数学物理方法的理论和习题

陆立柱　编著

兵器工业出版社

数学物理方法的理论和习题

陆立柱　编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书包括复变函数、数学物理方程和特殊函数的基本理论和方法，分为十二章。每章内容由“基本知识”、“解题指导”和“例题解答”三部分组成。“基本知识”部分，对基本理论和方法进行概括和总结；“解题指导”部分，对解题思想、解题方法提出指导意见，指出正确理解和应用基本知识的原则；而“例题解答”这一部分，通过对例题的分析和解答过程加深对所学知识的理解，介绍正确应用和灵活应用基本知识的方法。

本书的主要特点是：语言叙述清楚，基本知识条理、准确，例题丰富，解答详尽正确，密切联系师范专科学校物理专业的教学实际。

本书主要对象是师范专科学校物理专业的学生，同时兼顾其他读者的需要。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法的理论和习题／陆立柱编著．—北京：兵器工业出版社，1998
ISBN 7-80132-456-0

Ⅰ．数…　Ⅱ．陆…　Ⅲ．数学物理方法-师范学校：高等学校-教材　Ⅳ．0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06097 号

兵器工业出版社 出版发行
（邮编：100081　北京市海淀区车道沟 10 号）
各地新华书店经销
华北工学院印刷厂印装
*
开本：787×1092　1/16　印张：14.5　字数：358 千字
1998 年 4 月第 1 版　1998 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—1000 册　定价：19.50 元

序

《数学物理方法》不仅是理工科大学物理专业的基础课，也是师范院校物理专业的一门重要的基础课。基于这门课程在高等学校理科物理专业中的重要地位，在国家教委高等学校理科物理学教学指导委员会的指导下，多年前成立了高校数学物理方法研讨会，并且此后每两年召开一次年会，我们就是在这年会上与陆立柱老师相识的。在陆立柱老师编著的《数学物理方法的理论和习题》一书出版之际，我们作序表示庆贺。

数学物理方法课程不仅注重如何从物理内容归结成数学问题以及对数学结果作出物理解释，而且注重数学理论的应用，弄清数学条件，掌握解题方法是这门课程教学的核心。无论是用数学语言描述物理问题还是用数学方法解决物理问题，都具有相当的难度，也是学习该课程感到困难的主要问题所在。《数学物理方法的理论和习题》是陆立柱老师多年从事《数学物理方法》教学实践基础上编写的一本具有一定科学性和实用性的著作，本书选材恰当，编排合理，文字清晰，叙述准确，密切结合师范专科学校物理专业的教学实际。我们相信，本书的出版对于提高学生学习效率，活跃学生思想，在有限的学时内完成数学物理方法的教学，提高教学质量必定起到积极作用。

本书不仅适用于师范专科学校，对于综合性大学、工科院校和师范本科的《数学物理方法》教学也是一本有益的参考书。

复旦大学物理系教授　陆全康
复旦大学物理系教授　胡嗣柱
1998 年 4 月于复旦大学

前　　言

《数学物理方法》是物理专业的专业基础课程。它是高等数学和普通物理学的后继课程，同时又是学习理论物理学所必需的基础课程。因而，《数学物理方法》在物理专业中具有承前启后的地位。对于学习理论物理学来说，仅仅具备高等数学和普通物理学的知识是不够的，数学物理方法成为必须掌握的数学工具。

对于师专物理专业来说，《数学物理方法》以复变函数、数学物理方程和特殊函数的基本知识作为主要内容。《数学物理方法》与高等数学和普通物理学联系密切，它的显著特点是既讲数学又讲物理，具体地说就是介绍研究物理问题的数学方法。无论是用数学语言描述物理问题还是用数学方法解决物理问题，都具有相当的难度，并且解题时计算工作量大。因此，在这门课程的学习中，“理解难”、“做题难”成为普遍现象。为改善这种状况，提高学习效率，笔者在总结多年从事数学物理方法课程教学经验的基础上，密切联系师范专科学校物理专业的教学实际，吸取著名教材和参考书之所长，编写了《数学物理方法的理论和习题》一书。

本书包括复变函数、数学物理方程和特殊函数，分为十二章。每章内容由“基本知识”、“解题指导”和“例题解答”三部分组成。“基本知识”部分，对基本理论和方法进行概括和总结；“解题指导”部分，对解题思想、解题方法提出指导意见，指出正确理解和应用基本知识的原则；而“例题解答”部分，则通过对例题的分析和解答过程加深对所学知识的理解，介绍正确应用和灵活应用基本知识的方法。期望活跃学生思想，能够触类旁通、举一反三，从而改善“理解难”特别是“做题难”的现状，提高学习效率。

本书的主要特点是：语言叙述清楚，基本知识条理、准确，例题丰富、解答详尽正确，密切联系师范专科学校物理专业的教学需要。

本书初稿完成后，复旦大学物理系胡嗣柱教授审阅全稿并提出宝贵意见，复旦大学物理系陆全康教授与胡嗣柱教授共同为本书作序，本书写作期间得到山西大学物理系郭本宏副教授的关心，为此，作者致以衷心的感谢。

作　者

目　　录

第一章　复数及平面点集

1.1 基本知识

1.1.1 复数基本概念

(1) 复数的定义

复数定义为满足一定运算法则的一对有序实数。复数用字母 z 来表示。

(2) 复数的代数表示式

复数最基本的表示形式是代数表示式(简称代数式)：

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad (x, y \text{ 都是实数}) \tag{1.1}$$

其中，x 叫做复数 z 的实部，记作 $x = \operatorname{Re} z$；而 y 叫做复数 z 的虚部，记作 $y = \operatorname{Im} z$。

(3) 复数的基本性质

① 所谓两个复数相等，指的是它们的实部、虚部分别对应相等；

② 一个复数等于零，指的是它的实部、虚部同时为零；

③ 复数不能比较大小。

(4) 共轭复数

定义复数 $x - \mathrm{i}y$ 为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数，记作 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$。由此可知：复数 $x + \mathrm{i}y$ 也是复数 $\bar{z}$ 的共轭复数。因此，复数 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭复数。共轭复数具有下列性质：

① $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$　　② $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$　　③ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$　　④ $\bar{\bar{z}} = z$

⑤ $z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$　　⑥ $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$，　$z - \bar{z} = 2\operatorname{Im} z$.

1.1.2 复数的其它表示法

(1) 复数的几何表示法

引入复平面(也叫做 z 平面)后，复数有几何表示法。一种是点表示法，复数 z 与 z 平面上的点 $z(x,y)$ 建立了一一对应的关系。另一种是向量表示法，复数 z 还能与向量 $\boldsymbol{r}$ 建立一一对应的关系(如图 1－1)。其中，向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度 r 叫做复数 z 的模，记作

$$|z| = r$$

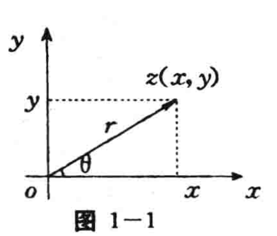

图 1－1

向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 叫做复数的幅角，记作 $\theta = \operatorname{Arg} z$。又把幅角的主值记作 $\theta_0 = \arg z(-\pi < \theta_0 \leqslant \pi)$。模与幅角的计算公式：

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

其中(当 $z \neq 0$ 时)，幅角主值 $\arg z$ 的计算公式如下：

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & (\text{当 } z \text{ 在第一、四象限时}) \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & (\text{当 } z \text{ 在第二象限时}) \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi & (\text{当 } z \text{ 在第三象限时}) \end{cases} \tag{1.2}$$

(2) 复数的三角式和指数式

引入复数的几何表示法后，应用极坐标(r,θ)可得到复数的三角表示式（简称为三角式）：

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.3}$$

由此使用欧勒公式$e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，得到复数的指数表示式（简称为指数式）：

$$z = re^{i\theta} \tag{1.4}$$

(3) 复球面与无穷远点($z = \infty$)

在复平面上方作一个任意半径的球面与平面上的坐标原点相切。从原点引一条垂直于平面的直线与球面相交于点N，点N叫做球极。作连接N点与平面上任一点A的直线，该直线与球面的交点A'。把A'叫做点A在球面上的球极投影。这样，复平面上的点与球面上除了N点以外的点建立了一一对应的关系，即复数与球面上N点之外的点之间建立了一一对应的关系（如图1－2）。而且，由球极射影的定义可知，一个复数的模越大，它的球极射影越接近于点N。由于球面上只有一个球极，我们约定在复平面上有一个理想的点，称为无穷远点，记作$z = \infty$，它的球极射影为N。无穷远点及N分别可以看作一个新引进的非正常复数$z = \infty$在复平面及球面上的几何表示。复平面加上无穷远点叫做扩充了的复平面。于是这个球面与扩充了的复平面上的点之间建立了一一对应的关系，这样的球面叫做复球面。

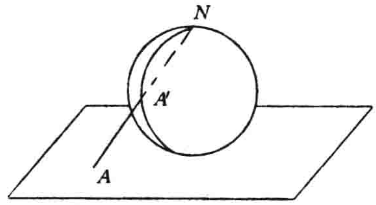

图 1－2

对于复数$z=\infty$，它的实部、虚部及幅角都没有意义，至于它的模则约定为∞。而对于任何有限复数z，即$|z| < \infty$的复数。我们引入下列运算的意义：设α是有限复数，则有

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty,\quad \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty,\quad \frac{\alpha}{0} = \infty(\alpha \neq 0),\quad \frac{\alpha}{\infty} = 0$$

但是运算$\infty \pm \infty$、$0 \cdot \infty$、$\frac{0}{0}$以及$\frac{\infty}{\infty}$没有意义。

1.1.3 复数的运算

(1) 复数的代数运算

设有两个复数$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$、$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，定义下列运算。

① 两个复数的加法：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.5}$$

② 两个复数的减法：

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.6}$$

③ 两个复数的乘法：

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}\,y_1)\cdot(x_2 + \mathrm{i}\,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 + x_1y_2) \tag{1.7}$$

④ 两个复数的除法：复数z_1除以复数z_2的商z定义为满足$z_2z = z_1(z_2 \neq 0)$的复数，即

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.8}$$

(2) 复数满足下列运算规律

① $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (1.9)

② $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (1.10)

③ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (1.11)

④ $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ (1.12)

(3) 复数的模与幅角的定理

使用复数的三角式 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，可得到下面的运算法则，叫做模与幅角的定理。

① 乘法法则：设有 n 个复数 $z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k)$，$(k = 1,2,\cdots,n)$，它们的积为：

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \end{aligned} \tag{1.13}$$

② 除法法则：设复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则复数 z_1 除以 z_2 的商是复数 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$，运算法则是：

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] \tag{1.14}$$

③ 乘方运算：设复数 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则复数 z 的 n 次方为 z^n（n 为正整数），运算法则是：

$$z = z^n = [r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.15}$$

当 $r = 1$ 时，便得到棣美弗公式：$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$。此外，规定

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + \mathrm{i}\sin(-n\theta)] \tag{1.16}$$

这里 $n = 1,2,3,\cdots$ 以及 $z^0 = 1$。这样就得到

$$z^m = |z|^m(\cos m\theta + \mathrm{i}\sin m\theta) \quad (m = 0, \pm 1,\cdots) \tag{1.17}$$

④ 开方运算：定义 $W = \sqrt[n]{z}\,(n \geqslant 2)$ 为 z 的 n 次方根，则

$$W = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.18}$$

应当注意：尽管 $\sqrt[n]{z}$ 有无数个值，但是幅角的周期性使其中只有 n 个不同的值，只须取 $k = 0, 1,2,\cdots,n-1$ 即可，因为从 $k = n$ 起出现的值与 $k = 0$ 到 $k = n-1$ 的值重复出现的缘故。

1.1.4 平面点集的初步知识

(1) 点 z_0 的邻域

在 z 平面上，由不等式 $|z - z_0| < \delta(\delta > 0)$ 确定的平面点集，它是一个以 z_0 为圆心、δ 为半径的圆的内部，叫做点 z_0 的 δ 邻域。

(2) 平面点集 E 的内点、外点和界点

① 内点：如果点 z_0 属于平面点集 E，并且点 z_0 的某个邻域属于 E，则称 z_0 是 E 的内点；若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集。

② 外点：设 E 为一个点集，若点 z_0 的某一邻域不包含 E 的任何一点，则称点 z_0 是 E 的外点。

③ 界点：设 E 为一个点集，若点 z_0 的任何邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称点 z_0 是 E 的界点。

(3) 区域、单连域和复连域

① 区域：如果平面点集 G 是一个开集，且 G 内任何两点都能用一条全部属于 G 的折线相连，则称 G 是一个区域。若 G 不包含它的界点，则称为开区域；区域 G 的界点的全体叫做 G 的边界，用 C 表示，由区域 G 及其边界 C 所组成的点集叫做闭区域，用 $\overline{G}$ 表示：$\overline{G} = G + C$。

② 区域边界的正方向：当观察者沿区域 G 的边界 C 前进时，若区域 G 始终在观察者的左方，则规定这个方向为边界 C 的正方向，否则为逆方向。

③ 单连域和复连域：如果属于区域 G 的任何一条简单闭曲线所围的全部点都属于 G，则称

G 为单连通区域(简称为单连域),否则称为复连通区域(简称为复连域)。

④ 复连域转变为单连域:如果在复连域内引入某些直线作为附加边界,使得内部一些边界与外部边界连通,则复连域就转变为单连域。

1.2 解题指导

在进行复数运算时,应当注意以下几点:

(1) 复数的代数式、三角式和指数式及其互换,复数的实部、虚部、模与幅角的计算。

(2) 正确选择代数式、三角式或指数式可简化运算;使用共轭复数的性质也可简化运算。

(3) 应用"模与幅角的定理"进行计算时,要特别注意确定幅角主值。

(4) 根据复数 z 所满足的等式求点 z 的轨迹时,通常应用代数式求得关于 x,y 的方程,从而得到点 z 的轨迹。

(5) 确定满足某种条件的 z 的点集,通常使用 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 代入所给条件,从而得到关于 x,y 的不等式(不等式组)或 r,θ 的不等式(不等式组),由此确定点集是何种区域。

1.3 例题解答

例 1.1 求复数 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部和虚部。

解:求所给复数的实部、虚部,通常是通过复数运算求出该复数的代数式。令 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\frac{z+2}{z-1}=\frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}=\frac{[(x+2)+\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}{[(x-1)+\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}$$

$$=\frac{(x^2+x-2+y^2)-\mathrm{i}3y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{(x^2+x-2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

所以

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=-\frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例 1.2 求复数 $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$ 的实部、虚部、模和幅角。

解:求所给复数的实部、虚部、模与幅角,通常是先通过复数运算求出该复数的代数式,从而确定它的实部、虚部,然后根据已求出的实部、虚部,计算出模与幅角。在本题中

$$z=\frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}-\frac{-5\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(-5\mathrm{i})5\mathrm{i}}=\frac{16}{25}+\mathrm{i}\frac{8}{25}$$

所以

$$\mathrm{Re}z=\frac{16}{25},\quad \mathrm{Im}z=\frac{8}{25}$$

由此,容易算出它的模与幅角分别是:

$$|z|=\frac{8\sqrt{5}}{25},\quad \mathrm{Arg}z=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2k\pi\quad(k=0、\pm1、\pm2,\cdots)$$

例 1.3 计算 $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ 的值。

解:在进行复数开方运算时,要使用"模与幅角的定理",首先把被开方数化为三角式。由于 $|\mathrm{i}|=1$, $\arg\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}$,所以复数 i 的三角式为

$$\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

令 $W=\sqrt[3]{\mathrm{i}}$，则根据复数开方的运算法则，有

$$W=\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\right)\qquad(k=0,1,2)$$

即

$$W_1=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}$$

$$W_2=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}$$

~~b= sin φ + sin~~

$$W_3=\left(\cos\frac{9\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{6}\right)=-\mathrm{i}$$

例 1.4 计算下列各式的值：

(1) $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$；　(2) $\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$

解：单独计算上列两式中的任何一个将导致繁冗的运算，为简化运算，注意到公式

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$$

考虑把上列两式一并计算。令

$$a=\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi,\quad b=\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$$

则有

$$\begin{aligned}W&=a+\mathrm{i}b\\&=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos2\varphi+\mathrm{i}\sin2\varphi)+(\cos3\varphi+\mathrm{i}\sin3\varphi)+\cdots+(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)\\&=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^2+(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^3+\cdots+(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\varphi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\qquad①\end{aligned}$$

由此得到：

$$W\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\varphi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}\qquad②$$

用 ② 式减去 ① 式，则得到

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-1)W=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

从而得到

$$\begin{aligned}W&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})\varphi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})\varphi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}}\\&=\frac{\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+\mathrm{i}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)-\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2\,\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}\\&=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}+\mathrm{i}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\end{aligned}$$

即

$$a+\mathrm{i}b=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}+\mathrm{i}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

由复数相等的定义知

$$a=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},\qquad b=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

因而求出

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

例 1.5 设$\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}=a+\mathrm{i}b$，证明$a^2+b^2=1$。

证明：注意到本题的特点：$x+\mathrm{i}y$与$x-\mathrm{i}y$是共轭复数，而共轭复数$x+\mathrm{i}y$与$x-\mathrm{i}y$的模相等，并且$a^2+b^2=|a+\mathrm{i}b|^2$。因而

$$a^2+b^2=|a+\mathrm{i}b|^2=\left|\frac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}\right|^2=\frac{|x-\mathrm{i}y|^2}{|x+\mathrm{i}y|^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

例 1.6 写出下列复数的其它形式(代数式、三角式或指数式)。

(1) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (2) 1 (3) $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ (4) $1-\cos a+\mathrm{i}\sin a$ (a为实常数)

解：(1) 由复数的除法，可以求得

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}=0+(-1)\cdot\mathrm{i}$$

这就是复数$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$的代数式，由此可知它的模

$$\left|\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=|0+(-1)\cdot\mathrm{i}|=1$$

而幅角的主值$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，因而它的三角式为$\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，指数式为$e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$。

(2) 实数 1 用复数的代数式可表示为

$$1=1+0\cdot\mathrm{i}$$

它的模是 1，幅角主值$\theta=0$。因而它的三角式是$\cos0+\mathrm{i}\sin0$，指数式是$e^{\mathrm{i}0}$。

(3) 令$z=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$，则它的模

$$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

又因为这个复数位于第一象限，幅角的主值为

$$\theta_0=\operatorname{agr}z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{1}=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$$

从而这个复数的三角式为

$$z=\sqrt{3}\left[\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{2})+\mathrm{i}\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{2})\right]$$

而它的指数式为

$$z=\sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\operatorname{arctg}\sqrt{2}}$$

(4) 令$z=1-\cos a+\mathrm{i}\sin a$，由于$a$是实常数，所以

$$\operatorname{Re}z=1-\cos a,\quad \operatorname{Im}z=\sin a$$

因而

$$|z| = \sqrt{(1-\cos a)^2 + \sin^2 a} = 2\sin\frac{a}{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sin a}{1-\cos a} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\right)$$

于是这个复数的三角式为：

$$z = 2\sin\frac{a}{2}\left\{\cos\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\right)\right] + \mathrm{i}\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\right)\right]\right\}$$

它的指数式为：

$$z = 2\sin\frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\right)}$$

例 1.7 确定满足下列条件的 z 的几何轨迹：

(1) $|z+5| - |z-5| = 6$　　(2) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 2$

解：(1) 在 $|z+5| - |z-5| = 6$ 中，令 $z = x + \mathrm{i}y$，则原式成为：

$$|(x+5) + \mathrm{i}y| - |(x-5) + \mathrm{i}y| = 6$$

即

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 6$$

化简后得到双曲线方程：

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

注意到 $|z+5| - |z-5| = 6$，它的几何轨迹是上述双曲线 $x \geqslant 3$ 的那一支。

(2) 在 $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 2$ 中，令 $z = x + \mathrm{i}y$，则原式成为：

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\right) = 2$$

为求出实部，做如下运算

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 2$$

由此求出：

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 2$$

化简后成为：

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

因而，满足方程 $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 2$ 的 z 的几何轨迹是圆心在 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$，半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆周。

例 1.8 指出满足下列条件的 z 的点集是何种区域：

(1) $|z| \leqslant 3$，且 $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$；　(2) $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$；　(3) $|z| + \operatorname{Re} z \leqslant 1$。

解：(1) 在 $\begin{cases} |z| \leqslant 3 \\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 中，注意到不等式中出现的是复数的模与幅角，因此使用复数的三角式较为简便。令 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则有 $r = |z|$，$\theta = \arg z$，从而得到 r、θ 所满足的不等式：

$$\begin{cases} r \leqslant 3 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

这是圆心在坐标原点、半径为3的圆周与射线$\theta = 0$、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$围成的扇形区域，是一个有界的单连通闭区域。

(2) 在$\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$中，出现的是复数$z$的虚部、实部的表达式，因而使用复数的代数式较为简便，因此令$z = x + \mathrm{i}y$，则有

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + \mathrm{i}y) = y$$

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + \mathrm{i}y) = x$$

从而由已知条件$\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$，可以得到

$$y < x$$

这是直线$y = x$右上方的半平面(不包含直线$y = x$)，是一个无界的单连域。

(3) 在$|z| + \operatorname{Re} z \leqslant 1$中，既出现有$z$的模，又出现有$z$的实部，在这种情形下，选择复数的代数式进行运算比较简单，因此令$z = x + \mathrm{i}y$，则原式成为：

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{Re}(x + \mathrm{i}y) \leqslant 1$$

即

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x \leqslant 1$$

化简后成为：

$$y^2 \leqslant 1 - 2x$$

这是抛物线　$y^2 = 1 - 2x$及其内部，是一个无界的单连域。

第二章　复变函数

2.1 基本知识

2.1.1 复变函数

(1) 复变函数的定义

设 D 是复平面上的一个区域，如果对于 D 内的每一个点 z，按照某一规律有一个或多个复数 W 与之对应，则称 W 为 z 的复变函数，记作 $W=f(z)$，并且把 D 叫做函数的定义域，把 z 叫做复变数(也叫做函数的宗量)。如果对于一个 z，只有一个复数 W 与之对应，则称 W 是 z 的单值函数；否则称作多值函数。

(2) 一个复变函数与两个二元实函数等价

在复变函数 $W=f(z)$ 中，令 $z=x+\mathrm{i}y$，则有

$$W=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{2.1}$$

其中，$u(x,y)$、$v(x,y)$ 分别是函数 W 的实部、虚部，它们都是二元实函数。

(3) 复变函数的几何表示·映射概念

对于复变函数 $W=f(z)$ 来说，宗量 z 一般是在平面上变动，相应的 W 也在平面上取值。这样一来，在同一张复平面上的某个区域内既有 z 的值，又有 W 的值，混淆在一起。为了克服这个缺陷，通常的作法是这样的：取两个复平面，分别叫做 z 平面与 W 平面。当宗量在 z 平面上的某一区域 G 内连续取值时，把与 z 相应的 W 值表示在 W 平面上，构成一个集合 G^*。我们说，z 平面上的点集 G，经过 $W=f(z)$ 映射到 W 平面上的点集 G^*，记作 $G^*=f(G)$。z 平面上的点 z_0 经过 $W=f(z)$ 映射为 W 平面上的点 W_0，并称 W_0 是 z_0 的像，而把 z_0 叫做 W_0 的原像(如图 2－1 所示)。由此可知，映射就是复变函数的几何表示。

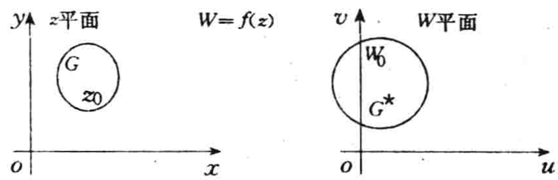

图 2－1

2.1.2 复变函数的极限与连续

(1) 复变函数的极限

设复变函数 $W=f(z)$ 定义在点 z_0 的某个邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，若存在一个确定的复数 W_0，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总有相应的 $\delta(\varepsilon)>0\,(0<\delta(\varepsilon)<\rho)$ 存在，使得满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta<\rho$ 的所有的 z，不等式

$$|f(z)-W_0|<\varepsilon \tag{2.2}$$

恒成立，则说 W_0 是函数 $f(z)$ 在 $z\to z_0$ 时的极限。记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=W_0 \tag{2.3}$$

应当注意：

① 这个定义表示由 z 平面到 W 平面的映射。