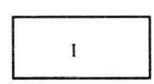
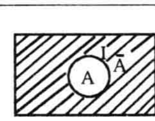
列举法.

(2) 描述法　把集合中元素的公共属性写在大括号内,这种表示集合的方法,叫做描述法.

(3) 图示法　把集合中的所有元素用一条封闭曲线圈起来,这种表示集合的方法,叫做图示法.

5. 集合与集合的关系

集合间的关系如下表:(A、B 表示集合)

名　称	记　号	定　　义	图　　示
子　集	$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$	若 $a\in A$,则 $a\in B$,那么集合 A 叫做集合 B 的子集	
真子集	$A\subset B$ 或 $B\supset A$	若 $A\subseteq B$,且存在 $b\in B$,而 $b\overline{\in}A$,集合 A 叫做集合 B 的真子集.	
相　等	$A=B$	若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么集合 A 和 B 叫做相等.	
交　集	$A\cap B$	同属于集合 A 和集合 B 的一切元素所组成的集合,叫做集合 A 和集合 B 的交集	
并　集	$A\cup B$	属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素所组成的集合,叫做集合 A 和集合 B 的并集	
全　集	I	在研究某些集合之间的关系时,这些集合常是某一给定集合的子集,这个给定集合叫做全集.	
补　集	$\overline{A}$	若 $A\subseteq I$,由集合 I 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 的补集.	

6. 映射

给定两个集合 A、B,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中任何一个元素,在集合 B

中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A、B 及对应法则 f) 叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A \to B$.

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

【例 1】 用列举法表示下列集合：(1)\{不大于 5 的自然数\}；

(2)$\{x \mid x^2 - 2x - 8 < 0, x \in Z\}$；

(3)$\{(x, y \mid x + 2y = 7, x, y \in N\}$.

【解】

(1) $\{1,2,3,4,5\}$；

(2) $\{x \mid -2 < x < 4, x \in Z\} = \{-1,0,1,2,3\}$；

(3) $\{(1,3),(3,2),(5,1)\}$.

【例 2】 用描述法表示下列集合：

(1) 所有的 10 的整数次幂；　　(2)$\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$.

【解】

(1) $\{x \mid x = 10^n, n \in Z\}$；　　(2) $\{x \mid x = (-1)^{n+1}(2n-1), n \in N\}$；

【例 3】 用适当的符号填空：

(1)O ____ $\varnothing$；　　(2)O ____ $\{O\}$；　　(3)$\varnothing$ ____ $\{O\}$；

(4)a ____ $\{a\}$；　　(5)$\varnothing$ ____ $\{a, b\}$；　　(6)$Z \cup N$ ____ N；

(7)$Q \cup Z$ ____ R；　　(8)$Q \cap Z$ ____ N；

(9)$A \cup B$ ____ B；

【解】

(1) $\overline{\in}$；　(2) $\in$；　(3) $\subset$；

(4) $\in$；　(5) $\subset$；　(6) $\supset$；

(7) $\subset$；　(8) $\supset$；　(9) $\supset$.

【例 4】 写出 $\{0,1\}$ 的所有子集及真子集.

【解】

$\{0,1\}$ 的所有子集是 $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$；真子集是 $\varnothing, \{0\}, \{1\}$.

【例 5】 已知 $I = R, A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 \geqslant 0\}$，求 $\overline{A}$.

【解】

$A = x \mid x^2 + 3x + 2 \geqslant 0 = \{x \mid x \leqslant -2\} \cup \{x \mid x \geqslant -1\}$,

$\therefore \overline{A} = \{x \mid -2 < x < -1\}$.

【例 6】 设 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A = \{3,4,5\}, B = \{4,7,8\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cup \overline{B}$.

【解】

$\overline{A} = \{1,2,6,7,8\}$，$\overline{B} = \{1,2,3,5,6\}$，

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,2,6\}$，$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

【例 7】设 $A=\{1,2,3\cdots\}$,$B=\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\cdots\}$, f 是从 A 到 B 的映射,对应法则 $f:x\rightarrow y=\frac{2x-1}{2x+1}$.求(1)$A$ 的元素 3 的象;(2)B 的元素$\frac{15}{17}$的原象.

【解】

(1) $\because$ A 中的元素 $x=3$;

$\therefore$ $y=\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2\times3-1}{2\times3+1}=\frac{5}{7}$;

即 A 中的元素 3 的象是$\frac{5}{7}$

(2) $\because$ $y=\frac{15}{17}$,即 $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{15}{17}$

解得 $x=8$.

所以 B 的元素$\frac{15}{17}$的原象是 8.

【例 8】设二次方程 $x^2-px+15=0$ 的解集为 A,方程 $x^2-5x+q=0$ 的解集为 B,当 $A\cup B=\{2,3,5\}$,$A\cap B=\{3\}$ 时,求集合 A 和 B 以及 P 与 q 的值.

【解】

由 $A\cap B=\{3\}$ 可知 3 是两个方程的公共根,所以

$$\begin{cases}3^2-3P+15=0\\3^2-5\times3+q=0\end{cases}$$

得 $\begin{cases}P=8\\q=6.\end{cases}$

解方程 $x^2-8x+15=0$,得 $x_1=3$, $x_2=5$

$x^2-5x+6=0$,得 $x_1=3$, $x_2=2$.

$\therefore A=\{3,5\}$, $B=\{3,2\}$.

二、函数的概念与性质

1. 函数的定义

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值,按照某个对应法则,y 都有唯一确定的值和它对应,那么 y 叫做 x 的函数.用符号 $y=f(x)$ 表示,这里 x 叫做自变量,y 叫做因变量.自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域,和 x 的值对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

从映射的观点看,函数 $y=f(x)$ 实际上是从 x 取值的集合(定义域)到 y 取值的集合(值域)上的映射.它有三个要素:定义域,对应法则,值域.

2. 函数的表示法

(1) 解析法 用等式表示两个变量间的函数关系的方法.

(2) 列表法　列表表示两个变量间的函数关系的方法.

(3) 图象法　用图象表示两个变量间的函数关系的方法.

3. 函数的性质

(1) 单调性　对于给定区间上的函数 $f(x)$:如果对于属于这个区间的自变量的任意两个值 x_1,x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数;如果对于属于这个区间的自变量任意两个值 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间上是增函数或者在此区间上是减函数,就说 $f(x)$ 在此区间上具有单调性,此区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 奇偶性　如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x, $-x$ 也在定义域内,且有 $f(-x) = -f(x)$,那么 $f(x)$ 是奇函数.如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x, $-x$ 也在定义域内,且有 $f(-x) = f(x)$,那么 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数的图象关于原点对称;偶函数的图象关于 y 轴对称.

(3) 极值与最值　如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的附近有意义,并且 $f(x_0)$ 的值比在 x_0 附近所有各点的函数值都大(或都小),则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).极大值与极小值统称为极值.

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 比定义域内其他所有各点的函数都大(或都小),则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值(或最小值),最大值与最小值统称为最值.

4. 反函数

如果对于函数 $y = f(x)$ 值域中每一个 y 值,都唯一确定一个 x 值,其对应法则记为 f^{-1},则称函数 $x = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上记作 $y = f^{-1}(x)$.

如果 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数,其图象关于直线 $y = x$ 对称,此时函数 $y = f(x)$ 的定义域正好是它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域;函数 $y = f(x)$ 的值域,正好是它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域.因此,求函数 $y = f(x)$ 的反函数,可以先把函数式 $y = f(x)$ 看作以 x 为未知数的方程,从中解出 $x = f^{-1}(y)$,再改写为 $y = f^{-1}(x)$.

【例 9】求下列函数的定义域:

(1)$y = (1+x)^0 - \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$;　　(2)$y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$;

(3)$y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$;　　(4)$y = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

【解】

(1) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} 1+x \neq 0, \\ 1+x \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \qquad x > -1 \text{ 且 } x \neq 0,$$

∴　函数的定域是:$(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0,\\ |x+1|-2\neq 0.\end{cases}$$

解得　$\begin{cases}x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 4,\\ x\neq 1, x\neq -3.\end{cases}$

∴ 函数的定义域是$(-\infty,-3)\cup(-3,-1]\cup[4,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1\neq 0.\end{cases}$$

解得　$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 1.\end{cases}$

∴　函数的定义域是:$[-2,1)\cup(1,2]$.

(4) 为使分母不为零,则

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 1+\dfrac{1}{x}\neq 0,\\ 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0\end{cases}$$

即　$\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -1, x\neq 0,\\ x\neq -\dfrac{1}{2}, x\neq -1, x\neq 0.\end{cases}$

∴ 函数的定义域是:$\{x \mid x\in R \text{ 且 } x\neq -1,-\dfrac{1}{2},0\}$.

【例 10】求下列函数的值域:

(1)$y=\sqrt{49-x^2}$;　　(2)$y=\dfrac{3x-2}{x-1}$.

【解】

(1) ∵　$0\leqslant 49-x^2\leqslant 49$

∴　$-7\leqslant x\leqslant 7$

则　$0\leqslant y\leqslant 7$

∴　函数的值域是:$[0,7]$

(2) 因为 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的反函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$,反函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ 的定义域即是原函数 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的值域,而函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ 的定义域是:$\{x\in R, \text{且 } x\neq 3\}$

∴　函数 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的值域是:$\{y \mid y\in R \text{ 且 } y\neq 3\}$.

【例 11】
证明:(1) 函数 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

【证明】

(1) 设 x_1,x_2 是任意两个实数,且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)=3x_1+2, f(x_2)=3x_2+2$

$f(x_2)-f(x_1)=(3x_2+2)-(3x_1+2)=3(x_2-x_1)$

$\because\quad x_2>x_1,\quad\therefore\quad x_2-x_1>0$

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)>0$

即 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以函数 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

(2) 设 $x_1>0,x_2>0$ 且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)=\dfrac{1}{x_1},\quad f(x_2)=\dfrac{1}{x_2},$

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

由 $x_1>0,x_2>0$,得 $x_1x_2>0$,

又由 $x_1<x_2$,得 $x_1-x_2<0$,于是

$f(x_2)-f(x_1)<0,\quad f(x_2)<f(x_1)$,

所以,$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

【例 12】判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+x^4$;　　(2) $f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$;

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;　　(4) $f(x)=x+1$.

【解】

(1) $\because\quad f(-x)=(-x)^{\frac{2}{3}}+(-x)^4=x^{\frac{2}{3}}+x^4=f(x)$.

$\therefore\quad f(x)=x^{\frac{2}{3}}+x^4$ 是偶函数.

(2) $\because\quad f(-x)=2(-x)+\sqrt[3]{-x}=-(2x+\sqrt[3]{x})=-f(x)$.

$\therefore\quad f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$ 是奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)+\dfrac{1}{(-x)}=-(x+\dfrac{1}{x})=-f(x)$.

$\therefore\quad f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

(4) $\because\quad f(-x)=-x+1, -x+1\neq f(x)$ 且 $-x+1\neq -f(x)$ 所以 $f(x)=x+1$ 既不是偶函数,也不是奇函数.

【例 13】已知函数 $f(x)$ 是奇函数,而且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是