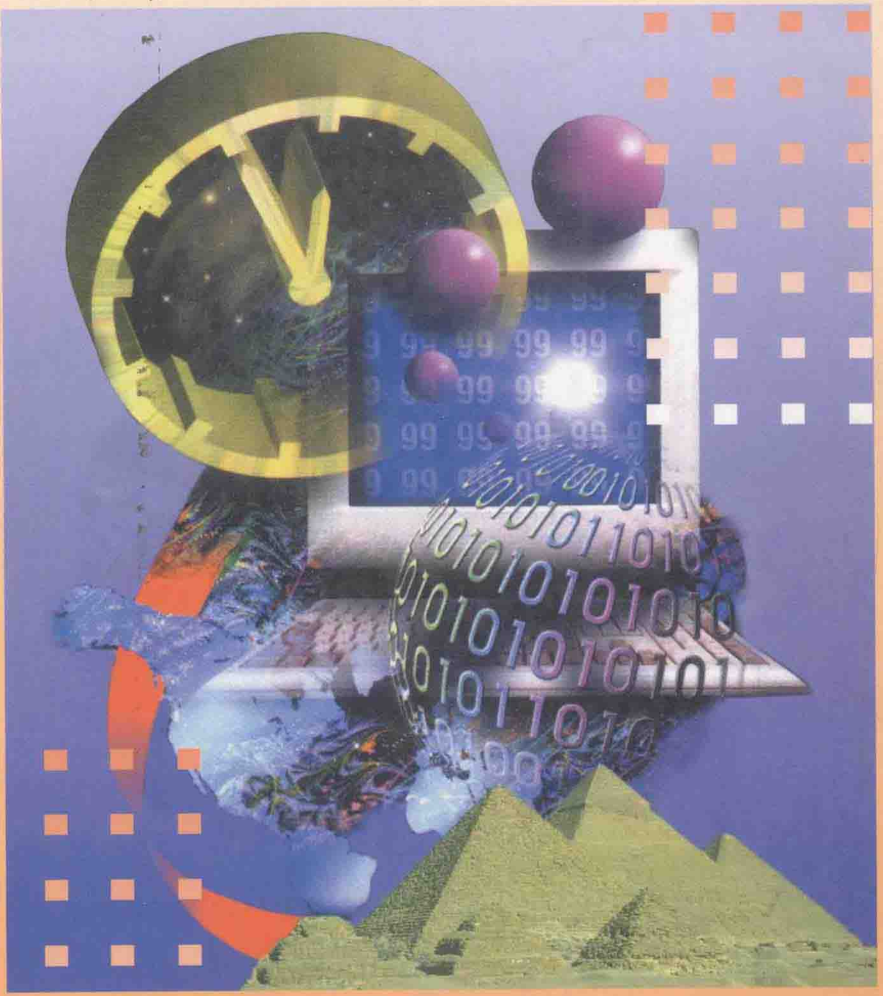
九年义务教育课程

数学

SHUXUE

初中 第4册

侯敏义 主编



北京师范大学出版社

九年义务教育课程

数　学

（初中第 4 册）

主　编　侯敏义

北京师范大学出版社
·北　京·

北京师范大学出版社出版
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
出版人：常汝吉
吉林省新闻出版局印刷管理处重印
吉　林　省　新　华　书　店　发　行
长春第二新华印刷有限责任公司印装
开本：787mm × 1 092mm　1/16　印张：10　字数：250 千字
2001 年 1 月第 1 版　2003 年 12 月第 3 次印刷
印数：1—11 100　定价：5.25 元

经吉林省中小学教材审定委员会审查通过

顾　　问　张孝达　刘　兼　李浩明

主　　编　侯敏义

副 主 编　孟祥静

编　　委　王曾仪　史天勤　史　亮　刘大放　刘　彦　陈受诚　吴德文　孟祥静　周　赫　范　纲　侯敏义　郭奕津　晁振英

本册编者　王曾仪　史天勤　刘　彦　孟祥静　侯敏义　晁振英

目　　录

第十九章　函　数

本章我们将学习有关函数的基本知识．这里我们将初步接触变量这一重要的数学概念，开始以变的观点和方法研究数学问题．我们将进一步利用平面直角坐标系，把式和图进行互相转化，借助各自的优势研究函数的性质．

19.1　函　数

汽车在高速公路上急驰．随着时间的增加，汽车所走过的路程也在随之增加．这里，它走过的路程随时间的变化而变化．

拖拉机在农田里耕地，随着被耕土地面积的增加，拖拉机油箱里的柴油随着减少．这里，油箱里剩余的柴油数随耕种的土地面积变化而变化．

校园内，国旗迎风飘扬．从旭日东升到夕阳西下，旗杆投射到操场上的影子由长变短，再由短变长．这里，时间改变了，影长随之改变．

股票大厅人声鼎沸，股市风云变幻莫测．下面是 2000 年 8 月 11 日上海证券综合指数分时走势图．我们可以看到，随着时间的变化，股指随时也在变化．

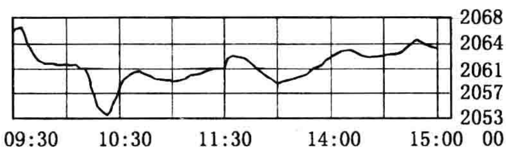


图 19-1

锻炼身体，发展友谊．育才学校为备战全省中学生运动会积极做好各方面的准备，下面是他们统计的 30 名女选手的鞋码与人数关系表：

鞋的尺码	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
人　　数	一	丅	正	正 正 一	正 丅	丆	一

每种鞋码对应一个人数．这里，人数与鞋码之间有某种对应关系．

教师给同学们布置了一道练习题：求前 n 个正整数的和．这

里的 n 是一个变化的数，n 取不同的数，所得的和也不同. 例如当 $n=3$ 时，和的值是 6；当 $n=10$ 时，所得的和是 55；当 $n=100$ 时，所得的和是 5050. 这里，前 n 个正整数的和与 n 存在某种对应关系.

有了前面这些体验，我们对函数的理解和接受就不会太困难了.

在上面这些实例中，我们会看到每一个问题中都有两个变化着的量，称之为**变量**.

一般地，若在一个变化过程中有两个变量，如果对于第一个变量的每一个值，另一个变量都有唯一的值与它对应，那么就说第一个变量是**自变量**，第二个变量是自变量的**函数**（也叫**因变量**）.

自变量大多用字母 x 表示，函数大多用字母 y 表示.

问题 在前面的六个实例中，哪些变量是自变量？哪些变量是函数？

例 1 写函数关系式，并指出其中的变量与函数：

(1)每千克散装色拉油售价 6.25 元，求货款金额 y(元)与购买数量 x(千克)之间的关系式；

(2)求高为 9 cm 的圆锥的体积 V(cm^3)与底面半径 r(cm)之间的关系式；

(3)一个面积为 20 cm^2 的矩形，写出由其一边长 x 求另一边长 y 的关系式.

解：(1) $y=6.25x$, ①

其中 x 是自变量，y 是 x 的函数.

(2) $V=\frac{1}{3}\pi r^2\times 9=3\pi r^2$, ②

其中 r 是自变量，V 是 r 的函数.

(3) $y=\frac{20}{x}$, ③

其中 x 是自变量，y 是 x 的函数.

观察 在①②③式中，除了两个变量(自变量和函数)外，还有别的量吗？

通过观察我们会发现，除了两个变量之外，每式中都有一个不变的数存在：①式中的 6.25；②式中的 3π；③式中的 20. 与变量相对应，我们称这个不变的量为函数关系中的**常量**. 有的函数关系中不止含有一个常量.

练一练

指出下列函数关系式中的自变量、函数和常量：

(1) $y=-2x$； (2) $y=3x-\frac{1}{6}$；

(3) $y=\frac{x}{2}+1$； (4) $y=3x^2+7x+2$；

(5) $M=\frac{N-1}{3}$； (6) $p=\frac{1}{5q}$.

上面的这些函数都是用代数式表示的，要注意自变量的取值必须使代数式有意义.

例 2 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=-3x$； (2) $y=5x^2+1$； (3) $y=\frac{1}{2-x}$.

解：(1)全体实数；

(2)全体实数；

(3) $x\neq 2$.

例 3 已知矩形的周长为 30 cm，一边长为 y(cm)，另一边长为 x(cm).

(1)写出以 x 为自变量的函数式；

(2)写出自变量的取值范围.

解：(1) $y=\frac{1}{2}(30-2x)=15-x$；

(2)应同时满足 $x>0$ 和 $x<\frac{1}{2}\times 30$，所以 x 的取值范围是 $0<x<15$.

注意：例 3 告诉我们研究实际问题的自变量取值范围时，不但要使得出的函数式有意义，还必须考虑到使实际问题有意义.

对于例 3 中的函数式 $y=15-x$，当自变量 $x=3$ 时，对应的 y 值是 $y=15-3=12$.

12 叫做函数 $y=15-x$ 当 $x=3$ 时的函数值.

例 4 求下列函数当 $x=-1,0,2$ 时的函数值：

(1) $y=3x+1$； (2) $y=\frac{3}{x-1}$.

解：(1)当 $x=-1$ 时，$y=3\times(-1)+1=-2$；当 $x=0$ 时，y

$=3\times0+1=1$；当 $x=2$ 时，$y=3\times2+1=7$；

(2)当 $x=-1$ 时，$y=\dfrac{3}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$；当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{3}{0-1}=-3$；当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{3}{2-1}=3$.

练一练

1. 写出下列函数中自变量的取值范围：

(1) $y=2x-1$；　(2) $y=\dfrac{2}{x}$；

(3) $y=\sqrt{x-4}$；　(4) $y=x^2-3x+2$.

2. 分别求出函数 $y=2x^2-2$，当 x 取 $-2,-1,0,1,2$ 时 y 的值.

习　题　19.1

A　组

1. 分别指出下列关系式中的变量与常量：

(1) 50 千米的路程，以 v(千米/时)的速度行走，走过的时间为 t，则 t 与 v 之间的函数关系式为 $t=\dfrac{50}{v}$；

(2) 半径为 2 的圆柱体的体积为 $V(\mathrm{m}^3)$，高为 h，则 V,h 的函数关系式为 $V=4\pi h$；

(3) 一高层住宅，底层高 4 m，以上每层高为 3 m，则楼高 H 与层数 n 之间的函数关系式为 $H=4+3(n-1)$.

2. 求出下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=\dfrac{2-x}{3}$；　(2) $y=\dfrac{10}{x+2}$；

(3) $y=-\sqrt{x+1}$；　(4) $y=\dfrac{7x}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=x^2(x-1)$；　(6) $y=17x-\sqrt{5-x}$.

3. 求当 $x=2,x=-3$ 时，下列函数的值：

(1) $y=2x-5$；　(2) $y=-3x^2$；

(3) $y=\dfrac{2}{x-1}$；　(4) $y=\sqrt{2-x}$.

4. 已知 x,y 满足下列等式，用 x 的代数式表示 y：

(1) $2x-y=13$；　(2) $xy=7$；

(3) $(x-1)(y+2)=-3$；　(4) $x=\dfrac{2y+1}{3y-2}$；

(5) $y^2=25x(y\geqslant0)$；　(6) $y-\dfrac{4}{5}x=0$.

5. 已知函数 $y=\dfrac{2x}{3x-1}$，求当 $x=1,-1,0,-\dfrac{1}{6},a-3$ 时的函数值.

6. 当 x 取什么值时，下列函数的函数值为 0：

(1) $y=4x-2$；　(2) $y=3x^2-5x-2$；

(3) $y=(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$；　　(4) $y=\frac{x-3}{x+2}$.

19.2　函数的表示方法

以下介绍三种函数表示方法.

解析法　用含有自变量的式子表示函数的方法称为**解析法**. 上节中例 1 的三个函数都是用解析法表示的. 它是三种表示法中最常用的方法.

为了巩固这种方法，下面我们再共同完成一个例题.

例 1　小红的爸爸原购入每股价 9.26 元的股票 1 000 股. 现又购入每股价 15.86 元的股票 x 股，求小红爸爸投入股市总钱数 y 的解析式(交易过程中的费用忽略不计).

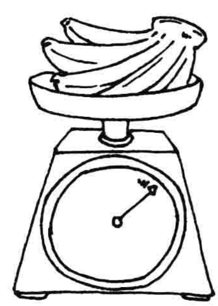
解：$y=9.26\times 1\ 000+15.86x$

$=15.86x+9\ 260$.

试一试　取一只卫生香，量好长度后点燃，记录其燃烧时间，计算出燃烧速度. 写出燃烧所剩的长度 h(厘米)与燃烧时间 t(分)的函数解析式.

练一练

1. 1 吨民用自来水的价格为 2.35 元，求所交水费全额 Y(元)与使用自来水的数量 n(吨)的函数关系式.
2. 购买 200 元钱的柴油，求所能购买的数量 N(升)与单价 a(元)的关系.
3. 棱长为 a 的正方体，求体积 V 与 a 的函数关系式.



列表法　我们通过一个实例来介绍.

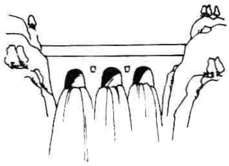
一个专卖香蕉的水果小贩，每千克香蕉卖 3.5 元. 某日他忘了带计算器，给算账带来不便，于是他通过笔算在硬纸板上作了一个表格，使他在算账时只需作简单的加法，快捷多了. 他的表格如下：

重量 m/千克	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
价格 T/元	0.18	0.35	0.53	0.7	0.88	1.05	1.23	1.4	1.58	1.75

把重量和价格看作两个变量，他们构成一种函数关系，这种关系是通过一个表格体现出来的. 这种表示函数关系的方法称

为**列表法**.

上面这个函数关系不但能用列表法表示，也能用解析法表示为$T=3.5m$. 但也有用列表法表示的函数却不能用解析法表示. 例如下面这个问题就是这样.



某水库存水量Q与水深h(指最深处的水深)之间的关系经过实地测量得出，如下表：

水深h/米	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量Q/万米^3	0	18	37	80	158	300	465	730

对于表中第一行的每一个h值，存水量Q都有唯一确定的值与它对应，它们的关系是一种函数关系，但这种关系却不能用解析式表示出来.

例2 已知函数$y=2x^2-x+3$，当$x=-3,-2,-1,0,1,2,3$时，用列表法表示出对应的y值.

解：以$-3,-2,-1,0,1,2,3$代替$y=2x^2-x+3$中的x，求得对应的y值为24，13，6，3，4，9，18. 列表如下：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	24	13	6	3	4	9	18

练一练

1. 根据函数解析式$y=x^3-1$填写下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^3-1							

2. 赵师傅开出租车去年每个月的日平均收入如下表：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日均收入/元	560	510	440	400	330	280	240	220	260	310	390	490

看表回答：(1)哪个月日平均收入最高？哪个月最低？(2)计算一下他全年的日平均收入.

图象法 我们已经知道，一个函数，对于自变量x的一个值，函数y有唯一确定的值与它对应. 我们把x的值放在前，y的值放在后，便得到了一个有序数对.

例如函数$y=2-x$，当$x=-1,0,1,2,3$时，函数y的值分别为3，2，1，0，-1. 用列表法表示如下：

x	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1

这里的五组值便是五个有序数对. 它们转化为平面直角坐标系内的五个点，把这些点用平滑的线连接起来，便得到一条直线. 我们把这条直线叫做函数 $y=2-x$ 的**图象**. 这种用图象表示函数的方法叫做**图象法**.

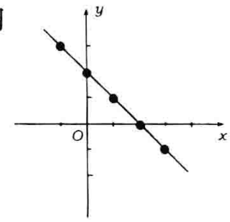


图 19-2

函数图象的形状是多种多样的，有直线、线段，也有各种形状的曲线.

例 3 某城市 1949 年至 1994 年期间每隔 5 年的人口数如下表：

年　份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994
人口数/万人	4	4.8	5.9	7.4	9.6	13.7	18	22.4	27.1	33.8

(1)画出直角坐标系，描出对应的各点，用平滑的曲线连接起来；

(2)按曲线的趋势走向，继续延伸曲线，并利用图象预测该市 1999 年和 2004 年的人口数.

解：(1)所得图象如图 19-3；

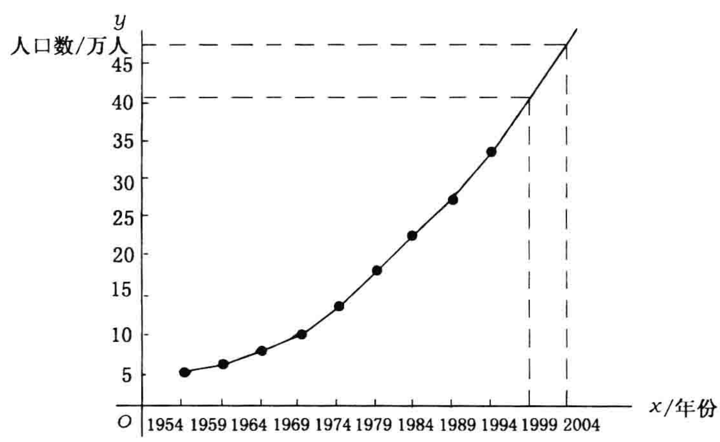


图 19-3

(2)根据该图象的趋势可以预测，该市 1999 年人口数大约为 41 万，2004 年大约为 48 万.

函数的图象和它的解析式的关系，是一种形与式互相转化的关系.

在生产、经营、管理活动中，经常遇到不给出解析式(有的函数关系也无法用解析式表示)，而只给出图象的情况. 下面这个题目就是通过已知图象研究问题的例子.

例 4　图 19-4 是某地一天的气温随时间变化的图象，根据图象回答，在这一天中：

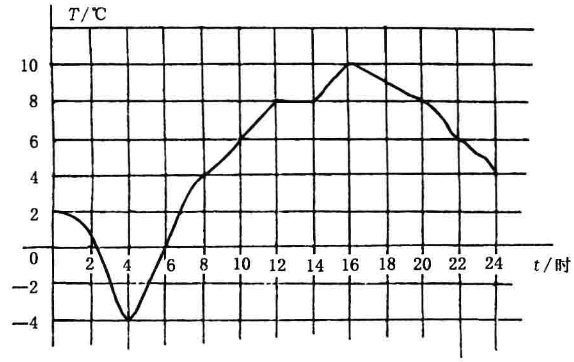


图 19-4

(1)什么时间气温最高？什么时间气温最低？最高气温和最低气温各是多少？

(2)20 时的气温是多少？

(3)什么时间气温为 6℃？

(4)哪段时间内气温不断下降？

(5)哪段时间内气温持续不变？

解：(1)凌晨 4 时，气温最低，气温是 -4℃；16 时气温最高，气温是 10℃.

(2)20 时的气温是 8℃.

(3)10 时和 22 时气温都是 6℃.

(4)0 时到 4 时和 16 时到 24 时这两段时间内气温不断下降.

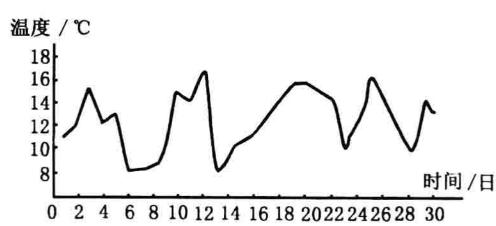
(5)12 时到 14 时这 2 小时内气温保持 8℃的温度不变.

练一练

1. 用描点法画出下列函数的图象：

(1)$y=2x$；　　　(2)$y=x^2+1$.

2. 下图是某个地区某月中的日平均温度变化的图象，根据这个图象说明：



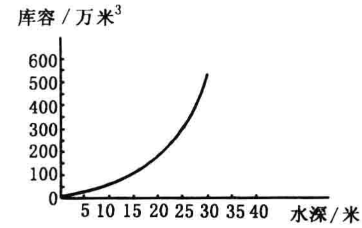
(第 2 题)

(1)这个月中最高与最低的日平均温度各是多少？

(2)这个月中日平均温度变化的幅度是多大？

3. 根据某水库的水深——库容曲线图，填写下表：

水深/米	5	10	15	20	25
库容/万米^3					



（第 3 题）

习　题　19.2

A　组

1. 用解析法表示下列函数：

(1)如果每升高 1 km，气温就下降 6℃，求气温降低数 T(℃)与高度增加数 h(km)之间的函数关系式.

(2)学校食堂现库存粮食 12 000 千克，求这些粮食能用的天数 y 与每天平均用粮数 x 之间的函数关系式.

(3)学校食堂现库存粮食 12 000 千克，平均每天需用粮 250 千克. 求库存粮食 y(千克)与食用天数 x 之间的函数关系式.

(4)等腰三角形的顶角的度数为 y，底角度数为 x，求 y 与 x 之间的函数关系式.

(5)10 cm^3 的物体，求它的密度 ρ(g/cm^3)与质量 m(g)之间的函数关系式.

2. 分别按照所给函数式填表：

(1)$y=2x^2-3x+1$；

x	-1	0	1	2	3	4
y						

(2)$y=\frac{1}{2}x^3$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

3. 下表是某天一昼夜温度变化情况的记录：

时间/时	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度/℃	-7	-8	-10	-7	-5	-1	3	6	5	3	0	-3	-4

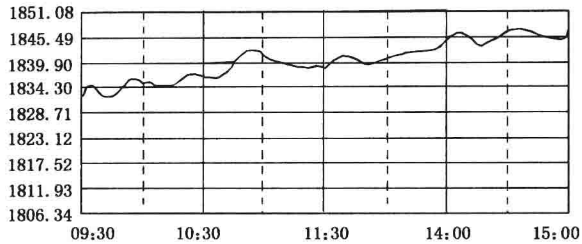
根据这个表，画出反映这一昼夜温度变化情况的曲线.

4. 画出下列函数的图象：

(1)$y=\frac{1}{2}x+2$；　　(2)$y=2x^3$；

(3)$y=\frac{1}{x-1}$；　　(4)$y=\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$.

5. 下图为 2000 年 4 月 20 日上海证券公司的“上证指数分时走势图”，显示当日股票交易情况. 其横坐标表示时间(单位:时. 自 9:30 至 15:00，中间 11:30～13:00 休息)，纵坐标表示指数(单位:点). 请看图回答问题:(指数精确到个位)



（第 5 题）

(1)开盘与收盘时指数各是多少?

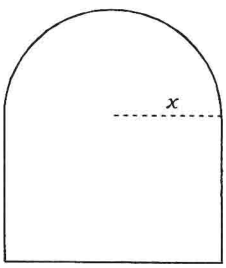
(2)当日最高指数是多少?在什么时间达到?

(3)当日最低指数是多少?在什么时间达到?

(4)11:00 与 14:30 时的指数各是多少?

B 组

1. 如图,某窗形状是一个矩形上面带一个半圆. 半圆的半径是 x,窗的周长是 P,窗的面积是 A. 如果 P 是常数,求 A 与 x 之间的函数关系式.



（第 1 题）

2. 某村 1990 年开办了两个村办企业——塑料厂、编织厂. 两厂从 1991 年到 2000 年的获利情况如图:

(1)分别计算出两厂 10 年的利润总和;

(2)哪几年两厂的获利额相同,是多少?

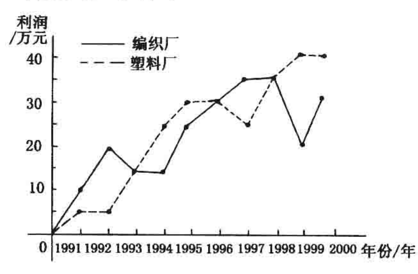
(3)找出两厂差额最大的年份,最大差额是多少?

3. 某市出租车计费办法如下图所示,请根据图象回答问题:

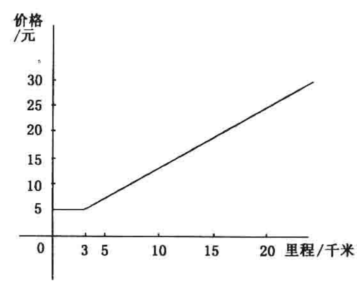
(1)出租车起价是多少元,在多少千米之内只收起价款?

(2)由图象求出起价里程走完之后每行驶一千米所增加的钱数;

(3)某外地客人想用 30 元钱坐车游览市容,利用图象求出他大约能行走多少千米?



（第 2 题）



（第 3 题）

动脑筋

想一想,$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+n)$是怎样求出来的?

阅读

函数和数学家

函数的产生、发展和逐步完善，是经过众多才华卓著的数学家多年的不懈努力而实现的．

最早对函数进行初步描述的是14世纪的法国数学家奥莱斯姆，在表示随时间 t 而变化的变量 x 时，他画了图形，把 t 称作“经度”，而把 x 称作“纬度”．后来笛卡尔在指出 y 和 x 是变量的时候，也注意到 y 随 x 而变，这也是函数思想的萌芽．而美国数学家哈略特和法国数学家费尔马应用坐标的概念导出了直线和圆锥曲线的方程，从而进一步描绘了两个变量之间的对应关系．函数这一名词是由德国著名数学家莱布尼兹在1692年发表的论文中第一次使用的．函数概念从初步形成到不断扩充完善的过程大约持续了将近三个世纪．这期间函数概念的多次扩充是由全世界许多著名数学家逐步完成的．由于同学们现有知识水平的限制，我们目前还不能对扩充的内容和意义做出更多的介绍，只能按扩充的时间顺序来介绍一下其中一些重要数学家的名字．他们是瑞士数学家雅各·贝努利和约翰·贝努利兄弟；约翰·贝努利的学生大数学家欧拉；法国数学家拉格朗日；法国数学家傅立叶；法国大数学家柯西；俄国数学家罗巴切夫斯基；德国数学家黎曼和迪雷克莱；德国数学家康托尔及20世纪数学家豪斯多夫、库拉托夫斯基等．

我们现在所给出的函数定义是有局限性和缺欠的，但在初中阶段只能这样处理了．

莱布尼兹

欧拉

黎曼

19.3 一次函数

问题

1．一部队从驻地出发进行行军训练，步行1小时走了6千米后，改乘汽车以60千米/时的速度前进．那么部队离开驻地的距离 S（千米）与行走时间 t（时）的关系是怎样的？

2．一蓄水池有水750 m^3，如果每分放水2.5 m^3，那么水池中剩余水量 M（m^3）与放水时间 t（分）之间的关系是怎样的？

这两个问题的结果应该分别是

1．$S=60(t-1)+6$；

2．$M=-2.5t+750$．

这两个函数都是我们现在要讲的一次函数．

函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 叫做 x 的**一次函数**．