高等院校通识教育『十二五』规划教材

概率论与数理统计学习指导

王琼 阮宏顺 主编
李军 王世飞 张芳 王言芹 副主编

Gailvlun yu Shuli Tongji
Xuexi Zhidao

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校通识教育『十二五』规划教材

概率论与数理统计学习指导

王琼 阮宏顺 主编
李军 王世飞 张芳 王言芹 副主编

Gailvlun yu Shuli Tongji Xuexi Zhidao

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导 / 王琼，阮宏顺主编
. -- 北京 : 人民邮电出版社，2013.9
高等院校通识教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-115-32962-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①王… ②阮… Ⅲ. ①概率论一高等学校一教学参考资料②数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第199111号

内容提要

《概率论与数理统计学习指导》是《概率论与数理统计》（苏州大学出版社）的配套学习指导书，按教材章节顺序编排，系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容．主要内容包括随机事件与概率，随机变量及其分布，随机向量，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，抽样和抽样分布，参数估计和假设检验．通过对各章知识点的梳理，典型例题的分析解答，帮助学生澄清一些易混淆和易理解错误的概念，熟悉概率论与数理统计课程的解题方法与技巧，提高学生分析问题和解决问题的能力．

《概率论与数理统计学习指导》可作为高等院校理工科各专业本科生、研究生的辅导教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生考前强化复习训练的指导书．

◆ 主　　编　王　琼　阮宏顺
副 主 编　李　军　王世飞　张　芳　王言芹
责任编辑　吴宏伟
执行编辑　张海生
责任印制　张佳莹　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13　　2013 年 9 月第 1 版
字数：309 千字　　2013 年 9 月河北第 1 次印刷

定价：28.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

“概率论与数理统计”是研究随机现象统计规律性的数学学科，是高等院校理工科各专业的一门重要基础理论课.作为一门应用数学学科，概率论与数理统计不仅理论严谨、应用广泛，更具有其独特的概念和方法.将概率论的结果深入地分析和统计，观察某些现象并发现其内在的规律性，再加以研究，从而作出相应的判断和预测，然后将这些结果归纳整理得到一定的数学模型，这是数理统计所研究的问题.为使初学者尽快地熟悉这种独特的思维方法，更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析、解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了此指导书.

本书的编写参照了原国家教委工科数学课程教学指导委员会审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》和近年来《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》的基本要求，与《概率论与数理统计》(苏州大学出版社)相配套.本书针对学生在学习过程中经常遇到的诸如对题目的理解、解决问题的思路和方法，以及如何使用公式或理论等问题，精心挑选了一些既符合课程要求，又具有代表性的典型例题，进行分析和详细的解答，借以展示解决各类问题的一般途径和方法，帮助学生正确理解概率统计思想的实质.本书针对各章知识点分别给出了同步练习，以供学生检查学习效果之用.同时，为满足不同层次读者的需要，本书还挑选了历年硕士研究生入学考试的部分试题，借以对有志于考研或提高自己解题能力的同学提供帮助.如学生缺少独立作业习惯和有依赖心理，对学好这门课程是极为不利的，故本书未附习题答案，但切实需要同步练习和试题答案的，请联系 wangqiong@cczu. edu. cn.

本书由王琼、阮宏顺、李军、王世飞、张芳、王言芹编写，由阮宏顺、王琼统稿.在本书的编写过程中，编者也引用了其他书籍中的一些例子，谨向相关作者表示感谢.

本书的出版得到了常州大学数理学院领导以及数学专业老师们的关心和支持，并得到了江苏省高等教育改革研究基金的资助，编者谨致谢意.

由于编者水平有限，且编写时间也较为仓促，书中难免存在不妥甚至谬误之处，恳请专家、同行和读者批评指正.

编者

2013 年 8 月

目录

第一章

概率论的基本概念

一、基本要求

(1) 了解随机试验、基本事件空间(样本空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系和运算及其基本性质.

(2) 理解事件概率、条件概率的概念和独立性的概念;掌握概率的基本性质和基本运算公式;掌握与条件概率有关的三个基本公式(乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式).

(3) 掌握计算事件概率的基本计算方法.

①概率的直接计算:古典型概率和几何型概率;

②概率的推算:利用概率的基本性质、基本公式和事件的独立性,由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

(4) 理解两个或多个(随机)试验的独立性的概念,理解独立重复试验,特别是伯努利试验的基本特点,以及重复伯努利试验中有关事件概率的计算.

二、内容提要

(一) 随机试验、样本空间与随机事件

1. 随机试验

具有以下三个特点的试验称为随机试验,记为 E.

(1) 试验可在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果具有多种可能性,但试验之前可确知试验的所有可能结果;

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω;试验的每一个可能结果,即 Ω 中的元素,称为样本点,记为 ω.

3. 随机事件

在一定条件下,可能出现也可能不出现的事件称为随机事件,简称事件;也可表述为事件就是样本空间的子集．必然事件记为 Ω,不可能事件记为 $\varnothing$.

(二) 事件的关系

1. 包含

$A\subset B$,读作“事件 B 包含事件 A”或事件“A 包含于事件 B”,表示每当事件 A 发生时,必导致事件 B 发生.

2. 相等

$A=B$,读作“事件 A 等于事件 B”或“事件 A 与事件 B 等价”,表示事件 A 与事件 B 或都发生,或都不发生.

3. 相容

若 $AB\neq\varnothing$,则称“事件 A 和事件 B 相容”;若 $AB=\varnothing$,则称“事件 A 与事件 B 不相容”.

4. 对立事件

若满足 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,即 $B=\overline{A}$,则称事件 A 和事件 B 互为对立事件.

(三) 事件的运算

1. 和事件(并)

$A\cup B$ 或 $A+B$ 表示“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”,称作 A 与 B 的和或并,一般地,$\bigcup\limits_i A_i$ 或 $\sum\limits_i A_i$ 表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生”.

2. 积事件(交)

AB 或 $A\cap B$,表示“事件 A 与事件 B 都发生”,称作 A 与 B 的交或积．一般地,$A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 或 $\bigcap\limits_i A_i$ 表示事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都发生”.

3. 差事件

$A-B$ 表示“事件 A 发生但是事件 B 不发生”,称作 A 与 B 的差,或 A 减 B.

4. 文氏图

事件的关系和运算可以用文氏图形象地表示出来(见图 1.1,图中的矩形表示必然事件 Ω).

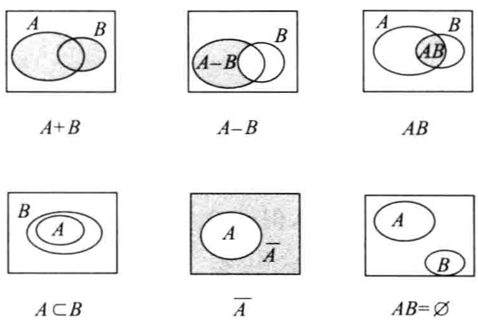

图 1.1　文氏图

（四）事件的运算法则

对于任意事件 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有以下运算法则.

(1) 交换律：$A+B=B+A, AB=BA$.

(2) 结合律：$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$；

$ABC=A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

$A(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=AA_1+AA_2+\cdots+AA_n+\cdots$.

(4) 对偶律：$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$；$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$；

$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots}=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n\cdots$；

$\overline{A_1A_2\cdots A_n\cdots}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\cdots+\bar{A}_n+\cdots$.

（五）概率的概念

1. 频率的定义

事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，则比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

2. 统计概率

频率具有稳定性，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$随 n 的增大逐渐稳定于某个常数 p，称 p 为事件 A 的概率. 在实际问题中，当 n 很大时，取 $P(A)=p\approx\frac{n_A}{n}$称之为(统计)概率.

3. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，如果满足

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$是可列个互不相容事件，有 $P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

4. 古典概率

若试验的基本结果数为有限个，且每个事件发生的可能性相等，则(试验所对应的概率模型为古典概型)事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中所含样本点数}}=\frac{m}{n}.$$

5. 几何概率

若试验基本结果数无限，随机点落在某区域 G 的概率与区域 G 的度量(长度、面积、体积等)成正比，而与其位置及形状无关，则(试验所对应的概率模型为几何概型)“在区域 Ω 中随机地取一点落在区域 G 中”这一事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)},$$

其中,$\mu(G)$ 为区域(或区间)G 的度量(如长度、面积、体积等).

(六) 概率的基本性质

1. 规范性

$0\leqslant P(A)\leqslant 1$(特别地 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$).

2. 有限可加性

对于任意有限个两两不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 即

$$A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n),$$

有 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

3. 单调不减性

若事件 $B\supset A$,则 $P(B)\geqslant P(A)$, 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

4. 互逆性

$P(\bar{A})=1-P(A)$.

5. 加法公式

对任意两事件 A, B, 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

此性质可推广到任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的情形.

6. 可分性

对任意两事件 A, B, 有 $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$, 且

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B).$$

(七) 条件概率与乘法公式

1. 条件概率

设 A, B 是两个事件,且 $P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式

设 A, B 是两个事件,且 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

称为事件 A, B 的概率乘法公式.

(八) 全概率公式与贝叶斯公式

1. 完备事件组

设 Ω 为试验 E 的样本空间, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 E 的一组事件. 若

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega, A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组.

2. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任何事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),$$

上式称为全概率公式．

3. 贝叶斯(Bayes)公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任何事件 B，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},$$

上式称为贝叶斯公式或逆概率公式．

(九) 事件的独立性和独立试验

1. 事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 和事件 B 独立；若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件的交的概率都等于各事件概率的乘积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

2. 事件独立性的性质

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中

(1) 任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也相互独立；

(2) 任意一个事件，与其余任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件运算仍相互独立；

(3) 将任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件换成其对立事件后，所得 m 个事件仍相互独立.

3. 独立试验

如果分别与试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相联系的任意 n 个事件之间相互独立，则称试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为相互独立的.

(1) 独立重复试验："独立"表示"与各试验相联系的事件之间相互独立"，"重复"表示"每个事件在各次试验中出现的概率不变".

(2) 伯努利试验：只计"成功"和"失败"两种对立结果的试验，称作**伯努利试验**. 将一伯努利试验独立地重复做 n 次，称作 n 次(n 重)伯努利试验，亦简称伯努利试验. 伯努利试验的特点如下.

① 只有两种对立的结果；

② 各次试验相互独立；

③ 各次试验成功的概率相同.

设 ξ_n 是 n 次伯努利试验成功的次数，事件成功的概率为 p，则

$$P\{\xi_n=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},(k=0,1,\cdots,n),\text{其中 } q=1-p.$$

(十) 事件概率的计算

1. 直接计算

古典概型和几何概型的概率可直接计算.

2. 用频率估计概率

当 n 充分大时，用 n 次独立重复试验中事件 A 出现的频率，估计在每次试验中事件 A 的概率.

3. 概率的推算

利用概率的性质、基本公式和事件的独立性，由简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

4. 利用概率分布

利用随机变量的概率分布，计算与随机变量相联系的事件的概率(见"第二章 随机变量及其分布").

三、疑难分析

1. 必然事件与不可能事件

必然事件是在一定条件下必然发生的事件，不可能事件指的是在一定条件下必然不发生的事件. 它们都不具有随机性，是确定性的现象，但为研究的方便，把它们看作特殊的随机事件.

2. 对立事件与互斥(不相容)事件

如果两个事件 A 与 B 必有一个事件发生，且至多有一个事件发生，则 A,B 为对立事件；如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，则 A,B 为互斥事件. 因而，对立必定互斥，互斥未必对立. 区别两者的关键是紧扣其定义：$A+B=\Omega, AB=\varnothing$(对立)；$AB=\varnothing$(互斥).

3. 两事件独立与两事件互斥

两事件 A,B 独立，则 A 与 B 中任一个事件的发生与另一个事件的发生无关，这时有 $P(AB)=P(A)P(B)$；而两事件互斥，则其中任一个事件的发生必然导致另一个事件不发生，这两事件的发生是有影响的，这时 $AB=\varnothing, P(AB)=0$.

4. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$

$P(AB)$ 是在样本空间 Ω 内，事件 AB 的概率，而 $P(A|B)$ 是在试验 E 增加了新条件 B 发生后的缩减的样本空间 Ω_B 中计算事件 A 的概率. 虽然 A,B 都发生，但两者是不同的，一般说来，当 A,B 同时发生时，常用 $P(AB)$，而在有包含关系或明确的主从关系时，用 $P(A|B)$.

如袋中有 9 个白球、1 个红球，作不放回抽样，每次任取一球，取 2 次，求：

(1) 第二次才取到白球的概率；

(2) 第一次取到的是白球的条件下，第二次取到白球的概率.

问题(1)求的就是一个积事件概率的问题，而问题(2)求的就是一个条件概率的问题.

5. 全概率公式与贝叶斯公式

当所求的事件概率为许多因素引发的某种结果，而该结果又不能简单地看作这诸多事件之和时，可考虑用全概率公式，在对样本空间进行划分时，一定要注意它必须满足的两个条件. 贝叶斯公式用于试验结果已知，追查是何种原因(情况、条件)下引发的概率.

四、典型例题

【例 1.1】写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点.

（1）掷一颗骰子，出现奇数点.

（2）投掷一枚质地均匀的硬币两次：

① 第一次出现正面；

② 两次出现同一面；

③ 至少有一次出现正面.

【分析】可对照集合的概念来理解样本空间和样本点：样本空间可指全集，样本点是元素，事件则是包含在全集中的子集.

【解】（1）掷一颗骰子，有 6 种可能结果，如果用"1"表示"出现 1 点"这个样本点，其余类似. 则样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，出现奇数点的事件为$\{1,3,5\}$.

（2）投掷一枚均匀硬币两次，其结果有 4 种可能，若用（正，反）表示"第一次出现正面，第二次出现反面"这一样本点，其余类似. 则样本空间为 $\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，用 A,B,C 分别表示上述事件①、②、③，则事件 $A=\{$(正，正)，(正，反)$\}$；事件 $B=\{$(正，正)，(反，反)$\}$；事件 $C=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$.

【例 1.2】以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A,B,C 表示以下事件.

（1）只订阅日报；　（2）只订日报和晚报；　（3）只订一种报；

（4）正好订两种报；　（5）至少订阅一种报；　（6）不订阅任何报；

（7）至多订阅一种报；　（8）三种报纸都订阅；　（9）三种报纸不全订阅.

【分析】利用事件的运算关系及性质来描述事件.

【解】（1）$A\bar{B}\bar{C}$；　（2）$AB\bar{C}$；　（3）$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；

（4）$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$；　（5）$A+B+C$；　（6）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

（7）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}$ 或 $\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$；

（8）ABC；　（9）$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$.

【例 1.3】设 $P(A)=\frac{1}{3}$，　$P(B)=\frac{1}{2}$，试就以下四种情况分别求 $P(B\bar{A})$.

（1）$AB=\varnothing$；　（2）$A\subset B$；　（3）$P(AB)=\frac{1}{8}$；　（4）A,B 相互独立.

【分析】按概率的性质进行计算.

【解】（1）$P(B\bar{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}$；

（2）$P(B\bar{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}$；

（3）$P(B\bar{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$；

（4）$P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

【例 1.4】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}, P(AB)=0$. 求事件 A,B,C 全不发生的概率.

【技巧】 同时利用事件运算的德·摩根律及逆事件概率公式，是解概率题中常用的技巧之一.

【解】
$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) &= P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C) \\ &= 1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)] \\ &= 1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right]=\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

【例 1.5】 一个小孩用 13 个字母 A,A,A,C,E,H,I,I,M,M,N,T,T 作组字游戏. 如果字母的各种排列是随机的(等可能的)，问"恰好组成 MATHEMATICIAN"一词的概率为多大?

【分析】 此题考查的是古典概型概率的计算.

【解】 显然样本点总数为 13!，设 $A=\{$恰好组成 MATHEMATICIAN$\}$，事件 A 包含 3! 2! 2! 2!个样本点. 所以 $P(A)=\frac{3!\ 2!\ 2!\ 2!}{13!}=\frac{48}{13!}$.

【例 1.6】 袋中有 α 个白球及 β 个黑球.

(1) 从袋中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰含有 a 个白球和 b 个黑球的概率($a\leqslant\alpha, b\leqslant\beta$)；

(2) 从袋中任意地接连取出 $k+1$ 个($k+1\leqslant\alpha+\beta$)个球，如果每球被取出后不放回，试求最后取出的球是白球的概率.

【分析】 这是一个古典概型概率的计算问题 .

【解】 (1) 从 $\alpha+\beta$ 个球中取出 $a+b$ 个球，这种取法总共有 $C_{\alpha+\beta}^{a+b}$ 种.

设 $A=\{$恰好取中 a 个白球和 b 个黑球$\}$，故 A 中所含样本总数为 $C_{\alpha}^{a}\cdot C_{\beta}^{b}$，从而
$$P(A)=\frac{C_{\alpha}^{a}\cdot C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

(2) 从 $\alpha+\beta$ 个球中接连不放回地取出 $k+1$ 个球，由于具有次序，所以应考虑排列问题，因此，共有 $P_{\alpha+\beta}^{k+1}$ 种取法.

设 $B=\{$最后取出的球为白球$\}$，则 B 中所含样本点数可以通过乘法原理来计算：考虑有 $k+1$ 个位子，编号分别为 $1,2,\cdots,k,k+1$，将第 n 次取出的球放入第 n 号位子. 第 $k+1$ 次取出的球是白球，相当于第 $k+1$ 号位子是白球. 为保证第 $k+1$ 号位子是白球，先从 α 个白球中任意取一个放入第 $k+1$ 号位子，有 α 种取法；而其余的 k 个位子随便放，共有 $P_{\alpha+\beta-1}^{k}$ 种不同的取法(同样要考虑排列). 因而 B 中包含的样本点共有 $\alpha\cdot P_{\alpha+\beta-1}^{k}$ 个，故
$$P(B)=\frac{\alpha\cdot P_{\alpha+\beta-1}^{k}}{P_{\alpha+\beta}^{k+1}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

【注】 ① 从上例知，在计算样本点总数以及事件所含样本点的数目时，必须在同一确定的样本空间中考虑，如果一个考虑了顺序，在另一个也必须按同样的方法考虑顺序.

② 如果我们将"白球"、"黑球"换成"合格品"、"次品"等，就得到各种各样的摸球问题，这就是抽球问题的原型意义所在.

③ 在上例的两个问题中，我们采取的抽样方式实际上都是不放回的抽样，如果我们改用有放回的抽样，即每次摸出球后仍放回袋中，则容易知道

$$P(A)=C_{a+b}^{a}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{a}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{b},$$

$$P(B)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

对第一个问题(即事件 A),在"不放回抽样"与"放回抽样"情形下问题的答案,恰好是我们以后所介绍的"超几何分布"与"二项分布"的实际背景. 对第二个问题(即事件 B),无论是"不放回抽样",还是"放回抽样",答案都是$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$,其结果与 k 无关,此结果说明了日常生活中抓阄、分票的合理性.

【例 1.7】将 n 个人等可能地分配到 $N(n\leqslant N)$间房中去,试求下列事件的概率.

$A=\{$某指定的 n 间房中各有一个人$\}$;

$B=\{$恰有 n 间房,其中各有一人$\}$;

$C=\{$某指定的房中恰有 $m(m\leqslant n)$个人$\}$.

【分析】这是一个典型的古典概型概率的计算问题.

【解】把 n 个人等可能地分配到 N 间房中去,由于并没有限定每一房中的人数,故是一可重复的排列问题,这样的分法共有 N^n 种. 对于事件 A,今固定某 n 间房,第一个人可分配到 n 间房的任一间,有 n 种方法;第二个人可分配到余下的 $n-1$ 间房中的任一间,有 $n-1$ 种分法,依次类推,得到 A 共含有 $n!$ 个样本点,故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

对于事件 B,因为 n 间房没有指定,所以可先在 N 间房中任意选出 n 间房(共有 C_N^n 种选法),然后对于选出来的某 n 间房,按照上面的分析,可知 B 共含有 $C_N^n\cdot n!$ 个样本点,从而

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

对于事件 C,由于 m 个人可自 n 个人中任意选出,并不是指定的,因此有 C_n^m 种选法,而其余的 $n-m$ 个人可任意地分配到其余的 $N-1$ 间房中,共有$(N-1)^{n-m}$种分配方法,故 C 中共含有 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$个样本点,因此

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

【注】可归入"分房问题"处理的古典概型的实际问题非常多,例如下面的问题.

① 生日问题:n 个人的生日的可能情形,这时 $N=365$ 天$(n\leqslant 365)$;

② 旅客下站问题:一客车上有 n 名旅客,它在 N 个站上都停,旅客下站的各种可能情形;

③ 印刷错误问题:n 个印刷错误在一本有 N 页的书中的一切可能的分布(n 一般不超过每一页的字符数);

④ 放球问题:将 n 个球放入 N 个盒子的可能情形.

值得注意的是,在处理这类问题时,要分清楚什么是"人"什么是"房",一般不能颠倒.

【例 1.8】从 $0,1,2,\cdots,9$ 这 10 个数字中,任意选出 3 个不同的数字,试求下列事件的概率.

$A_1=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$；

$A_2=\{3$ 个数字中不含 0 或 $5\}$.

【分析】这是一个古典概率的计算问题，综合运用概率的性质进行计算.

【解】随机试验是从 10 个数字中任取 3 个数字，故样本空间 Ω 的样本总数为 C_{10}^3.

如果取得的 3 个数字不含 0 和 5，则这 3 个数字必须在其余的 8 个数字中取得，故事件 A_1 所含的样本点的个数为 C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

对事件 A_2，我们引入下列事件：$B_1=\{3$ 个数字中含 0，不含 $5\}$；$B_2=\{3$ 个数字中含 5，不含 $0\}$；$B_3=\{3$ 个数字中既不含 0，又不含 $5\}$. 则 $A_2=B_1\cup B_2\cup B_3$，且 B_1,B_2,B_3 两两互不相容，于是有

$$P(A_2)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

【注】① 对事件 A_2 的概率求法，我们还有另外两种方法.

(方法一)利用逆事件进行计算.

若注意到 $\overline{A}_2=\{3$ 个数字中既含有 0 又含 $5\}$，则有

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}.$$

(方法二)利用加法公式进行计算.

若引入事件：$C_1=\{3$ 个数字中不含 $0\}$；$C^2=\{3$ 个数字中不含 $5\}$. 则 $A_2=C_1\cup C_2$，从而有

$$P(A_2)=P(C_1)+P(C_2)-P(C_1C_2)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}$$
$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{14}{15}.$$

② 由此例可见，如果能利用事件间的运算关系，将一个较为复杂的事件分解成若干个比较简单的事件的和、差、积等，再利用相应的概率公式，就能比较简便地计算较复杂事件的概率，这种思想方法希望读者能熟练掌握.

【例 1.9】在区间[0,1]中，随机地取出两个数，求两数之和小于 1.2 的概率.

【分析】本题的难点是把所求问题归结为一个几何概型的问题，这类问题其实在考虑均匀分布的相关概率时是比较常见的，读者可以将它理解成这样一个问题：设 X 与 Y 相互独立，且 X,Y 等可能地在区间[0,1]上取值，于是随机点 (X,Y) 等可能地落在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上. 于是，相当于 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$A=\{(X,Y)\mid X+Y<1.2\}\subset\Omega$. 虽然题目中没有明确给出“独立性”这一条件，但一般字眼“随机地”，除了表示试验结果是等可能的外，还表示了取出的两个数是相互独立的. 同时，由于问题所涉及的区域往往是较为规则的几何图形，因此，许多情形下，只须利用初等数学的方法就能求出这些图形的面积.

【解】设 x,y 为区间(0,1)中随机取出的两个数，则试验的样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，而所求的事件 $A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega,x+y<1.2\}$. 从而，由几何概率的计算公式知

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times0.8^2}{1}=0.68.$$

【例 1.10】 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取 2 件产品中有 1 件不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

【分析】 在已知“所取 2 件产品中有 1 件不合格品”的条件下求“另一件也是不合格品”的概率，所以是条件概率问题. 根据公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，必须求出 $P(A)$，$P(AB)$.

【解】 令 A=“两件中至少有一件不合格”，B=“两件都不合格”，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-P(\bar{A})}=\frac{\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1-\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}.$$

【例 1.11】 从 1～100 个整数中，任取一数，已知取出的一数是不超过 50 的数，求它是 2 或 3 的倍数的概率.

【分析】 记 A=｛取出的数不超过 50｝；

B=｛取出的数是 2 的倍数｝；

C=｛取出的数是 3 的倍数｝.

则所求概率为条件概率 $P(B\cup C|A)$，然后利用条件概率的性质进行计算.

【解】 A,B,C 同上所设，由条件概率的性质知

$$\begin{aligned}P(B\cup C|A)&=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)\\&=\frac{P(BA)}{P(A)}+\frac{P(CA)}{P(A)}-\frac{P(BCA)}{P(A)}.\end{aligned}$$

由于

$$P(A)=\frac{1}{2},P(BA)=\frac{25}{100},P(CA)=\frac{16}{100},P(BCA)=\frac{8}{100},$$

故

$$P(B\cup C|A)=2\left[\frac{25}{100}+\frac{16}{100}-\frac{8}{100}\right]=\frac{33}{50}.$$

【例 1.12】 设有白球和黑球各 4 只，从中任取 4 只放入甲盒，余下 4 只放入乙盒，然后分别在两盒中各任取一只，颜色正好相同，试问放入甲盒的 4 只球中有几只白球的概率最大，且求出此概率.

【分析】 应用全概率公式和贝叶斯公式计算.

【解】 设 A=｛从甲、乙两盒中各取一球，颜色相同｝，

B_i=｛甲盒中有 i 只白球｝，$i=0,1,2,3,4$.

显然 $B_0,B_1,\cdots,B_4$ 构成一完备事件组，又由题设知

$$P(B_i)=\frac{C_4^iC_4^{4-i}}{C_8^4},i=0,1,\cdots,4.$$

且

$$P(A|B_1)=\frac{3}{8},P(A|B_2)=\frac{4}{8},P(A|B_3)=\frac{3}{8},$$