



主编：蔺克勤 王为峰 张驰

中学数学学习指导

初中版

ZHONG XUE SHU XUE
XUE XIZHI DAO

气象出版社

中学数学学习指导

(初中·续)

主 编：蒋克勤

副主编：方亚斌

编 委：杨志文

张立新

罗先声

张乃华

主 审：陆海泉

王为峰

李庆鹏

陆 明

唐有忠

贾晓惠

李国良

张 驰

袁允昌

蔡千伦

刘冠平

张汉文

杨 云

阎明亮

刘隄仿

陈 宜

林从栋

刘元璋

气 象 出 版 社

前 言

我们奉献给读者的《中学数学学习指导》，是专门为广大中学生编写的一套中学数学优秀文章荟萃。全书内容覆盖面大，论述深刻，作者们根据现行《中学数学教学大纲》及新大纲的精神，注意从中学教学实际出发，选题和举例都源于课本，但又不拘于课本，居高临下地提出问题、引导思考、发展思维。因此，本书对于巩固学生基础知识，加强学生的基本训练，启发学生开拓思路、掌握解题的方法与技巧，具有一定的指导意义和实用价值。

全书分初中、高中两册，可分别供初中、高中各年级学生阅读、参考。为了方便读者使用，《教材梳理》与《解题技巧》两大重点部分基本上按教材顺序编排。

本书的作者、编者大多是全国知名的特级教师、高级教师，其中也编入了部分崭露头角的青年教师的文章。

我们衷心地欢迎广大读者对本书提出宝贵意见。

编 者

1993年10月

目 录

第一部分 思维方法

多解——开阔思路，演变——深化思维·····	
·····刘璋元 严荣福 (1)	
用逆向思维解数学题·····	蒋克勤 袁允昌 (8)
运用整体思想解题·····	李庆鹏 (16)
平面几何中的整体思想·····	曹亦光 林从栋 (19)
加强学生思维缜密性的训练·····	张冬青 (22)
转化——解应用题的基本思考策略·····	刘元璋 (24)

第二部分 学法指导

从例题中学方法·····	方亚斌 (30)
要善于从课本习题中得出新规律·····	袁允昌 陆汉新 (34)
一类中考综合题的解法举例·····	张镜丹 (36)
一题多思与一图多用·····	汤奎骥 (40)
重视公式的逆向使用·····	单 平 (43)
谈非负数的综合复习·····	罗先声 (48)
怎样学习列方程解应用题·····	刘文源 (51)
谈谈“指数”的学习·····	王建锋 (54)

二次函数的学习与辅导·····	尤秋金 (59)
余弦定理在初中代数中的地位·····	
——兼谈余弦定理的复习·····	单国光 (64)
解题中发生差错的原因分析·····	季 忠 (67)
运用判别式解题中的常见错误·····	王为锋 (69)
由三角形的高而造成的错题·····	方亚斌 (72)
几何证明中的逻辑错误·····	王为锋 (75)
浅谈数学题中的隐含条件·····	张立新 (80)
浅谈《平凡》直接证明的分析法·····	蔡干伦 (82)

第三部分 教材梳理

正确认识用字母表示数·····	阎明亮 (88)
非负数性质的应用·····	耿恒考 (90)
一元一次不等式两步检验法·····	刘冠平 (94)
一元二次方程的合理解法·····	刘冠平 (96)
一元二次方程应用举隅·····	吴树俊 (98)
指数题型例说·····	陈志君 (102)
一个重要结论的应用·····	王槐雄 (105)
判别式的应用·····	季汉成 (107)
一类二元二次方程组的解法·····	张 弛 龚 同 (110)
增设辅元——解复杂应用题的思考策略·····	
·····	刘元璋 潘世玉 (112)
运用待定系数法求二次函数的解析式·····	张镜丹 (115)
关于三角形中位线定理的特殊证明方法探讨·····	
·····	刘亚玉 (118)
注意发现隐蔽的等腰三角形·····	曹家祝 (120)

要重视课本基本图形性质的应用···	蒋克勤	蒋 忠	(124)
怎样证明 $\angle\alpha = \frac{1}{2}(\angle\beta - \angle\gamma)$ ·····	蒋克勤	潘士德	(127)
勾股定理的另几种证法·····	蒋克勤	蔡 娟	(130)
梯形中位线定理的推广及应用·····	袁允昌	陆汉新	(132)
一道几何题的变形和推广·····	曹家祝		(134)
把握特征施演变 联想构造求规律			
——线段的平方或积的和、差问题的证明			
·····	刘元璋	柯友松	(140)
不可忽视的常数“ $2R$ ”·····	石永芳		(144)
正、余弦定理在几何证题中的应用·····	耿恒考		(147)
余弦定理的一个变式及应用·····	李国良		(151)
面积比定理·····	李培明		(154)
外公切线长计算公式的应用·····	张汉文		(156)

第四部分 解题技巧

例说解题方法·····	张 弛		(159)
用通分法、因式分解法证几何题·····	王为锋		(162)
一道题 三条思路 五种解法·····	方亚斌		(165)
浅谈方程和不等式解的特例·····	刘冠平		(167)
某些特殊方程的解法·····	王为锋		(169)
适当增设未知数解题举例·····			
·····	张 弛	张 胤	张 扬 (171)
特殊方法解无理方程·····	沈亚兰	唐有忠	(172)
巧解一类方程组·····	蒋克勤	沈亚兰	(176)
一题多解 殊途同归·····	陆汉新	袁允昌	(179)

整体把握巧解题·····	倪亚兰	江玉萍 (183)
函数图象选择题的解法·····	王槐雄	(185)
浅谈构造法解题·····	张汉文	(188)
浅谈“一浅型”线段成比例问题的证明·····		
·····	刘元璋	梁勋武 (191)
三角形面积证题拾零·····	陆明	(195)
两道几何证明题的思维方法·····	姚宜如	(199)
整体补形巧解平几题·····	蒋克勤	唐有忠 (203)
巧用面积证定理·····	邱锦泉	(208)
面积法巧证几何题·····	蒋克勤	袁允昌 (214)
利用余弦定理巧证几何题·····	蒋克勤	潘士德 (219)

第五部分 智能开发

如何求代数式的值·····	张弛	(224)
巧借等价公式 妙证“二次型”比例命题·····		
·····	刘元璋	方雄武 (227)
一道课本习题的妙用·····	方亚斌	(232)
一个条件等式及其应用·····	李培明	(235)
关于一道几何命题的思考·····	汤奎骥	(237)
平面几何中的旋转变换·····	刘隄仿	翁忠林 (241)
平几问题的几种常见变换及其应用·····	陈宜	(245)
有趣的等积变换·····	贾晓惠	(252)
邑方问题的解法·····	潘有发	(556)

第一部分 思维方法

多解——开阔思路

演变——深化思维

刘元璋 严荣福

解题是最基本的学习活动之一。善于灵活地解数学题是数学能力高低的根本标志。因此，如何提高解题能力也就成为同学们经常谈论的话题。在解题实践中不仅要注重“量”的训练，而且要重视“质”的思索。愿同学们通过本文的学习，心有所悟。

问题 在 $Rt\triangle ABC$ 的斜上任取一点 P ，过 P 作 AC 、 BC 的平行线分别交 BC 、 AC 于 N 、 M ，则 $\triangle APM$ 和 $\triangle PBN$ 的面积之和不小于矩形 $MPNC$ 的面积。试证明之。

这是沈阳市1988年中招考试的一道压轴试题，由于这类题型在教材中少见，条件又较为抽象，的确使人无从下手。那么突破口究竟在哪里呢？

一、多向寻证

1. 从正面思考

首先，我们不妨单地去考察 $\triangle APM$ 、 $\triangle BPN$ 、矩形 $CMPN$ 的面积。

设 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = b$, $BC = a$, $\triangle APM$ 、 $\triangle BPN$ 的面积之和为 S , 矩形 $CMPN$ 的面积为 S' , $PM = x$, $PN = y$, 这样, 要比较 S 与 S' 的大小, 只须由 $S - S'$ 的正负来判断。由此可得以下三种证法:

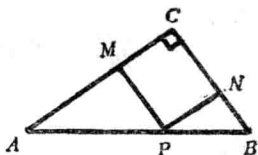


图 1-01

$$\text{证法 1} \quad \because S' = xy, S = \frac{1}{2}ab - xy.$$

$$\therefore S - S' = \frac{1}{2}ab - 2xy \quad (1)$$

$$\because PM \parallel BC, \therefore PM : BC = AM : AC.$$

$$\text{即 } x : a = (b - y) : b, \therefore x = \frac{a(b - y)}{b}. \quad (2)$$

把②代入①并整理得 $S - S' = \frac{a}{2b}(b - 2y)^2 \geq 0$. 于是推出结论.

$$\text{证法 2} \quad \because PM \parallel BC, PN \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle APM \sim \triangle PBN, \because \frac{PM}{BM} = \frac{AM}{PN} = k,$$

$$\text{即 } \frac{x}{BN} = \frac{AM}{y} = k,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{k}x, AM = ky.$$

$$\because S = \frac{1}{2}AM \cdot PM + \frac{1}{2}PN \cdot BN = \frac{k^2 + 1}{2k}xy$$

$$\text{于是 } S - S' = \frac{k^2 + 1}{2k}xy - xy = \frac{(k + 1)^2}{2k}xy > 0$$

证法 3 在 $Rt\triangle APM$ 中, $AM = AP\cos A$,

$$\begin{aligned} PM &= AP\sin A, \therefore S_{\triangle APM} = \frac{1}{2} AM \cdot PM \\ &= \frac{1}{2} AP^2 \sin A \cos A. \end{aligned}$$

同理可得

$$S_{\triangle BPN} = \frac{1}{2} PB^2 \sin A \cos A \quad (A + B = 90^\circ),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (AP^2 + PB^2) \sin A \cos A,$$

$$\text{又 } S' = PM \cdot PN = PA \cdot PB \sin A \cos A,$$

$$\therefore S - S' = \frac{1}{2} (AP - PB)^2 \sin A \cos A > 0.$$

2. 从侧面思考

从整体上去考察 $\triangle APM$ 、 $\triangle BPN$ 与 $\triangle ABC$ (或矩形 CM PN 与 $\triangle ABC$) 的面积关系. 要证 $\triangle APM$ 与 $\triangle BPN$ 的面积之和不小于矩形 CM PN 的面积实质上是证明 $\triangle APM$ 与 $\triangle BPN$ 的面积之和 (或矩形 CM PN 的面积) 不小于 (或不大于) $\triangle ABC$ 的面积的一半, 因此, 本题证明可转化为求 S 的最小值或 S' 的最大值. 联想到方程和函数的知识, 有下面的证法:

证法 4 $\because \triangle APM \sim \triangle BPN \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(b-y)^2}{b^2}, \quad \frac{S_{\triangle BPN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y^2}{b^2},$$

$$\therefore S = \frac{S_{\triangle ABC}}{b^2} (2y^2 - 2by + b^2), \text{ 而 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab,$$

$$\text{代入上式并整理得: } 2ay^2 - 2aby + ab^2 - 2bs = 0.$$

$$\because y \text{ 为实数, } \therefore \Delta = (-2ab)^2 - 4 \times 2a(ab^2 - 2bs) \geq 0.$$

由此可推出 $S \geq \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

在这个证明中, 我们还从关系式 $S = \frac{S_{\triangle ABC}}{b^2} \times (2y^2 - 2by + b^2)$ 中看出, 面积 S 是变量 y 的二次函数, 因此, 证法 4 可进一步简化:

$$\begin{aligned} \text{证法 5} \quad \because \quad S &= \frac{S_{\triangle ABC}}{b^2} (2y^2 - 2by + b^2) \\ &= \frac{2S_{\triangle ABC}}{b^2} \left[\left(y - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 \right] \\ &= \frac{2S_{\triangle ABC}}{b^2} \left(y - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $y = \frac{1}{2}b$ 时, S 取最小值 $\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

即 $S \geq \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

3. 从反面思考

假若 $\triangle APM$ 、 $\triangle BPN$ 的面积小于矩形的面积, 会出现怎样的情况呢?

证法 6 假设 $S < S'$, 则 $xy > \frac{1}{4}ab$ ①

取 AB 的中点 P , 过 D 作 $DE \parallel PM$, $DF \parallel PN$ 分别交 AC 、 BC 于 E 、 F 则 $DE = \frac{1}{2}a$, $DF = \frac{1}{2}b$, 又设 $DP = m$, $AB = c$. (如图

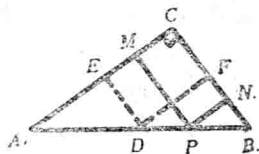


图 1-02

$\therefore DE \parallel PM$,

$$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}c+m}{\frac{1}{2}c} \quad \text{即 } x = \frac{a\left(\frac{1}{2}c+m\right)}{c} \quad (2)$$

$$\text{同理可得 } y = \frac{b\left(\frac{1}{2}c-m\right)}{c} \quad (3)$$

$$\text{把②、③代入①得: } \frac{ab\left(\frac{1}{4}c^2-m^2\right)}{c^2} > \frac{1}{4}ab.$$

化简得: $m^2 < 0$, 这与 $m^2 \geq 0$ 相矛盾, 于是假设不成立, 原命题得证.

4. 从纯几何方法上思考

以上证法都掺杂有代数知识和方法. 再思考, 能否从纯几何方法上去找到思路呢? 可以设想, 采用割补方法把 $\triangle APM$ 、 $\triangle BPN$ 结合起来, 建立与矩形 $CMPN$ 的联系.

证法 7 (1) 当 $AP = PB$ 时, 易证 $S_{\triangle APM} + S_{\triangle BPN} = S_{\text{矩形 } CMPN}$.

(2) 当 $AP > PB$ 时, 在 AP 上截取 $PD = PB$, 过 D 作 $EF \parallel PM$ 交 AC 于 E , NP 的延长线于 F (如图),

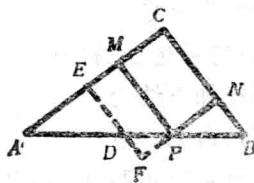


图 1-03

则有: $\triangle PDF \cong \triangle PBN$,
矩形 $PMEF \cong$ 矩形 $PNCM$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APM} + S_{\triangle BPN} &= S_{\triangle APM} + S_{\triangle PDF} \\ &= S_{\triangle ADE} + S_{\text{矩形 } PMEF} \\ &> S_{\text{矩形 } CMPN}. \end{aligned}$$

(3) 当 $AP < PB$ 时, 在 PB 上截取 $PD = PA$ (如图)

同理可以证明上述结论。

综合(1)、(2)、(3)知： $\triangle APM$ 与 $\triangle BPN$ 的面积之和不小于矩形 $CMPN$ 的面积。

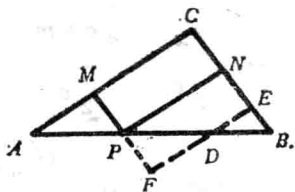


图 1-04

二、演变创新

解答完一个数学题，切忌自我陶醉，而应该在探索问题的过程中，力求在更大范围内、更高层次上，提高能力、发展思维。

1. 利用题设，挖掘新结论。

(1) $PN : AC + PM : BC = 1$ (证法 1 已证明)

(2) $AM \cdot MC + BN \cdot NC = AP \cdot PB$

(3) $\sqrt{S_{\triangle APM}} + \sqrt{S_{\triangle BPN}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}}$ (留给同学们证明)

2. 加强条件，探索新结论

改题设中的 P 为 AB 上的任一点为 $CP \perp AB$ ，则有结论：

(1) $CP^3 = AM \cdot BN \cdot AB$

(2) $AC^3 : BC^3 = AM : BN$

提示：运用射影定理和三角形的面积公式。

3. 全面探究，推广原命题

(1) 如果 P 点是直角边上的任一点 (如图 1-05)，可得如下结论：

过直角三角形直角边上的任一点引其它两边的平行线，把原直角三角形分割成的两个小三角形面积之和不小于原三角形面积的一半。

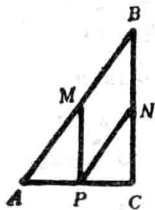


图 1-05

如图中, $PM \parallel BC$, $PN \parallel AB$ 则 $S_{\triangle PAM} + S_{\triangle PCN} > \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, 等号在 P 为 AC 的中点时成立.

(2) 把上面的直角三角形改为任意三角形, 原命题的结论还成立吗?

如图, $\triangle ABC$ 中, $PM \parallel BC$, $PN \parallel AC$, 则:

$$S_{\triangle APM} + S_{\triangle BPN} > \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

(同学们自己证明)

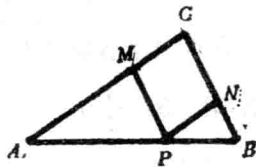


图1-06

三. 应用巩固

下面再提供几道习题, 供同学们课后练习.

1. 过 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的任一点 P 分别作 AC 、 BC 的平行线, 交 BC 、 AC 于 N 、 M , 已知 $AC = b$ 、 $BC = a$,

(1) 当 CP 之长最短时, 求矩形 $MPCN$ 的面积;

(2) 当 P 在 $\angle ACB$ 的平分线上时, 求 $\triangle APM$ 与 $\triangle PBN$ 的面积之和与矩形 $MPNC$ 的面积之比;

(3) 当矩形 $MPNC$ 的面积最大时, 求 CP 之长;

2. 设 P 为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一点, 过 P 作 AC 、 BC 的平行线分别交 BC 、 AC 于 N 、 M , 设 $\triangle APM$ 、 $\triangle PBN$ 、 $\square MPNC$ 、 $\triangle ABC$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S .

(1) 求证: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$

(2) 当 $AP:BP$ 为何值时, $S_1 + S_2$ 有最小值, 最小值是多少?

(3) 求证: S_1 、 S_2 是方程 $4x^2 - 4(S - S_3)x + S_3^2$

= 0 的两个根.

3. (1) 在直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, $AC = 4$, P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, 过 P 分别作三边的平行线 QQ' 、 RR' 、 TT' , 设 S 为 $\triangle PQT$ 、 $\triangle PQ'R'$ 、 $\triangle PQT'$ 的面积之和, 求 S 的最小值, 并说出当 S 取最小值时 P 点的位置.

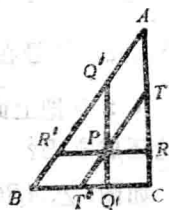


图 1-08

(答案: $S \geq \frac{4}{3}$)

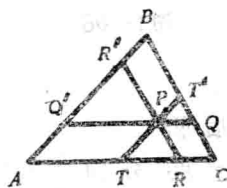


图 1-09

(2) 将 (1) 中的直角三角形改为面积为 M 的任意三角形, 求 S 的最小值, 并说出 S 取最小值时 P 点的位置. (清华大学首届少年预科班招生试题, 答案 $S \geq \frac{m}{3}$.)

用逆向思维解数学题

蒋克勤 袁允昌

近年来, 各种数学报刊上发表了不少论述逆向思维的文章, 各类考试中, 考查逆向思维的试题也频频“亮相”, 足见加强逆向思维训练的重要!

那么, 什么是“逆向思维”呢?

引例 1 在 1 到 1000 之间有多少个数不是 100 的倍数

分析 若从问题正面找出 1 到 1000 之间不是 100 的倍数

的数，是相当费神的，但从反面考虑则十分简捷。

解 不是100倍数的反面是100的倍数，因为1到1000中是100倍数的数是100、200，……，1000共10个，所以1到1000中不是100倍数的数有 $1000 - 10 = 990$ （个）。

引例2 学校有132名学生参加乒乓球选拔赛，采用单淘汰制，为决定第一名，共需要安排多少场比赛？

分析 本题若按常规思路，第一轮需要 $\frac{132}{2}$ 场，第二轮需要 $\frac{66}{2}$ 场，第三轮需要 $\frac{32}{2}$ 场（余下1人不参加），这样计算十分麻烦，若考虑只选拔1人的反面是淘汰131人，而淘汰1人就需要进行一场比赛，故需要安排131场比赛。

象上面把问题倒过来想，或以问题的反面去想的心理活动过程，在心理学上称作逆向思维（也称反向思维），它是一种重要的创造性思维，是开创型人才必备的思维品质。

本文举例说明逆向思维在解数学题中的应用。

一、利用定义的可逆性

例1 设 $a^2 + 2a - 1 = 0$ ， $b^4 - 2b^2 - 1 = 0$ ，且 $1 - ab^2 \neq 0$ ，则 $\left(\frac{ab^2 + b^2 + 1}{a}\right)^{1990}$ 的值为_____。

（1990年合肥市初中数学竞赛试题）

解 原等式可化为 $\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{a} - 1 = 0$ ， $(b^2)^2 - 2b^2 - 1 = 0$ ，由一元二次方程根的定义可逆性知， $\frac{1}{a}$ 和 b^2 均满足方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 。

$\because$ 方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 8 > 0$, 且因 $1 - ab^2 \neq 0$, $\frac{1}{a} \neq b^2$.

$\therefore \frac{1}{a}$ 和 b^2 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个不相等的根,

由韦达定理, 得 $b^2 + \frac{1}{a} = 2$, $\frac{1}{a} \cdot b^2 = -1$,

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{ab^2 + b^2 + 1}{a} \right)^{1990} &= \left[\left(b^2 + \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{1}{a} \cdot b^2 \right) \right]^{1990} \\ &= (2 - 1)^{1990} = 1.\end{aligned}$$

二、逆用公式、法则、定理

例2 计算 $\left(\frac{2}{3} \right)^{1992} \times 1.5^{1991}$.

分析 直接计算相当麻烦, 若逆用法则 $(ab)^n = a^n b^n$, 计算就简便得多. (解法略)

例3 化简 $\frac{\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$.

(1986年北京市初中数学竞赛试题)

分析 若一开始就分母有理化, 将不胜其繁, 若逆用法则 $\frac{1}{\frac{1}{X} \pm \frac{1}{Y}} = \frac{Y \pm X}{XY}$ 则能使过程十分简捷.

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{3}) + (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{2}.\end{aligned}$$