

普通高级中学实验教科书(信息技术整合本)

nCr(9,4)+nCr(9,5) 252
nCr(10,5) 252
nCr(5,6)+nCr(5,7) 252
nCr(14,7) 252

nCr(22,12) 252
nCr(22,13) 252
nCr(22,14) 252

数学

第二册(下B)

人民教育出版社中学数学室 编著



人民教育出版社

普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）

数学

第二册（下B）

人民教育出版社中学数学室 编著

东北师范大学图书馆
藏书



01421436

人民教育出版社

(京)新出图证字第101号 (新)出图证字第101号

普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）

数学 第二册（下 B）

人民教育出版社 中学数学室 编著

普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）

数 学

第二册（下 B）

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编：100009)

网址：<http://www.pep.com.cn>

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 194 毫米 1/16 印张：11.75 字数：160 000

2003 年 12 月第 1 版 2004 年 12 月第 2 次印刷

印数：4 001 ~ 12 000

ISBN 7-107-17354-5 定价：12.60 元
G · 10444 (课)

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换。

(联系地址：北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼 邮编：100078)

说 明

《普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）·数学》是在《全日制普通高级中学教科书·数学》的基础上改编的。编写的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”和“科教兴国”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义的建设者和接班人的方针，全面推进素质教育，促进教育改革，提高教育质量。

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育，担负着为高一级学校和社会输送素质良好的合格毕业生的任务。本套实验教科书的教学内容与《全日制普通高级中学教科书·数学》相当，编排体例基本相同。但在素材的选择上作了较大的改进，教学要求也略有提高。改编的重点旨在通过数学课程教材与信息技术的整合，激发学生的数学学习兴趣；提高学生的数学基础知识、基本技能和数学能力；推进信息技术在数学教学过程中的普遍应用；提高学生的信息素养，培养学生使用信息技术的能力；促进学生从数学的角度发现、提出、探究和解决问题的能力；提高学生的数学表达和交流的能力；培养学生的创新精神和实践能力，促进学生全面发展。

数学课程教材与信息技术整合的目标是，通过信息技术在课堂教学中的使用，改变数学课堂教学结构，改进数学学习方式。在数学教学中，使用信息技术应当注意以下问题：

1. 必要性。信息技术应当为数学的学与教服务。信息技术的使用不是要替代传统的教学工作，而是要发挥信息技术的力量，做过去不能做或做得不好的工作，更好地组织和管理教学资源，构建交互式、多样性的学习环境，更好地引导学生学习，加强数学的基本理解和数学直觉。
2. 平衡性。信息技术的使用为学生学更多、更深的数学提供了可能，也为学生更好地理解和应用数学开拓了广阔空间。但是，它不能被用来代替基本的数学活动，如熟练的基本运算、基本的代数变换、解方程、逻辑推理、数学证明等。应当使信息技术的使用与传统的纸笔运算、逻辑推理、画表作图之间达到一种平衡。
3. 实践性。信息技术为数学教学提供的学习环境，极大地拓展了师生的实践活动空间，它使学生通过丰富的活动构建对知识的理解，产生更多的学习方式。信息技术的使用应当强调学生的实践活动，让他们在信息技术的帮助下，通过自己的亲身实践，获得对数学知识的深刻理解，体验数学思想方法的真谛，领悟数学的本质，使“学习方式的变革”落在实处。
4. 实效性。信息技术为教学提供了一种直接操作的环境，在这种环境里，抽象的数学概念和关系是“可视的”，可以具体操作。但是，由于很多人对信息技术，特别是计算机的软、硬件环境不熟悉，信息技术的这种优势得不到充分发挥。因此，信息技术应用于数学教学应当做到简单、方便、实用，讲求实际效果，在技术的设计、实现和操作上减少困难。
5. 广泛性。数学课程与信息技术整合的主要目的是丰富学生的数学学习，促使学生利用信息技术进行主动、有效的数学学习。应当使所有学生在自己的数学学习中使用信息技术。应当根据

不同的教学任务，选择适当的信息技术工具，如计算器、计算机、多媒体实验室以及互联网等，使学生充分发挥视觉、听觉、触觉等多种感官的协同作用，更有效地进行数学学习。

《普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）·数学》（以下简称《数学》）包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，每周4课时。

这套书的第二册又分为上、下两个分册，分别供高二上、下两个学期使用。本书是《数学》第二册（下B），内容包括直线、平面、简单几何体，排列、组合和二项式定理，概率三章。

全套书在体例上有如下特点：

1. 每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导入，使学生初步了解学习这一章的必要性。
2. 在适宜于用信息技术进行探究和学习的地方均给出“用图形计算器或计算机”的提示，提醒学生使用信息技术进行学习。
3. 书中习题共分三类：练习、习题和复习参考题。

练习 以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用。

习题 每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有“*”号的题目在难度上略有提高，供学有余力的同学选用。

习题的后面一般配有一个“数学实验”，此栏目是专门为使用信息技术进行探究性学习设置的。

复习参考题 每章最后配有复习参考题，分A、B两组，A组题属于基本要求范围，供复习全章使用；B组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用。

4. 每章的内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考。

5. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，目的是渗透数学文化，扩大知识面，激发数学学习兴趣，培养应用数学的意识。

参加《全日制普通高级中学教科书·数学》第二册（下B）编写的有高存明、李海东、饶汉昌、左怀玲等。

参加本次改编的有侯立伟、桂思铭、白涛、郭慧清、陶维林、章建跃、张劲松、李海东、张振国、方明一、徐勇、康杰等，责任编辑为李海东，审稿为章建跃。

人民教育出版社中学数学室

2003年12月

如有印装质量问题，请到当地新华书店联系调换。凡属教学用书，不得擅自复印。如确需复印，须经人民教育出版社同意，并交纳一定费用。

人民教育出版社教材中心 地址：北京朝阳区西坝河街19号 邮政编码：100029

电话：(010)51024341 51024342 51024343 51024344 51024345 51024346 51024347 51024348 51024349 51024350 51024351 51024352 51024353 51024354 51024355 51024356 51024357 51024358 51024359 51024360 51024361 51024362 51024363 51024364 51024365 51024366 51024367 51024368 51024369 51024370 51024371 51024372 51024373 51024374 51024375 51024376 51024377 51024378 51024379 51024380 51024381 51024382 51024383 51024384 51024385 51024386 51024387 51024388 51024389 51024390 51024391 51024392 51024393 51024394 51024395 51024396 51024397 51024398 51024399 51024400 51024401 51024402 51024403 51024404 51024405 51024406 51024407 51024408 51024409 51024410 51024411 51024412 51024413 51024414 51024415 51024416 51024417 51024418 51024419 51024420 51024421 51024422 51024423 51024424 51024425 51024426 51024427 51024428 51024429 51024430 51024431 51024432 51024433 51024434 51024435 51024436 51024437 51024438 51024439 51024440 51024441 51024442 51024443 51024444 51024445 51024446 51024447 51024448 51024449 51024450 51024451 51024452 51024453 51024454 51024455 51024456 51024457 51024458 51024459 51024460 51024461 51024462 51024463 51024464 51024465 51024466 51024467 51024468 51024469 51024470 51024471 51024472 51024473 51024474 51024475 51024476 51024477 51024478 51024479 51024480 51024481 51024482 51024483 51024484 51024485 51024486 51024487 51024488 51024489 51024490 51024491 51024492 51024493 51024494 51024495 51024496 51024497 51024498 51024499 51024500 51024501 51024502 51024503 51024504 51024505 51024506 51024507 51024508 51024509 51024510 51024511 51024512 51024513 51024514 51024515 51024516 51024517 51024518 51024519 51024520 51024521 51024522 51024523 51024524 51024525 51024526 51024527 51024528 51024529 51024530 51024531 51024532 51024533 51024534 51024535 51024536 51024537 51024538 51024539 51024540 51024541 51024542 51024543 51024544 51024545 51024546 51024547 51024548 51024549 51024550 51024551 51024552 51024553 51024554 51024555 51024556 51024557 51024558 51024559 51024560 51024561 51024562 51024563 51024564 51024565 51024566 51024567 51024568 51024569 51024570 51024571 51024572 51024573 51024574 51024575 51024576 51024577 51024578 51024579 51024580 51024581 51024582 51024583 51024584 51024585 51024586 51024587 51024588 51024589 51024590 51024591 51024592 51024593 51024594 51024595 51024596 51024597 51024598 51024599 51024600 51024601 51024602 51024603 51024604 51024605 51024606 51024607 51024608 51024609 51024610 51024611 51024612 51024613 51024614 51024615 51024616 51024617 51024618 51024619 51024620 51024621 51024622 51024623 51024624 51024625 51024626 51024627 51024628 51024629 51024630 51024631 51024632 51024633 51024634 51024635 51024636 51024637 51024638 51024639 51024640 51024641 51024642 51024643 51024644 51024645 51024646 51024647 51024648 51024649 51024650 51024651 51024652 51024653 51024654 51024655 51024656 51024657 51024658 51024659 51024660 51024661 51024662 51024663 51024664 51024665 51024666 51024667 51024668 51024669 51024670 51024671 51024672 51024673 51024674 51024675 51024676 51024677 51024678 51024679 51024680 51024681 51024682 51024683 51024684 51024685 51024686 51024687 51024688 51024689 51024690 51024691 51024692 51024693 51024694 51024695 51024696 51024697 51024698 51024699 51024700 51024701 51024702 51024703 51024704 51024705 51024706 51024707 51024708 51024709 51024710 51024711 51024712 51024713 51024714 51024715 51024716 51024717 51024718 51024719 51024720 51024721 51024722 51024723 51024724 51024725 51024726 51024727 51024728 51024729 51024730 51024731 51024732 51024733 51024734 51024735 51024736 51024737 51024738 51024739 51024740 51024741 51024742 51024743 51024744 51024745 51024746 51024747 51024748 51024749 51024750 51024751 51024752 51024753 51024754 51024755 51024756 51024757 51024758 51024759 51024760 51024761 51024762 51024763 51024764 51024765 51024766 51024767 51024768 51024769 51024770 51024771 51024772 51024773 51024774 51024775 51024776 51024777 51024778 51024779 51024780 51024781 51024782 51024783 51024784 51024785 51024786 51024787 51024788 51024789 51024790 51024791 51024792 51024793 51024794 51024795 51024796 51024797 51024798 51024799 51024800 51024801 51024802 51024803 51024804 51024805 51024806 51024807 51024808 51024809 51024810 51024811 51024812 51024813 51024814 51024815 51024816 51024817 51024818 51024819 51024820 51024821 51024822 51024823 51024824 51024825 51024826 51024827 51024828 51024829 51024830 51024831 51024832 51024833 51024834 51024835 51024836 51024837 51024838 51024839 51024840 51024841 51024842 51024843 51024844 51024845 51024846 51024847 51024848 51024849 51024850 51024851 51024852 51024853 51024854 51024855 51024856 51024857 51024858 51024859 51024860 51024861 51024862 51024863 51024864 51024865 51024866 51024867 51024868 51024869 51024870 51024871 51024872 51024873 51024874 51024875 51024876 51024877 51024878 51024879 51024880 51024881 51024882 51024883 51024884 51024885 51024886 51024887 51024888 51024889 51024890 51024891 51024892 51024893 51024894 51024895 51024896 51024897 51024898 51024899 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 51024991 51024992 51024993 51024994 51024995 51024996 51024997 51024998 51024999 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 51024991 51024992 51024993 51024994 51024995 51024996 51024997 51024998 51024999 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 51024991 51024992 51024993 51024994 51024995 51024996 51024997 51024998 51024999 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 51024991 51024992 51024993 51024994 51024995 51024996 51024997 51024998 51024999 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 51024991 51024992 51024993 51024994 51024995 51024996 51024997 51024998 51024999 51024900 51024901 51024902 51024903 51024904 51024905 51024906 51024907 51024908 51024909 51024910 51024911 51024912 51024913 51024914 51024915 51024916 51024917 51024918 51024919 51024920 51024921 51024922 51024923 51024924 51024925 51024926 51024927 51024928 51024929 51024930 51024931 51024932 51024933 51024934 51024935 51024936 51024937 51024938 51024939 51024940 51024941 51024942 51024943 51024944 51024945 51024946 51024947 51024948 51024949 51024950 51024951 51024952 51024953 51024954 51024955 51024956 51024957 51024958 51024959 51024960 51024961 51024962 51024963 51024964 51024965 51024966 51024967 51024968 51024969 51024970 51024971 51024972 51024973 51024974 51024975 51024976 51024977 51024978 51024979 51024980 51024981 51024982 51024983 51024984 51024985 51024986 51024987 51024988 51024989 51024990 5102

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体

| | |
|---|----|
| 1 空间的直线与平面 | 4 |
| 9.1 平面的基本性质 | 4 |
| 阅读材料 利用几何画板作一个能够实现虚实线转换 的旋转长方体 | 13 |
| 9.2 空间的平行直线与异面直线 | 15 |
| 9.3 直线和平面平行与平面和平面平行 | 21 |
| 9.4 直线和平面垂直 | 28 |
| 2 空间向量 | 34 |
| 9.5 空间向量及其运算 | 34 |
| 9.6 空间向量的坐标运算 | 45 |
| 3 夹角与距离 | 53 |
| 9.7 直线和平面所成的角与二面角 | 53 |
| 9.8 距离 | 59 |
| 阅读材料 向量概念的推广与应用 | 64 |
| 4 简单多面体与球 | 67 |
| 9.9 棱柱与棱锥 | 67 |
| 研究性学习课题：多面体欧拉定理的发现 | 78 |
| 阅读材料 欧拉公式和正多面体的种类 | 83 |
| 9.10 球 | 85 |
| 小结与复习 | 91 |
| 复习参考题九 | 98 |

第十章 排列、组合和二项式定理

| | |
|--------------------------|-----|
| 10.1 分类计数原理与分步计数原理 | 102 |
| 10.2 排列 | 106 |

| | |
|-------------------|-----|
| 10.3 组合 | 115 |
| 阅读材料 从集合的角度看排列与组合 | 126 |
| 10.4 二项式定理 | 128 |
| 小结与复习 | 135 |
| 复习参考题十 | 138 |

第十一章 概率

| | |
|----------------------|-----|
| 11.1 随机事件的概率 | 144 |
| 11.2 互斥事件有一个发生的概率 | 154 |
| 11.3 相互独立事件同时发生的概率 | 159 |
| 阅读材料 抽签有先有后, 对各人公平吗? | 168 |
| 小结与复习 | 170 |
| 复习参考题十一 | 174 |

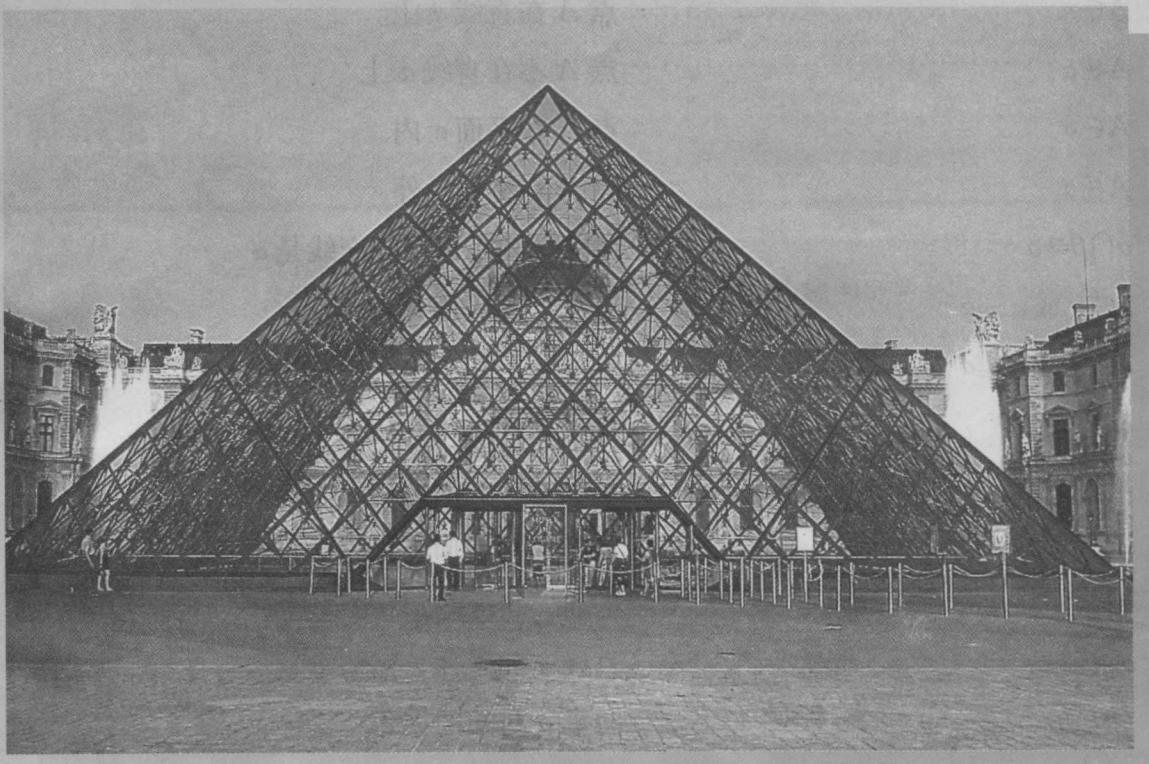
附录 部分中英文词汇对照表

177

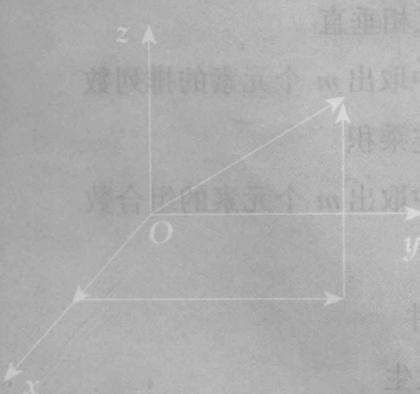
本书部分常用符号

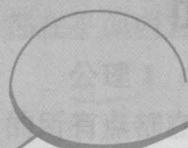
| | |
|---|--|
| $A \in a$ | 点 A 在直线 a 上 |
| $A \notin a$ | 点 A 不在直线 a 上 |
| $A \in \alpha$ | 点 A 在平面 α 内 |
| $A \notin \alpha$ | 点 A 在平面 α 外 |
| $\alpha \cap \beta = a$ | 平面 α 和平面 β 的交线是 a |
| $a \subset \alpha$ 或 $a \not\subset \alpha$ | 直线 a 在平面 α 内 |
| $a \not\subset \alpha$ 或 $a \not\perp \alpha$ | 直线 a 不在平面 α 内 |
| $a \cap b = A$ | 直线 a 和直线 b 相交于点 A |
| $a \cap \alpha = A$ | 直线 a 和平面 α 相交于点 A |
| $a \parallel \alpha$ | 直线 a 和平面 α 互相平行 |
| $\alpha \parallel \beta$ | 平面 α 和平面 β 互相平行 |
| $a \perp \alpha$ | 直线 a 和平面 α 互相垂直 |
| $\langle a, b \rangle$ | 向量 a 与 b 的夹角 |
| $\{a, b, c\}$ | 空间的一个基底 |
| $\{i, j, k\}$ | 单位正交基底 |
| $O-xyz$ | 空间直角坐标系 |
| α - AB - β (或 α - l - β) | 棱为 AB , 面为 α 、 β 的二面角 (或棱为 l , 面为 α 、 β 的二面角) |
| $\alpha \perp \beta$ | 平面 α 和平面 β 互相垂直 |
| A_n^m | 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 |
| $n!$ | 正整数 1 到 n 的连乘积 |
| C_n^m | 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 |
| $P(A)$ | 事件 A 的概率 |
| \bar{A} | 事件 A 的对立事件 |
| $A \cdot B$ | 事件 A , B 同时发生 |

第9章 直线、平面、简单几何体



- 9.1 平面的基本性质
- 9.2 空间的平行直线与异面直线
- 9.3 直线和平面平行与平面和平面平行
- 9.4 直线和平面垂直
- 9.5 空间向量及其运算
- 9.6 空间向量的坐标运算
- 9.7 直线和平面所成的角与二面角
- 9.8 距离
- 9.9 棱柱与棱锥
- 研究性学习课题：多面体欧拉定理的发现
- 9.10 球





公理1 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上

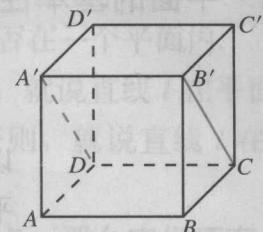
所有的点都在这个平面内（图1-1-1）。

在如图所示的正方体中，你能找到两个全等的三角形吗？你能发现既不平行又不相交的两条直线吗？你能找到和直线AB都成 90° 角的直线吗？

通过研究上述问题，我们可以发现，把研究的范围由平面扩展到空间以后，一些平面图形的基本性质，在空间仍然成立，如 $\triangle ADA' \cong \triangle BCB'$ ，但有些性质就不一定成立，例如在上面的正方体中，过直线AB上一点A与AB垂直的直线有AA'和AD。而在一个平面内，这样的直线只有一条。

在这一章，我们要把平面内直线的平行、垂直和图形的对称性推广到空间，学习空间图形的画法。

在高中数学第一册中，我们已经学习了平面向量，把平面图形的一些基本性质转化为向量运算及其运算律，并且知道，平面内任一点相对于一定点的位置，都可由平面内两个不平行的向量来表示（平面向量基本定理）。据此定理，我们就把对平面图形性质的研究代数化，用向量代数的方法进一步研究了平面图形的一些性质。在这一章，我们要把平面向量的知识推广到空间向量，把平面向量基本定理推广为空间向量基本定理，并得到，任一个空间向量都可用三个不在同一平面内的向量来表示（章头图左下图），从而把对空间图形性质的研究代数化，用向量代数的方法研究空间图形的性质。



1

空间的直线与平面

9.1 平面的基本性质

在平面内，基本图形是点、直线、射线和线段。在空间，除了以上图形外，还有一个基本图形——平面。因此，首先我们要学习平面的表示方法和平面的基本性质。

1. 平面的表示方法

几何里的平面和直线一样，是无限延展的，常见的桌面、平静的水面都是平面的局部形象。

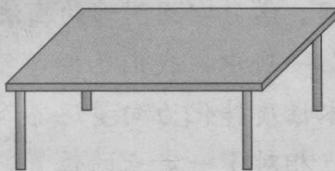


图 9-1

我们不能把一个无限延展的平面在纸上表示出来，通常用平面的一部分表示平面。例如，从桌子的一个角看去，桌面像一个平行四边形。因此，常用平行四边形表示平面（图 9-2）。不过要把它想象成无限延展的。

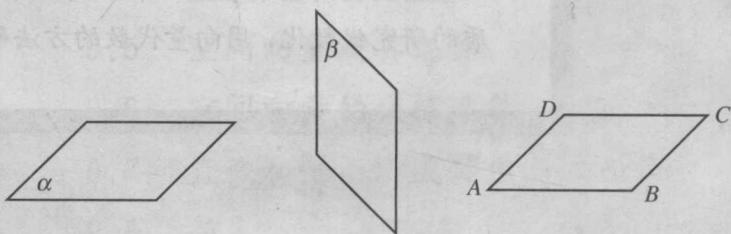


图 9-2

平面通常用一个希腊字母 α 、 β 、 γ ……来表示，还可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来表示。例如图 9-2 中的平面 α ，平面 β ，平面 AC 等。

2. 平面的基本性质

想一想：直线 a 上有一个点在平面内，直线 a 上的所有点是否都在平面内？

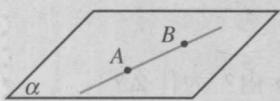


图 9-3

① 在本章中，没有特别说明的两个平面，都是指两个不重合的平面。

公理 1 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上所有点都在这个平面内（图 9-3）。

这时我们说直线在平面内或平面经过直线。

利用这条公理，可以判断一条直线是否在一个平面内。

如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l ，记作 $l \subset \alpha$ 。否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l \not\subset \alpha$ 。

公理 2 如果两个平面①有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线（图 9-4）。

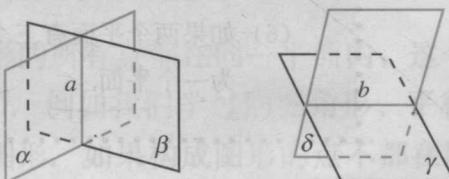


图 9-4

如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的交线。如图 9-4，平面 α 与 β 相交，交线是直线 a ；平面 γ 与 δ 相交，交线是直线 b 。

画两个平面相交，当其中一个平面被另一个平面遮住时，应把被遮住的部分画成虚线或不画（图 9-4）。

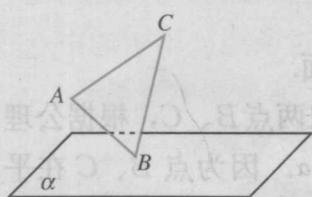


图 9-5

公理 2 实际上告诉我们如何画出相交平面交线的方法。如图 9-5，三角形 ABC 有一个顶点 B 在平面 α 内，请你画出三角形 ABC 所在的平面与平面 α 的交线。

公理 3 经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面（图 9-6）。

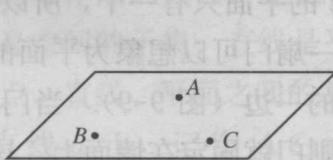


图 9-6



图 9-7

例如照相机可以用三条腿的架子支撑在地面上，就是基于这个性质（图 9-7）。

公理 3 也可简单地说成，**不共线的三点确定一平面**。

过不共线三点 A 、 B 、 C 的平面通常记作平面 ABC 。

练习

1. 能不能说一个平面有边界?
2. 画三个平行四边形表示不同位置的平面.
3. 当线段 AB 在平面 α 内时, 直线 AB 是否在平面 α 内? 为什么?
4. 当直线 l 不在平面 α 内时, l 与平面 α 的公共点最多有几个?
5. 画出相交的两个平面.
6. 判断下列命题的真假:
 - (1) 如果平面 α 与平面 β 相交, 那么它们只有有限个公共点.
 - (2) 过一条直线的平面有无数多个;
 - (3) 两个平面的交线可能是一条线段;
 - (4) 两个相交平面有不在同一条直线上的三个公共点;
 - (5) 经过空间任意三点有且只有一个平面;
 - (6) 如果两个平面有三个不共线的公共点, 那么这两个平面就重合为一个平面.

3. 公理的推论

由上面的公理, 可以得到下面的推论:

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面 (图 9-8).

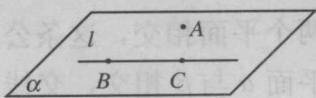


图 9-8

已知: 如图 9-8, 点 A 是直线 l 外一点.

求证: 过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

证明: 点 A 是直线 l 外一点, 在 l 上任取两点 B 、 C , 根据公理 3, 经过不共线的三点 A 、 B 、 C 有一个平面 α . 因为点 B 、 C 在平面 α 内, 所以根据公理 1, 直线 l 在平面 α 内, 即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面. 又因为 B 、 C 在 l 上, 所以任何经过点 A 和 l 的平面一定经过 A 、 B 、 C . 于是再根据公理 3, 经过不共线的三点 A 、 B 、 C 的平面只有一个, 所以经过 l 和 A 的平面只有一个.

一扇门可以想象为平面的一部分, 通常用两个合页把它固定在门框的一边 (图 9-9). 当门不锁上时, 可以自由转动; 如果门锁上, 则门就固定在墙面上. 这个现象即是推论 1 的一个应用.

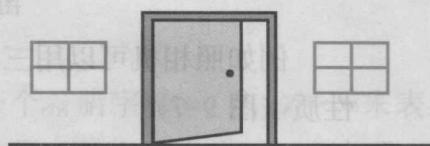


图 9-9

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面 (图 9-10(1)).

用符号表示为:

$$a \cap b = P \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha, \text{ 使 } a \subset \alpha, b \subset \alpha.$$

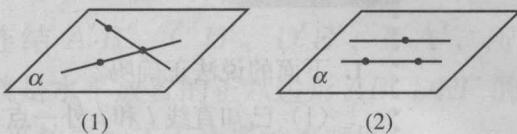


图 9-10

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面 (图 9-10(2)).

用符号表示为:

$$a \parallel b \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha, \text{ 使 } a \subset \alpha, b \subset \alpha.$$

如果空间几个点或几条直线都在同一平面内, 那么我们就说它们共面.

如果构成图形的所有点都在同一平面内, 这个图形叫做平面图形 (图 9-11 (1)). 例如我们学过的三角形、平行四边形、梯形和椭圆等都是平面图形. 如果构成图形的点不都在同一个平面内, 这种图形叫做立体图形. 例如我们学过的长方体、球等都是立体图形 (图 9-11 (2)).

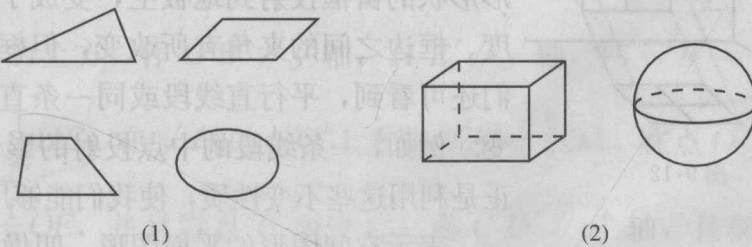


图 9-11

我们在初中学过的平面图形的某些性质, 例如全等、平行、相似等, 对空间里的平面图形仍然成立.

我们把空间看作点的集合. 这就是说, 点是空间的基本元素, 直线、平面都是空间的子集; 直线是平面的子集. 于是我们可用集合语言来描述点、直线、平面之间的关系. 例如:

点 A 在直线 a 上, 记作 $A \in a$, 点 A 不在直线 a 上, 记作 $A \notin a$;

点 A 在平面 α 内, 记作 $A \in \alpha$, 点 A 不在 α 内, 记作 $A \notin \alpha$;

直线 l 在平面 α 内, 记作 $l \subset \alpha$, 直线 l 不在 α 内, 记作 $l \not\subset \alpha$;

直线 l 和直线 m 相交于点 A , 记作 $l \cap m = A$ (这里 A 是 $\{A\}$ 的简记), 直线 l 和平面 α 相交于点 A , 记作 $l \cap \alpha = A$;

平面 α 与平面 β 相交于直线 a , 记作 $\alpha \cap \beta = a$; 等等.

练习

1. 下面的说法正确吗?

- (1) 已知直线 l 和 l 外一点 A , 那么连结 A 和 l 上任一点的直线都在点 A 和 l 确定的平面内;
- (2) 一个角一定是平面图形.

2. 为什么说平行四边形和梯形是平面图形?

3. 用集合符号表示下列语句:

- (1) 点 A 在平面 α 内, 点 B 不在平面 α 内;
- (2) 直线 l 在平面 α 内;
- (3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l .

4. 证明推论2和推论3.

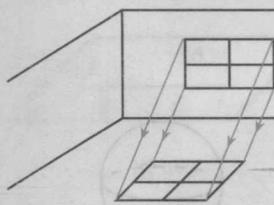


图 9-12

4. 空间图形在平面内的表示方法

观察图9-12, 太阳光线(假定太阳光线是平行的)把一个长方形形状的窗框投射到地板上, 变成了平行四边形的形状. 框边的长度、框边之间的夹角有所改变, 但框边的平行性没有改变. 另外我们还可看到, 平行直线段或同一条直线上的两条线段的比也没有改变. 例如, 一条线段的中点投射的影子, 仍是这条线段影子的中点. 正是利用这些不变性质, 使我们能够用平面图形来表示空间图形.

表示空间图形的平面图形, 叫做空间图形的直观图.

画空间图形的直观图, 一般都遵守统一的规则. 下面举例说明空间图形直观图的画法.

例1 用图形计算器或计算机画水平放置的正六边形的直观图.

画法: (1) 在已知六边形 $ABCDEF$ (图9-13) 中, 取对角线 AD 所在的直线为 x 轴, 取对称轴 GH 为 y 轴, x 轴、 y 轴相交于点 O ; 任取点 O' , 画出对应的 x' 轴、 y' 轴, 使 $\angle x' O' y' = 45^\circ$.

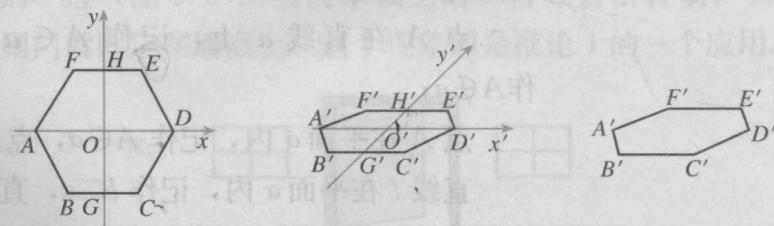


图 9-13

图画好后，要擦去辅助线。辅助线包括 x' 轴、 y' 轴以及为画图添加的辅助线。

(2) 以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$ ，在 y' 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$ ，以点 H' 为中点画 $F'E' \parallel x'$ 轴，并使 $F'E'=FE$ ；再以 G' 为中点画 $B'C' \parallel x'$ 轴，并使 $B'C'=BC$ 。

(3) 顺次连结 $A'B'$ 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 $F'A'$ ，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图。

例2 画水平放置的正五边形的直观图。

画法：(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ （图9-14）中，取中心 O 为原点，对称轴 FA 为 y 轴，过点 O 与 y 轴垂直的直线为 x 轴，分别过 B 、 E 作 $GB \parallel y$ 轴、 $HE \parallel y$ 轴，与 x 轴分别交于 G 、 H 。画对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$ ，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$ 。

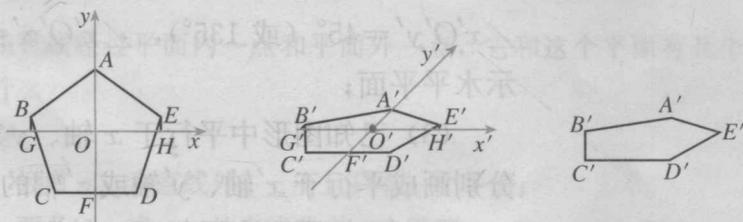


图9-14

(2) 以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $G'H'=GH$ ，分别过 G' 、 H' ，在 x' 轴的上方，作 $G'B' \parallel y'$ 轴， $H'E' \parallel y'$ 轴，使 $G'B'=\frac{1}{2}GB$ ， $H'E'=\frac{1}{2}HE$ ；在 y' 轴的点 O' 上方取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$ ，在点 O' 下方取 $O'F'=\frac{1}{2}OF$ ，并且以点 F' 为中心，画 $C'D' \parallel x'$ 轴，且使 $C'D'=CD$ 。

(3) 连结 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $D'E'$ 、 $E'A'$ ，所得五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图。

例3 画棱长为2 cm的正方体的直观图（用图形计算器或计算机画图）。

画法：(1) 作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$ （图9-15(1))，使 $\angle BAD=45^\circ$ ， $AB=2$ cm， $AD=1$ cm。

(2) 过 A 作 z' 轴使 $\angle BAz'=90^\circ$ ，分别过点 A 、 B 、 C 、 D ，沿 z' 轴的正方向取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm。

(3) 连结 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $C'D'$ 、 $D'A'$ ，得到的图形就是所求的正方体直观图（图9-15(2))。

可以在 <http://www.pep.com.cn/zhongxsx/index.htm> 下载名为“正方体的直观图.gsp”的文件，与你制作的比较。

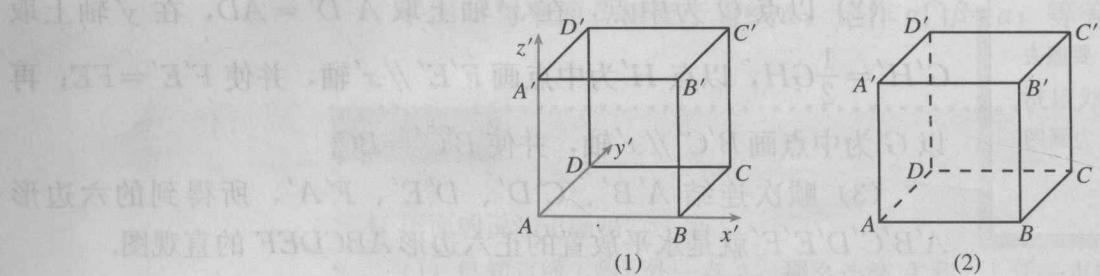


图 9-15

上面画直观图的方法叫做斜二测画法。这种画法的规则是：

- (1) 在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox 、 Oy ，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$ ，且 $\angle yOz=90^\circ$ ；
- (2) 画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$ 、 $O'z'$ ，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$ (或 135°)， $\angle x'O'z'=90^\circ$ 。 $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面；
- (3) 已知图形中平行于 x 轴、 y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、 y' 轴或 z' 轴的线段；
- (4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半。

上面，我们介绍了空间图形直观图的斜二测画法。为了简便，如果要求不太严格，那么长度和角度可“适当地”选取，只要有一定的立体感就可以了。例如，三角形的直观图可“适当地”画成三角形，长方形的直观图可“适当地”画成平行四边形（图 9-16）。但下面的习题中要求按斜二测画的，还应该按要求画。

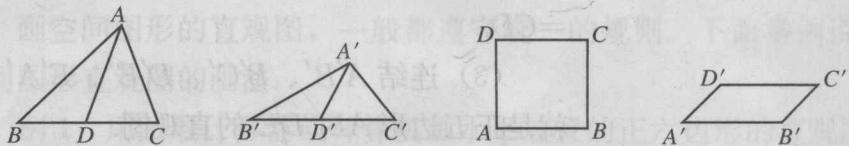


图 9-16

练习

1. 下面的说法正确吗？
 - (1) 水平放置的正方形的直观图可能是梯形；
 - (2) 两条相交直线的直观图可能平行；
 - (3) 互相垂直的两条直线的直观图仍然互相垂直。