

安生  
AMESON

# AP 微积分

# 导学与应考指南

主编 安生AP课程专家组

归纳重点难点考点

揭示考试命题趋势

梳理课程知识体系

专为非母语人员打造



 东南大学出版社  
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# AP 微积分

## 导学与应考指南

主 编 安生 AP 课程专家组  
编 者 管 文

东南大学出版社  
· 南 京 ·

## 内 容 提 要

本书针对广大学习者学习 AP 微积分的现状,在总结多年教学经验的基础上,以准确、贴切的中文注解,对微积分中的基本概念进行讲解,并详析了难点、易错点,以批注的形式列出中国学生最感到困难的地方。本书还有适当的练习,供巩固强化之用。本书适用于有志参加 AP 考试的学生作为课程辅导及应试前总结知识点、应考冲刺之用。

## 图书在版编目(CIP)数据

AP 微积分导学与应考指南/安生 AP 课程专家组主编.  
—南京:东南大学出版社,2012.8  
美国 AP 课程  
ISBN 978-7-5641-3749-6

I. ①微… II. ①安… III. ①中学数学课—高中—教  
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第206175号

## AP 微积分导学与应考指南

主 编	安生 AP 课程专家组	责任编辑	刘 坚
电 话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seupress.com
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
地 址	南京市四牌楼 2 号	邮 编	210096
销售电话	(025)83793191/83794561/83794174/83794121/83795801/83792174 83795802/57711295(传真)		
网 址	<a href="http://www.seupress.com">http://www.seupress.com</a>	电子邮件	press@seupress.com
经 销	全国各地新华书店	印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16	印 张	14.75
字 数	377 千字	印 数	1—3 500 册
版 次	2012 年 11 月第 1 版	印 次	2012 年 11 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5641-3749-6		
定 价	32.00 元		

\* 未经许可,本书内文字不得以任何方式转载、演绎,违者必究。

\* 本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系。电话:025-83791830。

## 安生国际教育科学研究院图书策划委员会

主	任	张	梧	华								
委	员	会	成	员	张	梧	华	曹	亚	民	李	容
					王	健	卫	欣	张	莉		
					刘	航	张	涛	林	猛		

# Preface 前言

---

AP 是 Advanced Placement 的缩写,中文一般翻译为美国大学先修课程、美国大学预修课程,指由美国大学理事会(The College Board)提供的在高中授课的大学课程。美国高中生可以选修这些课程,在完成课后参加 AP 考试,得到一定的成绩后可以获得大学学分。美国高中 AP 课程有 22 个门类、37 个学科,已在美国 15 000 多所高中里普遍开设。它可以使高中学生提前接触大学课程,避免了高中和大学初级阶段课程的重复。目前,已有 50 多个国家的 4 000 多所大学承认 AP 学分为其入学参考标准和该项考试为考生增添的大学学分,其中包括哈佛、耶鲁、牛津、剑桥等世界名牌大学。

AP 考试每年 5 月举行,目前已经在全球 80 多个国家开设。

考试通过的 AP 课程可以折抵大学学分,减免大学课程,帮助学生缩短大学学时、跳级,更可节省高昂的大学学费。更重要的是,据统计,拥有优异 AP 考试成绩的高中生在未来的大学学习中有更加出色的表现和发展,美国各大学已将 AP 成绩看作衡量学生学习和研究能力以及应付高难度大学课程能力的重要指标。参加 AP 考试科目多、考分高的学生被美国名校另眼相看。英国、加拿大、澳大利亚等国也将此作为发放奖学金的主要条件之一。

随着中国出国留学的人数越来越多、越来越低龄化,很多学生和家长开始选择 AP 课程考试并将之作为跨入欧美著名高校的重要加分手段,因此 AP 课程在中国越来越热,报考人数逐年上升。

安生基金会是国内较早接触 AP 并从事 AP 课程教学的机构。近年来,安生和国内诸多知名高中签约,联办美国高中课程并 AP 课程国际班/部,并成功地在安生的专业升学队伍的帮助和指导下为欧美名校如哈佛、MIT 等输送了大批优秀学子,成为国内在 AP 教学领域异军突起的重要力量,受到了欧美名校、联办高中和诸多家长、学子的一致好评。

针对广大学习者学习 AP 课程的现状,在总结过去七年多在中国的 AP 教学和教研的经验基础上,结合 AP 课程最近的发展特点和命题的变化及趋势,我们组织了一线的优秀教学和教研团队编写了这套“导学与应考指南”丛书,主要科目是报考人数最多且

我国考生感觉比较困难或希望得到高分的生物、化学、数学、经济学(宏观和微观)、物理等5门课程。在编写过程中,编者在总结过去若干年教学和教研经验的基础上,在详细分析历年 AP 考试题目的基础上,针对我国为非英语母语国家的特点,重点归纳了各门课程的重点、难点,并就如何在考试中解决实际问题以边栏批注的形式提出了可行的方法。应该说,本套丛书基本达到了简练、实用、清晰、易懂的初衷,不失为广大学子备考 AP 和谋求高分的良好参考用书。

本册为丛书中的微积分分册。微积分学往往是历年 AP 考试中报考人数最多的一门学科,其知识深度和知识结构相当于美国大学一年级的微积分学课程。与一般高中课程不同的是,AP 微积分学课程要求学生掌握基本的微积分学概念、知识,计算方法,这已经超越了初等数学的范畴。特别是对于非英语母语国家的学生来说,通过 AP 微积分课程的学习,掌握微积分学英文专业词汇,基本的微积分学知识,原理,运用科学的语言提高口头、书面的逻辑性表达能力,进而为以后在美国的继续深造学习构建扎实、良好的基础非常关键。学生在修完 AP 微积分课程以后,将参加由美国大学理事会举办的全球 AP 微积分学考试。这两门考试将是测量学生是否达到 AP 微积分课程要求的最重要的方式。

AP 微积分学考试采用笔试的方式进行,考试时间三个半小时左右。试卷题型有两种选择题和自由解答题。这两部分题型涵盖了 AP 微积分学的全部内容。中国的学生大多数都会参加 AP 微积分 BC 的考试,相较于 AB 来说,BC 的内容更多一些。在主观题的解题过程中要求考生尝试通过清晰的逻辑和表达,分步将思维过程重现。对于英语为非母语地区的考生来说,在解答主观题的时候,用英语来正确清晰地表达自己的观点无疑增加了难度。本书以准确、贴切的中文注释,对基本概念、易混淆概念进行辨析;加入重、难点解析、案例分析,以及专门针对中国考生的词汇讲解,并配以相应练习,帮助考生理清考试重难点。

本书一共包括7章,分成了两篇。在第一篇中,详细地介绍了 AP 微积分的考试。第二篇开始 AP 微积分内容学习。首先,作为微积分学的基础,主要复习了一下高中阶段学习的函数内容。然后引入微积分学中重要的概念——极限与连续;从第三章考试,逐一介绍微积分学基本的概念、知识及定理。在此提醒读者,鉴于绝大多数中国考生报考 AP 微积分 BC 的事实,以及微积分 BC 知识本身的重要性,此书中不详细区分微积分 AB 与 BC 的内容。功到自然成,只要踏实学习了,AP 微积分满分就离你不远了。

安生美国高中 AP 课程专家组

2012年9月

# Contents 目录

---

第一篇 AP 微积分考试介绍 .....	1
第二篇 AP 微积分基础内容 .....	5
<b>Chapter 1 Function 函数</b> .....	<b>7</b>
1.1 Function Definition and Properties 函数的定义和性质 .....	7
A. Definitions Concerned 相关定义 .....	8
B. Properties of Functions 函数的性质 .....	9
1.2 Function Operations 函数的运算 .....	15
A. Addition, Subtraction, Multiplication and Division of Functions 函数的加法、减法、乘法和除法 .....	15
B. Composition Functions 复合函数 .....	16
C. Inverse Functions 反函数 .....	16
1.3 Basic Elementary Functions 初等函数 .....	17
A. Constant Functions 常数函数 .....	17
B. Exponential Functions 指数函数 .....	18
C. Power Functions 幂函数 .....	18
D. Logarithmic Functions 对数函数 .....	19

E. Trigonometric Functions 三角函数	20
F. Inverse Trigonometric Functions 反三角函数	21
1.4 Miscellaneous Functions 函数的其他表示形式	24
A. Piece-wise Functions 分段函数	24
B. Parametric Functions 参数函数	26
C. Functions in the Polar Coordinate System 极坐标系下的方程	28
D. Transformation of Functions 函数图象的变化	29
<b>Chapter 2 Limit and Continuity 极限与连续</b>	<b>37</b>
2.1 Definition of Limit 极限的定义	38
A. Definition of Limit 极限的定义	38
B. Two Important Limits 两个重要的极限	40
C. Limits in Three Different Forms 三种形式的极限	43
2.2 Left-Hand and Right-Hand Limits 左右单侧极限	44
2.3 Operations on Limits 极限的运算	47
2.4 Asymptotes 渐近线	49
A. Horizontal Asymptote 水平渐近线	50
B. Vertical Asymptote 竖直渐近线	50
2.5 Continuity 连续	52
A. Definition of Continuity 连续的定义	52
B. Properties of Continuous Functions Defined on a Closed Interval 闭区间上连续函数的性质	55
C. Several Types of Discontinuity 几种常见的间断点	57
<b>Chapter 3 Derivative and Differentiate 导数与微分</b>	<b>65</b>
3.1 Definition of Derivative 导数的定义	66



A. Definition of Derivative 导数的定义 .....	68
B. One-Sided Derivative 单侧导数 .....	69
C. Relation between Derivative and Continuity 可导性与连续性的关系 .....	71
3.2 Operations on Derivative 导数的计算 .....	72
A. Arithmetic Operations 导函数的运算 .....	72
B. Chain Rule 复合函数求导的链式法则 .....	74
C. Derivative of Inverse Function 反函数求导 .....	75
D. Nth-Degree Derivative 高阶导数 .....	77
E. Implicit Function, Parametric Function and Polar Function's Derivative 隐函数求导, 参变量函数求导, 极坐标函数求导 .....	79
F. Approximation with Derivative 导数的近似计算 .....	84
3.3 Application of Derivative 导数的应用 .....	86
A. Mean Value Theorem 微分中值定理 .....	86
B. L'Hospital Rule 洛毕达法则 .....	89
C. Monotony of Functions 函数的单调性 .....	92
D. Concavity 函数曲线的凹凸性 .....	93
E. Local Extrema and Absolute Extrema 函数的极值与最值 .....	96
<b>Chapter 4 Antiderivative 不定积分 .....</b>	<b>109</b>
4.1 Definition of Antiderivative 不定积分的定义 .....	109
A. Definition of Antiderivative 不定积分的定义 .....	109
B. Origin Function and Antiderivative 原函数与不定积分 .....	110
C. Inverse Relationship between Integration and Differentiation 不定积分与求导运算的互逆关系 .....	111
4.2 Computation of Antiderivative 不定积分的计算 .....	111

A. Basic Operations 基本计算 .....	111
B. Integration by Substitution 换元积分法 .....	113
C. Integral by Parts 分部积分法 .....	115
D. Indefinite Integral of Rational Functions 有理函数的不定积分 .....	117
<b>Chapter 5 Definite Integral 定积分</b> .....	<b>121</b>
5.1 Definition of Definite Integral 定积分的定义 .....	122
A. Definition of Definite Integral 定积分的定义 .....	122
B. Properties of Definite Integral 定积分的性质 .....	124
C. Approximation of Definite Integral 定积分的近似计算 .....	126
5.2 Fundamental Theorem of Calculus and MVT 微积分基本定理及积分中值定理 .....	129
A. Fundamental Theorem of Calculus 微积分基本定理 .....	129
B. MVT for Integral 积分中值定理 .....	132
5.3 Operations on Definite Integral 定积分的计算 .....	134
A. Integration by Substitution 换元积分法 .....	134
B. Integral by Parts 分部积分法 .....	137
5.4 Improper Integral 反常积分 .....	139
5.5 Application of Definite Integral 定积分的应用 .....	143
A. Find the Area Enclosed by Planar Curves Analytically 求平面曲线围成的图形的面积 .....	144
B. Find the Volume Formed by Revolution Solid 求旋转体的体积 .....	149
C. Find the Arc Length 求弧长 .....	153
<b>Chapter 6 Differential Equations 微分方程</b> .....	<b>167</b>
6.1 Definition of Differential Equations 微分方程相关定义 .....	168

A. Definition of Differential Equations 微分方程的定义 .....	168
B. Solution Curve 解曲线 .....	170
6.2 Solve Differential Equations Graphically and Numerically 微分方程的图形解 和数值解 .....	171
A. Slope Field 斜率场 .....	171
B. Euler's Method 欧拉折线法 .....	173
6.3 Several Types of Differential Equations 几种类型的微分方程 .....	175
A. Separable Differential Equations 变量可分离方程 .....	175
B. Exponential Growth and Decay 指数型增长 .....	177
C. Restrict Growth 约束型增长 .....	177
D. Logistic Growth 逻辑型增长 .....	178
<b>Chapter 7 Series 级数</b> .....	185
7.1 Definition of Infinite Series 无穷级数的概念 .....	185
A. Definition of Series 级数的定义 .....	185
B. Convergence of Infinite Series 无穷级数的敛散性 .....	186
C. Several Common Series 几种常见的级数 .....	188
7.2 Tests 无穷级数敛散性的判别法 .....	190
7.3 Power Series 幂级数 .....	202
A. Definition of Power Series 幂级数的定义 .....	202
B. Radius of Convergence, Interval of Convergence 幂级数的收敛半径, 收敛区间 .....	203
C. Expansion of Power Series 幂级数的展开 .....	205
D. Computation of Power Series 幂级数的计算 .....	210
<b>Answers to Exercises of Each Chapter</b> .....	217

# 第一篇

## AP 微积分考试介绍



中学里我们学习的数学知识主要是关注于一些简单情况下的函数关系。事实上,现实生活 and 科学研究中,我们遇到的更多的是一些动态的、连续的、较为复杂的运动过程,我们需要研究变化中的函数关系及其相关性质,这就是 AP 微积分课程的主要内容。

AP(Advanced Placement)课程中的微积分课程,其授课对象为高中学生,但课程难度却与美国大学一年级课程相当;而美国的这个 AP Calculus 课程与国内大学开设的微积分课程又相较悬殊,各有千秋。从课程大纲、知识范围、重难点、掌握层次、学科思路方法等方面着眼,将 AP Calculus 独立于国内通常理解的深奥的微积分学而作为一门新的考试科目,这样不足为过。鉴于此,笔者拙著一本适于国内优秀的高中在读、志于挑战美国名校的莘莘学子的学习辅导书,书中将详尽介绍上述内容,着重剖析 AP Calculus 课程知识点与考试中可能会遇到的问题。立足于美国安生基金会全体同仁数十年来对 AP 课程的引进、对 AP 考试的研究,及笔者教学心得,谨拙笔于此,希望能对众多 AP 学子有所帮助;更希望借此抛砖引玉,让我国的 AP 课程更为普及,向高层次的水平发展。

AP Calculus 能作为美国名优大学的敲门砖,是因为 Calculus 本身也是一门实用性很强的学科,它直接联系着工程、生活的方方面面。本书中,笔者将深入浅出地介绍 AP Calculus 覆盖的全部数学知识,从规范性层面引入、介绍各个知识内容;在操作层面,笔者也将不遗余力一一详解知识点及学生在学习、考试中的一些常见问题。

微积分 AB 课程主要涵盖了以下内容:

I. 函数(Function)、图象(Graph)、极限(Limit),包括图象分析(Analysis of graph)、函数的极限(Limit of function)、渐进和无穷(Asymptotic and unbounded behavior)、函数的连续性(Continuity as a property of functions)等;

II. 导数(Derivative),包括导数的定义(Definition of derivative)、函数在一点处的导数(Derivative at a point)、导函数(Derivative as a function)、二阶导数(Second derivative)、导数的应用(Application of derivative)、导数的运算(Computation of derivative)等;

III. 积分(Integral),包括定积分的定义和性质(Definition and properties of definite integral)、定积分的数值计算(Numerical approximation to definite integral)、定积分的应

用(Application of definite integral)、微积分基本定理(Fundamental theorem of calculus)、不定积分(Techniques of antidifferentiation)、不定积分的应用(Application of antidifferentiation)。

微积分 BC 课程的主要内容除了包括微积分 AB 课程的全部内容之外,还增加了以下内容:平面曲线的参数方程、向量方程、极坐标方程;反常积分;多项式近似计算;级数;在积分的应用中,增加了物理模型、经济模型、生物模型等。

在 AP Calculus 的考试中需要用到图形计算器以解决一些问题,如会做函数的图象,求方程的根,求导数,求定积分等。

AP Calculus 考试卷面结构从 2011 年起做了相应调整,但仍是两种考题形式:选择题和自由问答题。它们之内根据允不允许用计算器帮助答题又各自再分为两个部分:选择题的第一部分不允许用计算器,第二部分可以用;自由问答题的第一部分允许用计算器,第二部分则不允许。比起以前的考试,调整之后的考试中不允许用计算器的题目增加了,允许用计算器的题目减少了。具体情况如下表:

选择题 Multiple-Choice Section		分值/时间	计分
	A 部分:无计算器	28 题/55 分钟	答对 1 题得 1 分,不答得 0 分,答错不扣分 卷面得分乘以 1.2 为最后得分 总分为 54 分,占卷面总分 50%
B 部分:有计算器	17 题/50 分钟		
自由问答题 Free-response Section		分值/时间	计分
	A 部分:有计算器	2 题/30 分钟	每题 9 分 总分为 54 分,占卷面总分 50%
	B 部分:无计算器	4 题/60 分钟	
总计		51 题/195 分钟	108 分

# 第二篇

## AP 微积分基础内容



