主编：蒋克勤　王为峰　张驰

中学数学学习指导

初中版

ZHONG XUE SHU XUE XUE XI ZHI DAO

气象出版社

中学数学学习指导

（初中·续）

主　编：蒋克勤　王为峰　张　驰

副主编：方亚斌　李庆鹏　袁允昌　阎明亮

编　委：杨志文　陆　明　蔡干伦　刘隄仿

张立新　唐有忠　刘冠平　陈　宜

罗先声　贾晓惠　张汉文　林从栋

张乃华　李国良　杨　云　刘元璋

主　审：陆海泉

气 象 出 版 社

前　言

我们奉献给读者的《中学数学学习指导》，是专门为广大中学生编写的一套中学数学优秀文章荟萃。全书内容覆盖面大，论述深刻，作者们根据现行《中学数学教学大纲》及新大纲的精神，注意从中学教学实际出发，选题和举例都源于课本，但又不拘于课本，居高临下地提出问题、引导思考、发展思维。因此，本书对于巩固学生基础知识，加强学生的基本训练，启发学生开拓思路、掌握解题的方法与技巧，具有一定的指导意义和实用价值。

全书分初中、高中两册，可分别供初中、高中各年级学生阅读、参考。为了方便读者使用，《教材梳理》与《解题技巧》两大重点部分基本上按教材顺序编排。

本书的作者、编者大多是全国知名的特级教师、高级教师，其中也编入了部分崭露头角的青年教师的文章。

我们衷心地欢迎广大读者对本书提出宝贵意见。

编　者

1993年10月

目　　录

第一部分　思维方法

第二部分　学法指导

第三部分　教材梳理

第四部分　解题技巧

第五部分　智能开发

第一部分　思维方法

多解——开阔思路
演变——深化思维

刘元璋　严荣福

解题是最基本的学习活动之一．善于灵活地解数学题是数学能力高低的根本标志．因此，如何提高解题能力也就成为同学们经常谈论的话题．在解题实践中不仅要注重“量”的训练，而且要重视“质”的思索．愿同学们通过本文的学习，心有所悟．

问题　在$Rt\triangle ABC$的斜边上任取一点P，过P作AC、BC的平行线分别交BC、AC于N、M，则$\triangle APM$和$\triangle PBN$的面积之和不小于矩形$MPNC$的面积．试证明之．

这是沈阳市1988年中招考试的一道压轴试题，由于这类题型在教材中少见，条件又较为抽象，的确使人无从下手．那么突破口究竟在哪里呢？

一、多向寻证

1．从正面思考

首先，我们不妨单一地去考察$\triangle APM$、$\triangle BPN$、矩形$CMPN$的面积．

设$Rt\triangle ABC$中，$AC=b$，$BC=a$，$\triangle APM$、$\triangle BPN$的面积之和为S，矩形$CMPN$的面积为S'，$PM=x$，$PN=y$，这样，要比较S与S'的大小，只须由$S-S'$的正负来判断．由此可得以下三种证法：

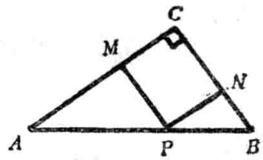

图1—01

证法1 $\because$ $S'=xy$，$S=\frac{1}{2}ab-xy$。

$$\therefore \quad S-S'=\frac{1}{2}ab-2xy \qquad ①$$

$\because$ $PM /\!/ BC$，$\therefore$ $PM:BC=AM:AC$。

即$x:a=(b-y):b$，$\therefore x=\dfrac{a(b-y)}{b}$。 ②

把②代入①并整理得$S-S'=\dfrac{a}{2b}(b-2y)^2\geqslant 0$．于是推出结论．

证法2 $\because$ $PM /\!/ BC$，$PN /\!/ AC$，

$\therefore$ $\triangle APM\backsim\triangle PBN$，$\because$ $\dfrac{PM}{BM}=\dfrac{AM}{PN}=k$，

即 $\dfrac{x}{BN}=\dfrac{AM}{y}=k$，

$\therefore$ $BN=\dfrac{1}{k}x$，$AM=ky$。

$\because$ $S=\dfrac{1}{2}AM\cdot PM+\dfrac{1}{2}PN\cdot PN=\dfrac{k^2+1}{2k}xy$

于是$S-S'=\dfrac{k^2+1}{2k}xy-xy=\dfrac{(k+1)^2}{2k}xy>0$

证法 3 在$Rt\triangle APM$中，$AM = AP\cos A$，

$PM = AP\sin A$，$\therefore S_{\triangle APN} = \frac{1}{2}AM\cdot PM$

$= \frac{1}{2}AP^2\sin A\cos A$。

同理可得

$S_{\triangle BPN} = \frac{1}{2}PB^2\sin A\cos A\ (A + B = 90°)$，

$\because\quad S = \frac{1}{2}(AP^2 + PB^2)\sin A\cos A$，

又 $S' = PM\cdot PN = PA\cdot PB\sin A\cos A$，

$\therefore\quad S - S' = \frac{1}{2}(AP - PB)^2\sin A\cos A \geqslant 0$。

2．从侧面思考

从整体上去考察$\triangle APM$、$\triangle BPN$与$\triangle ABC$（或矩形$CMPN$与$\triangle ABC$）的面积关系。要证$\triangle APM$与$\triangle BPN$的面积之和不小于矩形$CMPM$的面积实质上是证明$\triangle APM$与$\triangle BPN$的面积之和（或矩形$CMPN$的面积）不小于（或不大于）$\triangle ABC$的面积的一半，因此，本题证明可转化为求S的最小值或S'的最大值．联想到方程和函数的知识，有下面的证法：

证法 4 $\because\quad \triangle APM \backsim \triangle PBN \backsim \triangle ABC$

$\therefore\quad \frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(b-y)^2}{b^2}$，$\frac{S_{\triangle BPN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y^2}{b^2}$，

$\therefore\quad S = \frac{S_{\triangle ABC}}{b^2}(2y^2 - 2by + b^2)$，而$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab$，

代入上式并整理得：$2ay^2 - 2aby + ab^2 - 2bs = 0$．

$\because y$为实数，$\therefore \varDelta = (-2ab)^2 - 4\times 2a(ab^2 - 2bs) \geqslant 0$。

由此可推出$S\geqslant\frac{1}{4}ab=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。

在这个证明中，我们还从关系式$S=\frac{S_{\triangle ABC}}{b^2}\times(2y^2-2by+b^2)$中看出，面积$S$是变量$y$的二次函数，因此，证法4可进一步简化：

证法5 $\because$ $S=\frac{S_{\triangle ABC}}{b^2}(2y^2-2by+b^2)$

$$=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b^2}\left[\left(y-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{4}b^2\right]$$

$$=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b^2}\left(y-\frac{1}{2}b^2\right)+\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$\because$ 当$y=\frac{1}{2}b$时，S取最小值$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

即 $S\geqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。

3.从反面思考

假若$\triangle APM$、$\triangle BPN$的面部小于矩形的面积，会出现怎样的情况呢？

证法6 假设$S<S'$，则 $xy>\frac{1}{4}ab$ ①

取AB的中点P，过D作$DE\parallel PM$，$DF\parallel PN$分别交AC、BC于E、F则$DE=\frac{1}{2}a$，$DF=\frac{1}{2}b$，又设$DP=m$，$AB=c$。（如图

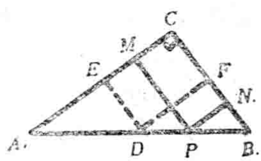

图1—02

$\because$ $DE\parallel PM$，

$$\therefore\ \frac{x}{\frac{1}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}c+m}{\frac{1}{2}c}\qquad \text{即}\ x=\frac{a\left(\frac{1}{2}c+m\right)}{c} \quad ②$$

$$\text{同理可得}\quad y=\frac{b\left(\frac{1}{2}c-m\right)}{c} \quad ③$$

把②、③代入①得：$\dfrac{ab\left(\frac{1}{4}c^2-m^2\right)}{c^2}>\dfrac{1}{4}ab$.

化简得：$m^2<0$，这与$m^2\geqslant 0$相矛盾，于是假设不成立，原命题得证。

4.从纯几何方法上思考

以上证法都掺杂有代数知识和方法。再思考，能否从纯几何方法上去找到思路呢?可以设想，采用割补方法把$\triangle APM$、$\triangle BPN$结合起来，建立与矩形$CMPN$的联系。

证法7 （1）当$AP=PB$时，易证$S_{\triangle APM}+S_{\triangle BPN}=S_{\text{矩形}CMPN}$。

（2）当$AP>PB$时，在AP上截取$PD=PB$，过D作$EF\parallel PM$交AC于E，NP的延长线于F（如图），

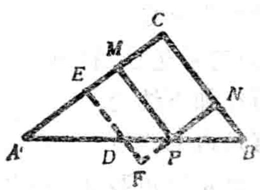

图1—03

则有：$\triangle PDF\cong\triangle PBN$，

矩形$PMEF\cong$矩形$PNCM$，

$$\begin{aligned}\therefore\ & S_{\triangle APM}+S_{\triangle BPN}\\ &=S_{\triangle APM}+S_{\triangle PDF}\\ &=S_{\triangle ADE}+S_{\text{矩}PMEF}\\ &>S_{\text{矩}CMPN}.\end{aligned}$$

（3）当$AP<PB$时，在PB上截取$PD=PA$（如图）

同理可以证明上述结论。

综合（1）、（2）、（3）知：$\triangle APM$与$\triangle BPN$的面积之和不小于矩形$CMPN$的面积。

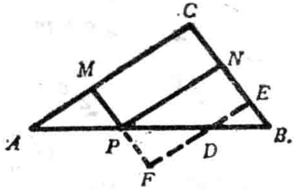

图1－04

二、演变创新

解答完一个数学题，切忌自我陶醉，而应该在探索问题的过程中，力求在更大范围内、更高层次上，提高能力、发展思维。

1.利用题设，挖掘新结论。

（1）$PN:AC+PM:BC=1$　（证法1已证明）

（2）$AM\cdot MC+BN\cdot NC=AP\cdot PB$

（3）$\sqrt{S_{\triangle APM}}+\sqrt{S_{\triangle PBN}}=\sqrt{S_{\triangle ABC}}$　（留给同学们证明）

2.加强条件，探索新结论

改题设中的P为AB上的任一点为$CP\perp AB$. 则有结论：

（1）　$CP^3=AM\cdot BN\cdot AB$

（2）　$AC^3:BC^3=AM:BN$

提示：运用射影定理和三角形的面积公式。

3.全面探究，推广原命题

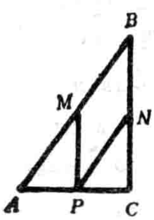

图1－05

（1）如果P点是直角边上的任一点（如图1—05），可得如下结论：

过直角三角形直角边上的任一点引其它两边的平行线，把原直角三角形分割成的两个小三角形面积之和不小于原三角形面积的一半。

如图中，$PM \parallel BC$，$PN \parallel AB$　则$S_{\triangle PAM}+S_{\triangle PCN} \geqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，等号在$P$为$AC$的中点时成立。

（2）把上面的直角三角形改为任意三角形，原命题的结论还成立吗？

如图，$\triangle ABC$中，$PM \parallel BC$，$PN \parallel AC$，则：

$$S_{\triangle APM}+S_{\triangle BPN} \geqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

（同学们自己证明）

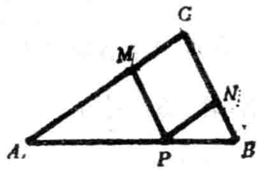

图1—06

三．应用巩固

下面再提供几道习题，供同学们课后练习。

1．过$Rt\triangle ABC$的斜边AB上的任一点P分别作AC、BC的平行线，交BC、AC于N、M，已知$AC=b$、$BC=a$；

（1）当CP之长最短时，求矩形$MPCN$的面积；

（2）当P在$\angle ACB$的平分线上时，求$\triangle APM$与$\triangle PBN$的面积之和与矩形$MPNC$的面积之比；

（3）当矩形$CPNC$的面积最大时，求CP之长；

2．设P为$\triangle ABC$的AB边上的任一点，过P作AC、BC的平行线分别交BC、AC于N、M，设$\triangle APM$、$\triangle PBN$、$\square CMPN$、$\triangle ABC$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S。

（1）求证：$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$

（2）当$AP:BP$为何值时，S_1+S_2有最小值，最小值是多少？

（3）求证：S_1、S_2是方程$4x^2-4(S-S_3)x+S_3{}^2$

$=0$ 的两个根。

3．（1）在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=2$，$AC=4$，P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，过 P 分别作三边的平行线 QQ'、RR'、TT'，设 S 为 $\triangle PQT$、$\triangle PQ'R'$、$\triangle PQT'$ 的面积之和，求 S 的最小值，并说出当 S 取最小值时 P 点的位置。

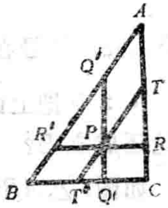

图 1－08

（答案：$S\geqslant\frac{4}{3}$）

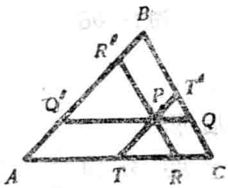

图 1－09

（2）将（1）中的直角三角形改为面积为 M 的任意三角形，求 S 的最小值，并说出 S 取最小值时 P 点的位置。（清华大学首届少年预科班招生试题，答案 $S\geqslant\frac{m}{3}$。）

用逆向思维解数学题

蒋克勤　袁允昌

近年来，各种数学报刊上发表了不少论述逆向思维的文章，各类考试中，考查逆向思维的试题也频频“亮相”，足见加强逆向思维训练的重要！

那么，什么是“逆向思维”呢？

引例1　在1到1000之间有多少个数不是100的倍数

分析　若从问题正面找出1到1000之间不是100的倍数

的数，是相当费神的，但从反面考虑则十分简捷。

解 不是100倍数的反面是100的倍数，因为1到1000中是100倍数的数是100、200，……，1000共10个，所以1到1000中不是100倍数的数有$1000-10=990$（个）。

引例2 学校有132名学生参加乒乓球选拔赛，采用单淘汰制，为决定第一名，共需要安排多少场比赛？

分析 本题若按常规思路，第一轮需要$\frac{132}{2}$场，第二轮需要$\frac{66}{2}$场，第三轮需要$\frac{32}{2}$场（余下1人不参加），这样计算十分麻烦，若考虑只选拔1人的反面是淘汰131人，而淘汰1人就需要进行一场比赛，故需要安排131场比赛。

象上面把问题倒过来想，或以问题的反面去想的心理活动过程，在心理学上称作逆向思维（也称反向思维），它是一种重要的创造性思维，是开创型人才必备的思维品质。

本文举例说明逆向思维在解数学题中的应用。

一、利用定义的可逆性

例1 设$a^2+2a-1=0$，$b^4-2b^2-1=0$，且$1-ab^2\neq 0$，则$\left(\frac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1990}$的值为____。

（1990年合肥市初中数学竞赛试题）

解 原等式可化为$\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot\frac{1}{a}-1=0$，$(b^2)^2-2b^2-1=0$，由一元二次方程根的定义可逆性知，$\frac{1}{a}$和$b^2$均满足方程$x^2-2x-1=0$。

∵ 方程$x^2-2x-1=0$的判别式$\Delta=8>0$，且因

$1-ab^2\neq 0$，$\frac{1}{a}\neq b^2$.

∴ $\frac{1}{a}$和b^2是方程$x^2-2x-1=0$的两个不相等的根，

由韦达定理，得$b^2+\frac{1}{a}=2$，$\frac{1}{a}\cdot b^2=-1$，

$$\therefore \left(\frac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1990}=\left[\left(b^2+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a}\cdot b^2\right)\right]^{1990}$$

$$=(2-1)^{1990}=1.$$

二、逆用公式、法则、定理

例2 计算$\left(\frac{2}{3}\right)^{1992}\times 1.5^{1991}$.

分析 直接计算相当麻烦，若逆用法则$(ab)^n=a^nb^n$，计算就简便得多。（解法略）

例3 化简 $\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$.

（1986年北京市初中数学竞赛试题）

分析 若一开始就分母有理化，将不胜其繁，若逆用法则$\frac{1}{X}\pm\frac{1}{Y}=\frac{Y\pm X}{XY}$则能使过程十分简捷.

解 原式$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+(3\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$