A Very Short Introduction

牛津通识读本

数学

Mathematics

[英国] 蒂莫西·高尔斯 / 著

刘熙 / 译

译林出版社

[英国

数学

牛津通识读本 ·

Mathematics

A Very Short Introduction

译林出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/(英)高尔斯(Gowers, T.)著;刘熙译. —南京:译林出版社, 2014.3
(牛津通识读本)
书名原文:Mathematics: A Very Short Introduction
ISBN 978-7-5447-4523-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①高… ②刘… Ⅲ. ①数学-研究 Ⅳ. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 242823 号

Copyright © Timothy Gowers 2002
Mathematics was originally published in English in 2002.
This Bilingual Edition is published by arrangement with Oxford University Press and is for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong SAR, Macau SAR and Taiwan, and may not be bought for export therefrom.
Chinese and English edition copyright © 2013 by Yilin Press, Ltd.
著作权合同登记号 图字:10-2007-046 号

书　　名	数学
作　　者	[英国]蒂莫西·高尔斯
译　　者	刘　熙
责任编辑	何本国
原文出版	Oxford University Press, 2002
出版发行	凤凰出版传媒股份有限公司 译林出版社
出版社地址	南京市湖南路 1 号 A 楼, 邮编: 210009
电子邮箱	yilin@yilin.com
出版社网址	http://www.yilin.com
经　　销	凤凰出版传媒股份有限公司
印　　刷	南通印刷总厂有限公司
开　　本	635 毫米×889 毫米 1/16
印　　张	18.75
插　　页	4
版　　次	2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5447-4523-9
定　　价	25.00 元

译林版图书若有印装错误可向出版社调换
(电话: 025-83658316)

序言

李大潜

数学是绝大多数人学得最多的一门功课，但对于“数学是什么？”这一看来很普通的问题，却很难一下子给出一个使公众满意的回答。按照恩格斯的说法，数学是以现实世界的空间形式和数量关系为研究对象的。尽管人们现在对空间形式和数量关系的理解已经大大深化和拓展了，但作为一种哲学的概括，恩格斯的这一论断应该说并没有过时，也便于向公众表述并为公众所接受。然而，要真正深入地回答“数学是什么？”这个问题，不能仅仅从定义出发，而必须涉及数学的具体内涵，作一些比较深入的解释和说明，才能达到使人信服的效果。但是，要这样做，会常常碰到下面两个似乎难以克服的技术上的困难。

第一，数学内涵的展现离不开众多的术语、记号和公式。在公众对有关的数学内涵产生兴趣并开始有所领悟之前，很可能早已为这些术语、记号和公式搞得晕头转向甚至望而却步了。

第二，数学内涵的展现同样离不开必要的逻辑推理。推理若过分严密，很难引起公众的兴趣；但若过于粗疏，语焉不详，则又易使人不得要领。

在现在的这一本书中，看不到很多的术语、记号和公式，对有关的数学概念及内涵一律用简明而生动的语言来介绍，看似

如数家珍，娓娓道来，但举重若轻，高屋建瓴，反而更好地揭示了本质。不熟悉有关数学内容的读者，会感到茅塞顿开、豁然开朗；而已经熟悉有关内容的读者，也会有如沐春风、别开生面的感受。书中在论述极限时，用有限来刻画无限的生动而细致的处理方式，虽然本质上是经典的 ε-N(或 $\varepsilon-\delta$)数学描述的一套直观而通俗的说法，但脱离了数学记号和公式，更显得清楚和亲切，就是一个典型的范例。书中对黄金分割比是一个无理数的证明、用地图册来介绍微分流形的概念等等，都同样独具匠心，可圈可点。另一方面，作者在不便于或不需要进行严格数学推导的时候，会巧妙地绕过去，但对于必要的推导和论证，绝不偷工减料，而是不遗余力地以十分详尽的方式加以说明，一步步地将读者引向有关的结论，同时也加深了读者对逻辑论证严密性的理解。在这方面，关于数系的扩张、关于$\sqrt{2}$是无理数的证明、关于平行公设的独立性等段落，都是倾心着力撰写的。正因为作者作了如此认真的努力，这一本篇幅不大的书显得出类拔萃，应该说为现有众多的数学科普读物提供了一个楷模。能够做到这一点，而且做得如此出色，不言而喻，归根结底是和作者深厚的数学功力、对数学内涵及其精神实质的深刻理解和把握分不开的。

本书一开始就讲了数学建模，指出数学研究的对象只是有关现实世界的数学模型，同时，指出有关的数学模型并不真正是相应的现实世界，而只是它的一个近似的代表与反映。在书中作者反复强调并解释的是他的一个基本的观点：对于数学，不要问它是什么，而只要问它能做什么。这一抽象化的思考方法，将重点放在数学内部体系的相容性，强调新的数学概念、方法与

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

内容和已有的数学体系应自然地融为一体，强调要将有关的数学内容脱离其物理上的实在、变为符合一些特定规则的记号，就会更利于应用，更利于正确地理解高等的数学。作者在书中举出指数函数、圆的面积、高维空间、分数维的几何等等一系列的例子来阐明这一观点对克服难关，深入理解与拓展数学概念所带来的好处。这是很有启发性的，也是很自然的，反映了抽象思维的必要性和优越性。由于有关的数学模型虽然只是现实世界的一个近似的代表，但毕竟是一个代表，适应于它的一些规则一开始并不是凭空而来的，而是从现实世界中移植、挪用或抽象过来的，对不同的现实世界可能引入不同的规则，也会造成不同的数学对象（不满足乘法交换律的矩阵，就是一个例子）。数学与现实世界的关系，套用一句文艺界的术语，看来应该是源于生活、高于生活的关系。如果作者在强调他的上述观点及做法的同时，也能够强调，数学要真正得到原创性的重大进展，除了要密切关注及面对数学内部的矛盾运动外，还要密切关注现实世界（包括其他科学技术）对数学提出的问题和需求，努力从外部世界中汲取生动活泼、丰富多彩的营养，应努力使二者相互促进、相得益彰，是不是会更全面、更富有启发性呢？

本书的作者蒂莫西·高尔斯（Timothy Gowers）教授是 1998 年获得菲尔茨（Fields）奖的著名数学家。2000 年当我在法国巴黎访问时，因美国克雷（Clay）研究所给法国科学院院士阿兰·科纳（Alain Conne）教授颁发一个大奖，曾在法兰西学院（Collège de France）的讲演大厅里召开过颁奖会。会上获菲尔茨奖不久的蒂莫西·高尔斯教授应邀作了一个公众讲演。他在强调数学是一个整体的时候，曾说，如果把所有的数学分支按是否有联系组成一个网络，一定是一个连通的网络，而不会有一些学科，尽管

它们看来与其他分支联系很少，游离于整个数学这一大网络之外。这正像有些人有很多亲戚朋友，有些则很少，但整个社会的人群所组成的网络仍是连通的一样。他的这一观点及如此通俗易懂的说法曾给我留下了深刻的印象，从这个意义上说，我和他已有一面之缘。这次有机会看到他这一本颇具特色的数学科普著作的中译本问世，也是一件幸事，特为之序。

2013 年 12 月 25 日

前言

20 世纪初，伟大的数学家大卫·希尔伯特发现，有很多数学中的重要论点在结构上十分类似。他意识到，在适当的广义范畴下，这些论点事实上可以视为等同。与此类似的一系列发现为一个崭新的数学分支开启了大门。而这一新领域中的一个核心概念——希尔伯特空间——正是以希尔伯特的名字来命名的，这一概念使许许多多的现代数学研究变得清晰，范围之广包括了从数论直到量子力学各个分支，以至于如果你对希尔伯特空间的基本理论一无所知，你就根本不能算是一名受过良好教育的数学家。

那么，什么是希尔伯特空间呢？在典型的高校数学课程中，它被定义为“完备的内积空间”。修读这样一门课程的学生，理应从先修课程中了解到，所谓“内积空间”是指配备了内积的向量空间，而所谓“完备”是指空间中任意柯西列都收敛。当然，要想理解这样的定义，学生还必须知道“向量空间”、“内积”、“柯西列”和“收敛”的定义。就拿其中一个举例来说（这还并不是最长的一个）：序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 若满足对于任意正数 ϵ，总存在整数 N，使得对于任意大于 N 的整数 p 和 q，x_p 与 x_q 间的距离不大于 ϵ，则称这个序列为柯西列。

简言之，如果你希望了解希尔伯特空间是什么，你就必须首先学习并且消化一系列由低到高、等级分明的较低级概念。毫无疑问这需要耗费时间和精力。对于许多最重要的数学思想来说都是这样。有鉴于此，要写一本书提供对数学的简单易懂的介绍，其所能达到的目标就极为有限，更何况这本书还需要写得很短。

我没有选择用更聪明的办法绕着这个难题走，而是集中关注数学交流中另一重完全不同的障碍。这重障碍并非技术性的，而更多属于哲学性质的。它区分开了两种人：一种人乐于接受诸如无穷大、负一的平方根、第二十六维和弯曲空间这样的概念，另一类人则觉得这些概念荒诞不经。其实无须沉浸在技术细节中，依然有可能坦然接受这些思想，我将努力表明如何做到这一点。

如果说这本书要向你传达什么信息的话，那就是——我们应当学习抽象地思考，因为通过抽象地思考，许多哲学上的困难就能轻易地消除。在第二章里，我将详细说明什么是抽象的方法。第一章中则考虑我们更熟悉、与日常更相关的抽象：从现实世界的问题中提取核心特征，从而将其转化为数学问题的过程。第三章中我将讨论什么叫作“严格的证明”。这前三章是关于一般性的数学的。

之后我将讨论一些更加具体的课题。最后一章与其说是关于数学的，不如说是关于数学家的，因此会跟前几章有些不同。我建议你在读过第二章后再阅读后续章节。除此以外，这本书已经尽量做到不受先后顺序影响——在任何章节中，我并没有假定读者已经理解并记住了先前的内容。

读这本书并不需要太多的预备知识，英国 GCSE 课程[①]或同等水平即可。不过我假定读者具有一些兴趣，而不是需要靠我去大力宣扬。因此，我在书中没有用到趣闻轶事、漫画、惊叹号、搞笑的章节标题或者曼德布罗特集合[②]的图片。我同样避免了混沌理论、哥德尔定理等内容：与它们在当前数学研究中的实际影响相比，这些内容在公众的想象中所占的比例已经过大，而且其他图书已经充分地阐释了这些内容。我所选择的内容都是很普通的，详细地去讨论，以说明怎样通过一种更深刻的方式来理解它们。换言之，我的目标在深不在广，在于向读者传达主流数学的魅力，让读者体会到它的不言而喻。

感谢克雷数学研究所和普林斯顿大学在我写作此书期间对我的支持和热情接待。感谢吉尔伯特·阿代尔、丽贝卡·高尔斯、埃米莉·高尔斯、帕特里克·高尔斯、乔书亚·卡茨和埃德蒙·托马斯阅读了本书的初稿。他们非常聪明，知识丰富，实在不能算作普通读者，不过还是能够让我放心，至少某些非数学专家是能够读懂我的作品的。基于他们对此书的评论，我作出了许多改进。我把这本书献给埃米莉，希望她能够借此了解一点点我整天都在做的是些什么事情。

① 约相当于初中水平。——译注，下同

② 分形的一种。

目录

前言 1

1 模型 1

2 数与抽象 16

3 证明 35

4 极限与无穷 58

5 维度 70

6 几何 85

7 估计与近似 109

8 常见问题 122

索引 134

英文原文 139

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

List of diagrams

1 A ball in flight I 4

2 A ball in flight II 4
© PhotoDisc

3 A two-dimensional model of a gas 9

4 A primitive computer program 12

5 A graph with 10 vertices and 15 edges 15

6 White starts, and has a winning strategy 19

7 The concept of fiveness 20

8 Ways of representing 7, 12, and 47 (twice) 21

9 Dividing a circle into regions 35

10 The existence of the golden ratio 42

11 Cutting squares off rectangles 44

12 Regions of a circle 47

13 A short proof of Pythagoras' theorem 49

14 Tiling a square grid with the corners removed 50

15 A trefoil knot 53

16 Four kinds of curve 54

17 Is the black spot inside the curve or outside it? 55

18 Approximating the area of a curved shape 66

19 Archimedes' method for showing that a circle has area πr^2 68

20 Approximating a circle by a polygon 69

21 Three points in the Cartesian plane 72

22 Calculating distances using Pythagoras' theorem 73

23 A unit square and a unit cube 79

24 Dividing a square into $9 = 3^2$ smaller squares, and a cube into $27 = 3^3$ smaller cubes 83

25 Building up the Koch snowflake 84

26 Euclid's fourth axiom and two versions of the fifth 88

27 A consequence of Euclid's fifth axiom 89

28 A proof that the angles of a triangle add up to 180 degrees 89

29 The uniqueness of parallel lines 92

30 A great circle 95

31 The parallel postulate is false for spherical geometry 96

32 The phrase 'in the same direction as' does not make sense on the surface of a sphere 96

33 A tessellation of the hyperbolic plane by regular pentagons 99

34 A typical hyperbolic line 101

35 A typical hyperbolic circle, and its centre 103

36 The parallel postulate is false in the hyperbolic plane 104

37 A hyperbolic triangle 108

38 An atlas of a torus 110

The publisher and the author apologize for any errors or omissions in the above list. If contacted they will be pleased to rectify these at the earliest opportunity.

第一章

模型

扔石头问题

风轻云淡的一天，你站在水平地面上，手里拿着一块石头，想要扔得越远越好。已知你能用多大的力气扔出去，那么最重要的决策就是选择石头出手时与地面的夹角。如果夹角太小，那么尽管石头在水平方向的速度分量很大，也会很快落到地面上，因而飞不出太远；反之，若夹角过大，石头能在空中停留较久但掠过的水平距离却不远。很明显我们需要在这中间作一些权衡。

利用牛顿物理学和微积分的一些初步知识，可以计算得到最佳的折中方案——石头离手时应与地面呈 45 度夹角。就这个问题而言，这基本上是最简洁优美的答案了。同样的计算还可以告诉我们石头在空中的飞行轨迹是个抛物线，甚至还能得出脱手后在空中任意时刻的速度有多大。

看起来，科学与数学相结合能够使我们预测石块飞出去直至落地之前的一切行为。然而，只有在我们作了许多的简化假设之后才能够如此。其中最主要的假设是，作用在石头上的只有一种力，即地球的引力，而且这种力的大小及方向在各处总是一样的。但实际上并非如此，因为它忽略了空气阻力、地球自

转，也没有计入月球的微弱引力，而且越到高处地球引力越小，在地球表面上“垂直向下”的方向也随着具体位置的不同而逐渐变化。即使你能够接受上述计算，45 度角的结果也基于另一个隐含假设：石头离手的初始速度与夹角无关。这也是不正确的：实际上夹角越小，人能使上的力气越大。

上述这些缺陷的重要性各有不同，我们在计算和预测中应该采取怎样的态度来对待这些偏差呢？把所有因素全部考虑在内进行计算固然是一种办法，但还有一种远为明智的办法：首先决定你需要达到什么样的精确度，然后用尽可能简单的办法达到它。如果经验表明一项简化的假设只会对结果产生微不足道的影响，那就应当采取这样的假设。

例如，空气阻力的影响相对来说是比较小的，因为石头很小很硬，密度大。假如在出手角度上有较大的误差，那么通过计入空气阻力来将计算复杂化就没有多大意义。如果一定要考虑进去的话，以下这条经验法则就足矣：空气阻力变大，则通过减小出手角度来弥补。

何为数学模型

当我们考察一个物理问题的解答时，十有八九能够就其中科学贡献部分和数学贡献部分划出一道清晰的界线。科学家在观察和实验的基础上，作一些简洁性与解释有效性的一般性考虑，建立一种理论。数学家，或者做数学的科学家，则研究理论的纯粹逻辑结果。有时候，这些情形是常规计算的结果，常规计算所预言的现象正是理论在提出时所要解释的。在某些偶然的情况下，理论所作出的预言则完全出乎意料。如果这些意料之外的现象后来被实验所证实，那么我们就得到了支持这种理论

的重要证据。

然而，由于我上面所讨论到的简化问题，“证实一项科学预言”的概念就多多少少有了些问题。让我们考虑另一个例子：牛顿的运动定律和引力定律告诉我们，两个物体从同样的高度开始作自由落体运动，它们将同时到达地面（如果地面平坦）。这种现象由伽利略首先提出，它有点违背我们的直觉。实际上，它违背的不仅是我们的直觉：如果你亲自试一试，比方说用高尔夫球和乒乓球，你会发现高尔夫球首先落地。既然如此，究竟在什么意义上伽利略的论断是正确的呢？

当然，由于空气阻力的存在，我们不可能把这个小实验当作伽利略理论的反例：实验证明，当空气阻力很小时理论是正确的。如果你对此有所怀疑，觉得空气阻力实在稀松平常，怎能总是挽救牛顿力学的预测于失败之际，那么，找个机会去观察一下羽毛在真空中的下落，你就能重拾对科学的信念以及对伽利略的赞赏——真空中，羽毛的下落的确与石头别无二致。

尽管如此，由于科学观察永远不是完全直接性和决定性的，我们仍需要一种更好的方式来描述科学与数学之间的关系。数学家并不是将科学理论直接应用于现实世界中，而是应用于**模型**上。在这里，模型可以看作是所要研究的那部分现实世界的一种虚构、简化的版本。在模型里，我们就有可能进行完全精确的计算。在扔石头的例子中，现实世界与模型的关系正如同图 1 和图 2 所展示的那样。

对于一种给定的物理情形，有多种方法将其模型化。我们需要结合切近的经验与深入的理论考量来决定，哪种模型更有可能向我们透露世界的本真。选择模型时，有一个需要优先考虑的因素，即模型的行为应当与实际中观察到的行为密切对应。

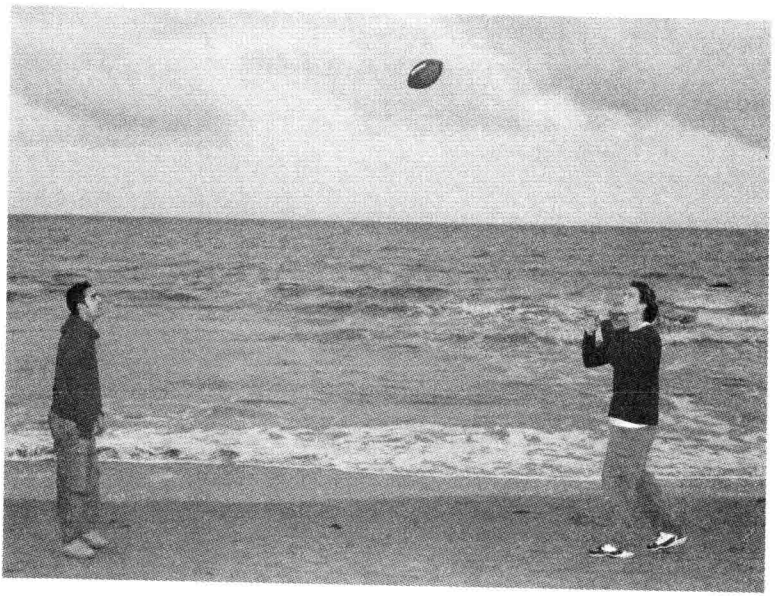

图 1　飞行中的球甲

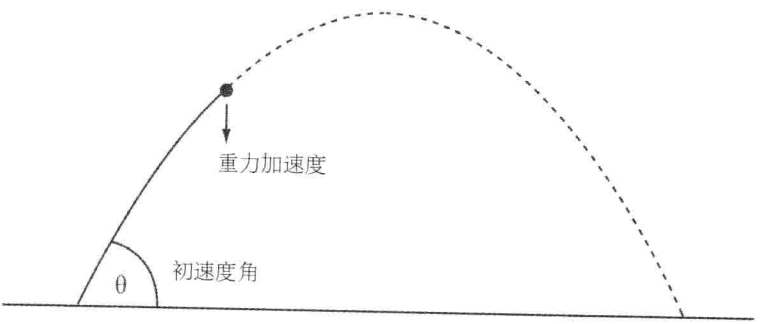

图 2　飞行中的球乙

但是，诸如简洁、数学表达上的优雅等其他因素可能反而时常会更重要一些。实际上，确实有一些模型在现实世界中几乎找不到任何相似之物，但同时却非常有用。接下来有一些例子将会对此进行说明。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com