电工原理与计算方法

下册

（电磁场部分）

黄礼镇　黄椿熙　编著

科学出版社

电工原理与计算方法

下册

(电磁场部分)

黄礼镇　黄椿熙　编著

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书从基本概念出发，比较全面和系统地讨论了电工的基本理论和有关的计算方法．书中汇集了较多的例题和习题，在书末附有习题答案．本书可作为高等院校电类专业教材，也可供有关科技人员参考．

全书分上、下两册，上册讨论电路原理，下册讨论电磁场原理．

下册内容包括：静电场、恒定电流场、静磁场、静态场的特殊解法、时变场和电磁波等．为了方便初学矢量分析的读者，第十一章首先介绍矢量运算．最后一章为电磁场的数值计算方法，可作为进行数值计算时的参考．

电工原理与计算方法

下 册

（电磁场部分）

黄礼镇　黄椿熙 编著

责任编辑　范铁夫

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988年 2月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1988年 2月第一次印刷　　印张：19 1/8

印数：0001—4,300　　字数：441,000

ISBN 7-03-000081-1/TM·2

定价：4.90 元

目　　录

第十一章　矢 量 运 算

11-1　矢量的定义和表示法

矢量是具有大小和方向的量，如位移、速度、力等．只具有大小的量叫做**标量**，如能量、质量、电荷等．

矢量常用一个字母，上面加一矢号表示，本书用黑体字母表示．作图表示法是取一适宜的直线段作单位，在矢量的方向上作一直线段表示矢量的大小，用矢号表示矢量的方向，如图 11-1 的 $\mathbf{A}$．矢量的大小，常只用白体字母表示，或在表示矢量字母两旁加两平行短划表示，如 $|\mathbf{A}|$．矢量的方向常用单位矢量 $\mathbf{a}^0$ 表示．**单位矢量**定义为：

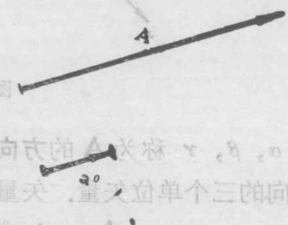

图　11-1

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\left(\text{或 } \frac{\mathbf{A}}{A}\right)$$

可见单位矢量无量纲，数值为 1，方向即所表示的矢量的方向．可写为：$\mathbf{A} = A\mathbf{a}^0$．

矢量的坐标表示法　这里以**直角坐标制**为例，如图 11-2．以矢量 $\mathbf{A}$ 为对角线作矩形体．矢量 $\mathbf{A}$ 的始端为原点 O，矩形体三边沿坐标轴．矢量 $\mathbf{A}$ 在三个坐标轴的投影 $\mathbf{A}_x$，$\mathbf{A}_y$ 和 $\mathbf{A}_z$，称为 $\mathbf{A}$ 的坐标分量．令 l、m、n 表示矢量 $\mathbf{A}$ 的**方向余弦**即：

$$l = \cos\alpha = A_x/A, \quad m = \cos\beta = A_y/A,$$
$$n = \cos\gamma = A_z/A. \qquad (11\text{-}1)$$

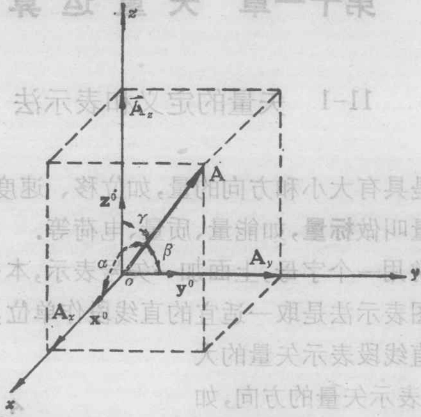

图 11-2

角 α, β, γ 称为 $\mathbf{A}$ 的**方向角**. 令 $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{z}^0$ 表沿坐标轴正向的三个单位矢量. 矢量 $\mathbf{A}$ 可写作:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{x}^0 + A_y\mathbf{y}^0 + A_z\mathbf{z}^0 \qquad (11\text{-}2)$$

$\mathbf{A}$ 的大小,即:

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (11\text{-}3)$$

可见 $\mathbf{A}$ 的单位矢量:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{A}}{A} = l\mathbf{x}^0 + m\mathbf{y}^0 + n\mathbf{z}^0 \qquad (11\text{-}4)$$

一个矢量的方向余弦有下关系:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (11\text{-}5)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 可平行移动到坐标的任何位置,它的坐标分量仍旧相同,式(11-2)仍然成立.

其它坐标制的表示法见后节.

例 11-1 已知 $|\mathbf{A}| = 10$ 单位，它的单位矢量 $\mathbf{a}^0 = 0.2\mathbf{x}^0 + 0.5\mathbf{y}^0 + 0.4\mathbf{z}^0$ 求 $\mathbf{A}$ 及与 $\mathbf{A}$ 方向相反、大小为 $\mathbf{A}$ 的一半的矢量 $\mathbf{B}$.

解:

所求的矢量

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}^0 = 10 \times (0.2\mathbf{x}^0 + 0.5\mathbf{y}^0 + 0.4\mathbf{z}^0)$$
$$= 2\mathbf{x}^0 + 5\mathbf{y}^0 + 4\mathbf{z}^0$$

与 $\mathbf{A}$ 方向相反的单位矢量:

$$\mathbf{b}^0 = -\mathbf{a}^0 = -0.2\mathbf{x}^0 - 0.5\mathbf{y}^0 - 0.4\mathbf{z}^0$$

故所求矢量

$$\mathbf{B} = 5 \times (-0.2\mathbf{x}^0 - 0.5\mathbf{y}^0 - 0.4\mathbf{z}^0)$$
$$= -1.0\mathbf{x}^0 - 2.5\mathbf{y}^0 - 2.0\mathbf{z}^0$$

例 11-2 求矢量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{x}^0 + 3\mathbf{y}^0$ 和矢量 $\mathbf{B} = -\mathbf{x}^0 + 2\mathbf{y}^0 + 4\mathbf{z}^0$ 的夹角 θ.

解:

方向余弦为: $A = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

$$\cos\alpha_A = 2/\sqrt{13}, \quad \cos\beta_A = 3/\sqrt{13}, \quad \cos\gamma_A = 0$$

又

$$B = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

方向余弦为:

$$\cos\alpha_B = -1/\sqrt{21}, \quad \cos\beta_B = 2/\sqrt{21}, \quad \cos\gamma_B = 4/\sqrt{21}$$

由解析几何学公式，两直线夹角的余弦:

$$\cos\theta = \cos\alpha_A \cdot \cos\alpha_B + \cos\beta_A \cdot \cos\beta_B + \cos\gamma_A \cdot \cos\gamma_B = -2/16.52 + 6/16.52 + 0 = 4/16.52 = 0.242 \qquad (11\text{-}6)$$

夹角 $\theta = 76°$.

11-2 矢量的代数运算

矢量相等：两个矢量大小相等，方向相同，叫做矢量相等．例如矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 大小相等，方向互相平行且同向，两矢量就相等，可写为：$\mathbf{A}=\mathbf{B}$．如矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{C}$ 大小相等，但方向相反，则写为：$\mathbf{A}=-\mathbf{C}$．

矢量相加：设有两矢量：$\mathbf{A}=A_x\mathbf{x}^0+A_y\mathbf{y}^0+A_z\mathbf{z}^0$，$\mathbf{B}=B_x\mathbf{x}^0+B_y\mathbf{y}^0+B_z\mathbf{z}^0$．要将这两矢量相加，可将它们相应的坐标分量相加，即得合成矢量 $\mathbf{C}$ 的坐标分量．

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x)\mathbf{x}^0+(A_y+B_y)\mathbf{y}^0+(A_z+B_z)\mathbf{z}^0=C_x\mathbf{x}^0+C_y\mathbf{y}^0+C_z\mathbf{z}^0=\mathbf{C}$$

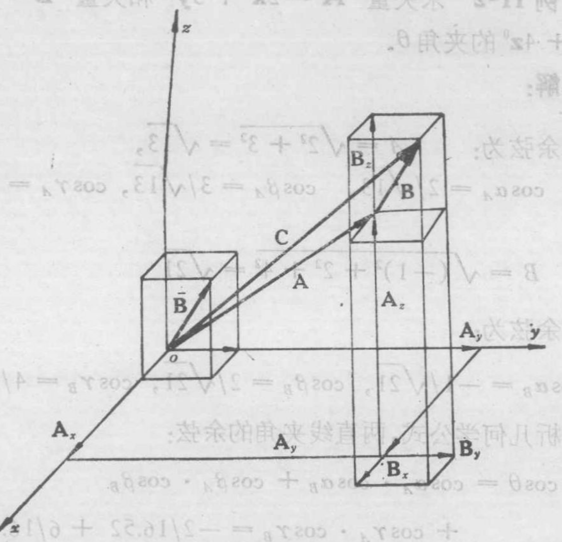

图 11-3

作图法相加，可将矢量 $\mathbf{B}$ 平行移动，使其始端到 $\mathbf{A}$ 的终

端，则自 **A** 的始端到 **B** 的终端作一矢量，即得合成矢量 **C**，参见图 11-3 所示.

两矢量相加，次序可互换，如：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

两矢量相减，如 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$，将 **A** 加上$(-\mathbf{B})$即得合成矢量(差量). 作图可用此法. 用坐标分量计算为：

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=(A_x-B_x)\mathbf{x}^0+(A_y-B_y)\mathbf{y}^0+(A_z-B_z)\mathbf{z}^0=C_x\mathbf{x}^0+C_y\mathbf{y}^0+C_z\mathbf{z}^0=\mathbf{C}$$

若干个矢量相加减，可以类推.

如有三个以上矢量相加，作图法可将各个矢量平行移动依次使一个矢量的始端与前一个矢量的终端连接，最后作自第一个矢量的始端至末个矢量的终端的矢量即得合成矢量，如图 11-4 所示.

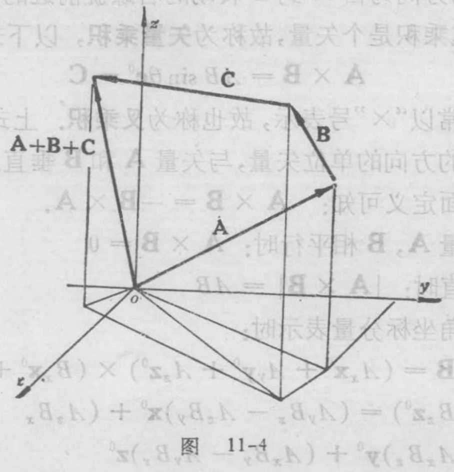

图 11-4

标量乘积：矢量 **A** 和矢量 **B** 的大小相乘，并乘以两矢量间的夹角 θ 的余弦，所得的积是一个标量，称为两矢量的**标量乘积**，以式表示，即：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta \qquad (11\text{-}7)$$

标量乘积常以点号表示，故也称为**点乘积**.

据定义可知：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

A, **B** 两矢量同向时：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB,\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A^2$$

A, **B** 两矢量相垂直时：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$$

以直角坐标表示时：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(A_x\mathbf{x}^0+A_y\mathbf{y}^0+A_z\mathbf{z}^0)\cdot(B_x\mathbf{x}^0+B_y\mathbf{y}^0+B_z\mathbf{z}^0)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{11-8}$$

注意：$\mathbf{x}^0\cdot\mathbf{x}^0=1,\ \mathbf{x}^0\cdot\mathbf{y}^0=0$ 等等.

矢量乘积：矢量 **A** 与矢量 **B** 的大小相乘，并乘以两矢量之间的夹角 $\theta(<\pi)$ 的正弦，所得的值作为乘积的大小，乘积的方向为自 **A** 到 **B** 转动的右螺旋前进的方向（见图 11-5）．这乘积是个矢量，故称为**矢量乘积**，以下式表示：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\sin\theta\mathbf{c}^0=\mathbf{C} \tag{11-9}$$

矢量乘积常以"×"号表示，故也称为**叉乘积**．上式中 $\mathbf{c}^0$ 表沿矢量乘积的方向的单位矢量，与矢量 **A** 和 **B** 垂直.

据上面定义可知：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

两矢量 **A**, **B** 相平行时：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$

相垂直时：$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB$

以直角坐标分量表示时：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\mathbf{x}^0+A_y\mathbf{y}^0+A_z\mathbf{z}^0)\times(B_x\mathbf{x}^0+B_y\mathbf{y}^0+B_z\mathbf{z}^0)=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{x}^0+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{y}^0+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{z}^0$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{x}^0 & \mathbf{y}^0 & \mathbf{z}^0\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{11-10}$$

注意这里 $\mathbf{x}^0\times\mathbf{x}^0=0,\ \mathbf{x}^0\times\mathbf{y}^0=\mathbf{z}^0$，等等.

任何三个矢量 **A**, **B**, **C** 有:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{11-11}$$

例 11-3 $\mathbf{A}=2\mathbf{x}^0-3\mathbf{y}^0+4\mathbf{z}^0$, $\mathbf{B}=3\mathbf{x}^0+4\mathbf{y}^0$. 求 (a) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}$; (b) 在 $\mathbf{A}-2\mathbf{B}$ 的合成矢量的方向的单位矢量; (c) **A** 在 **B** 的方向的分量.

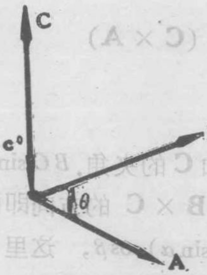

图 11-5

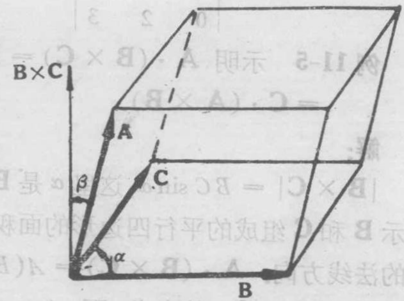

图 11-6

解:

(a) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}=(2-2\times3)\mathbf{x}^0+(-3-2\times4)\mathbf{y}^0+(4-0)\mathbf{z}^0=-4\mathbf{x}^0-11\mathbf{y}^0+4\mathbf{z}^0$

(b) 令 $\mathbf{C}=\mathbf{A}-2\mathbf{B}$

$$|\mathbf{C}|=\sqrt{(-4)^2+(-11)^2+4^2}=\sqrt{153}=12.36$$

单位矢量

$$\mathbf{c}^0=\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|}=\frac{-4\mathbf{x}^0-11\mathbf{y}^0+4\mathbf{z}^0}{12.36}$$

$$= -0.324\mathbf{x}^0 - 0.890\mathbf{y}^0 + 0.324\mathbf{z}^0$$

(c) $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 的方向的分量 $= \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{B}$

$$= \frac{2\times 3 + (-3)\times 4 + 0}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{-6}{5} = -1.2$$

例 11-4 $\mathbf{A} = 3\mathbf{x}^0 + 4\mathbf{y}^0$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{y}^0 + 3\mathbf{z}^0$. 求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 3\times 0 + 4\times 2 + 0\times 3 = 8.$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{y}^0 & \mathbf{z}^0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\mathbf{x}^0 - 9\mathbf{y}^0 + 6\mathbf{z}^0$$

例 11-5 示明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

解:

$|\mathbf{B}\times\mathbf{C}| = BC\sin\alpha$,这里 α 是 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的夹角. $BC\sin\alpha$ 表示 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 组成的平行四边形的面积. $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 的方向即面积的法线方向. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A(BC\sin\alpha)\cos\beta$, 这里 β 为 $\mathbf{A}$ 与 $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 的夹角,而 $A\cos\beta$ 正是由 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 组成的平行六面体的高, 故 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 等于平行六面体的体积. 同理 $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ 也都等于这平行六面体的体积,故它们都相等,参见图 11-6.

11-3 矢量的微分运算、梯度、散度、旋度

设矢量 $\mathbf{A}$ 是标量 t 的连续函数, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, 则当 t 变为 $t + \Delta t$ 时, $\mathbf{A}$的大小及方向一般都要变化,如图 11-7 所示. $\mathbf{A}$ 的变化可写为:

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

我们定义 **A** 对 t 的导数为:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

如**A**表以直角坐标三个分量时,因三个坐标单位矢量为常量,可写 **A** 对 t 的导数为:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dAx}{dt}\mathbf{x}^0 + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{y}^0 + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{z}^0 \quad (11\text{-}12)$$

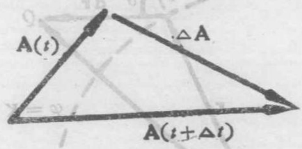

图 11-7

A 的微分可写为:

$$d\mathbf{A} = dA_x\mathbf{x}^0 + dA_y\mathbf{y}^0 + dA_z\mathbf{z}^0 \qquad (11\text{-}13)$$

梯度: 设标量函数φ为坐标的连续函数,可写 $\varphi=\varphi(x, y,z)$. φ 的值随坐标而异,称为场函数. $\varphi=K$ (常数),表示曲面. 在曲面 $\varphi=K$ 取一点 $P(x,y,z)$,并在无限接近处取一邻点 $Q(x+dx,y+dy, z+dz)$, 见图 11-8. 在Q点的函数对P点的函数的变化将为:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

令矢量 **r** 表示 OP 矢量. 据式 (11-13) 可写:

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{x}^0 + dy\mathbf{y}^0 + dz\mathbf{z}^0$$

我们可定义一个矢量:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{x}^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{y}^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{z}^0$$

可见 $$d\varphi = \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = Gdr\cos\theta \qquad (11\text{-}14)$$

这里的 θ 为 **G** 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角. 自上式可写为:

$$G\cos\theta = \frac{d\varphi}{dr} \qquad (11\text{-}15)$$

上式表示 $\mathbf{G}$ 在 $d\mathbf{r}$ 的投影分量等于 φ 对 r 的变化率. 如果点 Q 和点 P 同在一曲面 $\varphi=K$ 上，则 $d\varphi=0$，$d\mathbf{r}$ 将在切线方向. 由式(11-14)可见 θ 为 $90°$，即 $\mathbf{G}$ 与 $d\mathbf{r}$ 垂直，就是说 $\mathbf{G}$ 在曲面 $\varphi=K$ 的法线方向上. 如果 $d\mathbf{r}$ 与法线方向一致，而可写为 $d\mathbf{r}=d\mathbf{n}$，$\theta=0$，于是

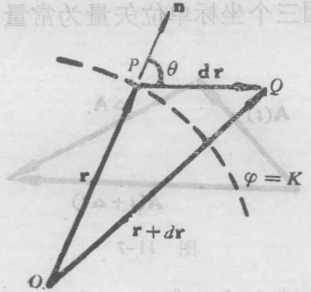

图 11-8

$$G=\frac{d\varphi}{dn} \quad (11\text{-}16)$$

这时的 G 的值最大，且等于函数 φ 沿法线方向的变化率. 因此矢量 $\mathbf{G}$ 被称为函数 φ 的梯度，常以符号 $\mathrm{grad}\varphi$ 表示函数 φ 的梯度，即

$$\mathbf{G}=\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{x}^0+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{y}^0+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{z}^0 \quad (11\text{-}17)$$

在微分运算中“grad”是一个微分算符，常简写为“∇”，读为“del”或“nabla”，可写为:

$$\mathrm{grad}=\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{x}^0+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{y}^0+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{z}^0 \quad (11\text{-}18)$$

故函数 φ 的梯度可写为:

$$\mathbf{G}=\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi \quad (11\text{-}19)$$

算符“∇”还有二种运算常用于矢量场函数. 所谓矢量场函数即矢量随坐标而变的函数. 第一种运算是 ∇ 和一矢量场函数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 的标量乘积，称为 $\mathbf{A}$ 的**散度**，也常写为 $\mathrm{div}\mathbf{A}$，即:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11\text{-}20)$$

算符“∇”与矢量场函数 $\mathbf{A}$ 的第三种运算是矢量乘积，称为 $\mathbf{A}$ 的**旋度**，也常写为 $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 或 $\mathrm{curl}\mathbf{A}$，即：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{curl}\mathbf{A}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{x}^0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{y}^0$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{z}^0$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{y}^0 & \mathbf{z}^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{11-21}$$

散度和旋度的运算后节还要讨论.

算符∇自身的标量乘积：

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11-22}$$

这是一个二阶的微分算符，称为拉普拉斯算符.

例 11-6 设标量场函数为 $\varphi = kx^2yz$ 求φ的梯度和这个梯度的散度及旋度.

解：

φ的梯度：$\nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{x}^0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{y}^0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{z}^0$

$$= 2kxyz\mathbf{x}^0 + kx^2z\mathbf{y}^0 + kx^2y\mathbf{z}^0$$

$\nabla\varphi$ 的散度：$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = 2kyz$

$\nabla\varphi$ 的旋度：

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{y}^0 & \mathbf{z}^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2kxyz & kx^2z & kx^2y \end{vmatrix}$$

$$= (kx^2 - kx^2)\mathbf{x}^0 + (2kxy - 2kxy)\mathbf{y}^0$$