

七位對數表

VEGA

LOGARITHMISCH-
TRIGONOMETRISCHES
HANDBUCH

上海萬錫書局印行

GEORG'S FREIHERRN VON VEGA
LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHES
HANDBUCH

**NEUE VOLLSTÄNDIG DURCHGESEHENE UND ERWEITERTE
STEREOTYP-AUSGABE**

BEARBEITET

VON

-DR. C. BREMIKER

★

VIERUNDNEUNZIGSTE AUFLAGE

VAN CHONG BOOK COMPANY

House 9, Passage 7, Chengtu-Road
Shanghai, China.
Tel. 38397

1952

VORWORT

Die vorhandenen siebenstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln lassen sich in drei Klassen bringen. Während bei allen der erste Theil, welcher die Logarithmen der natürlichen Zahlen enthält, so ziemlich derselbe ist, unterscheiden sie sich in dem zweiten, trigonometrischen Theil dadurch, dass die erste Klasse die Logarithmen der trigonometrischen Linien für den grössten Theil des Quadranten nur für jede volle Minute giebt, die zweite für jede 10^{te} Secunde und die dritte für jede einzelne Secunde. Die ältesten siebenstelligen Logarithmentafeln gehören der ersten Klasse an, wie die von Sherwin, London 1705. Sie enthielt die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 und neben den Sinus, Tangenten und Secanten auch deren Logarithmen von Minute zu Minute. Diese Tafel hat bis gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts mehrere Auflagen erlebt und nach ihrem Muster sind bis auf die neueste Zeit unzählige Logarithmentafeln bearbeitet, theils mit Hinweglassung der natürlichen Sinus und Tangenten, welche wenig gebraucht werden, theils vermehrt um andere mehr oder weniger nützliche Zugaben. Gardiner, welcher im Jahre 1741 eine dritte Auflage der Sherwinschen Tafel besorgte, bearbeitete gleichzeitig eine von 10 zu 10 Secunden fortschreitende Tafel, welche als die erste dieser Art, 1742 zu London in Gross-Quart erschien¹⁾. Eine zweite Auflage derselben ebenfalls in Gross-Quart, welche um die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede einzelne Secunde bis 4° vermehrt wurde erschien 1770 zu Avignon²⁾. Nach letzterer wurden die Tables

1) Tables of Logarithms.

2) Tables de Logarithmes.

portatives von Callet bearbeitet, die, in erster Auflage 1783 zu Paris erschienen, später stereotypirt, wegen ihres bequemen Formats bald die früheren Tafeln verdrängten, und bis auf die neueste Zeit den Vorrang behaupteten. Die erste Tafel der 3^{ten} Art ist die grosse Taylor'sche Tafel, welche 1792 zu London erschien. Eine andere im Jahr 1829 zu Paris erschienene Tafel dieser Art, die Bagay'sche¹⁾, hat die grosse Zahlenmenge durch Anwendung einer kleineren Ziffer in ein mässigeres Format gebracht. Zu den Tafeln der 1^{sten} und 2^{ten} Klasse sind noch zu rechnen, die für die Centesimal-Eintheilung des Quadranten berechneten siebenstelligen Logarithmentafeln, die von Hobert und Ideler²⁾, welche von Hundertel zu Hundertel Centesimalgrad fortschreitet und die im Jahr IX der Republik von Delambre herausgegebene Tafel³⁾, welche ein noch zehnmal geringeres Intervall hat, nämlich von 10 Centesimal-Secunden.

Wenn für eine fünfstellige Tafel das Intervall von einer Minute ein passendes genannt werden kann, weil die Differenzen nicht zu gross werden, um den Proportionaltheil für Secunden noch mit Leichtigkeit im Kopfe berechnen zu können, so ist dasselbe Intervall für eine siebenstellige Tafel doch von jeher als ein höchst unbequemes erkannt worden, weshalb schon Gardiner für eine Verringerung des Intervalls Sorge trug. Es ist sogar nothwendig, das Intervall noch weiter und bis auf eine Secunde zu verringern, wenn man zur Bedingung macht, dass der Proportionaltheil auch hier sich soll im Kopfe ausrechnen lassen. Dieses kleinste Intervall hat aber mehrere neue Uebelstände im Gefolge, welche den Vortheil der kleineren Differenzen so sehr verkümmern, dass Tafeln dieser Art nie so recht in Gebrauch gekommen sind, wenigstens nicht bei Rechnern von Fach. Das grosse Format derselben, die zu grosse Menge nebeneinander stehender Columnen auf jeder Seite und der Umstand, dass doch noch bei weitem nicht alle Ziffern Platz finden können, sondern die Anfangsziffern der Logarithmen über die Columnen müssen geschrieben, die Differenzen ganz fortgelassen werden, so dass der Rechner sich die letzteren jedesmal erst bilden muss, machen den Vortheil des kleinern Intervalls sehr fraglich.

1) Nouvelles Tables astronomiques et hydrographiques. Paris, 1829.

2) Neue trigonometrische Tafeln. Berlin, 1799.

3) Tables trigonométriques décimales, calculées par Ch. Borda.

Die bisherigen Ausgaben des logarithmisch trigonometrischen Handbuchs von Vega hatten in dem trigonometrischen Theile das Intervall von 1 Minute. Die gegenwärtige Bearbeitung hat es sich angelegen sein lassen, nicht allein durch Einführung des Intervalls von 10 Secunden für den ganzen Quadranten der Tafel eine höhere Stelle anzuweisen, sondern ihr auch alle Vorzüge zu sichern, welche durch Form und innere Einrichtung erreichbar für ein erleichtertes Aufschlagen der Logarithmen nur irgendwie beitragen können, oder doch als solche bis jetzt erkannt sind. Obgleich hierdurch die Tafel eine nicht unbedeutende Erweiterung erhalten hat, ist der Herr Verleger doch keineswegs gesonnen, den Preis zu ändern, so dass die Vorzüge einer grössern Ausgabe sich mit den Vortheilen der früheren kleineren, dem geringeren Preise werden vereinigt finden, wie es bei Werken dieser Art wohl noch nicht vorgekommen ist.

Was die verbesserte Einrichtung der Tafel selbst betrifft, so ist zu erwähnen:

1. Die systematische Anordnung der Seiten jeder Abtheilung, welche dahin zielt, dass wenn einmal die richtige Seite des Buches aufgeschlagen liegt, bei nur geringer Uebung das Auge sich unwillkürlich nach der Stelle richtet, wo der verlangte Logarithme zu suchen ist. Denn nichts erschwert den Gebrauch einer Tafel mehr, als unstätes Umhersuchen. Um dieses auf eine für das Auge wohlthuende Art zu erreichen, sind leicht zu unterscheidende Haupt- und Unter-Abtheilungen angebracht, welche dem Auge den nöthigen Ruhepunkt gewähren. In dem ersten Theile sind auf jeder Seite vier solche Ruhepunkte, nämlich auf der Seite links die den Zahlen 10, 20, 30 und 40 entsprechenden Zeilen, welche in doppelte Linien eingeschlossen sind, auf der rechten Seite die Zeilen, welche den Zahlen 60, 70, 80 und 90 entsprechen. Die zwischenliegenden, den Zahlen 1 bis 9 gegenüber stehenden Zeilen sind dann wiederum von drei zu drei durch schwache Räume gesondert. Im zweiten Theile haben die Seiten 61 Zeilen. Da hierdurch fünf Hauptabtheilungen entstehen, so ist die dritte, welche von oben oder von unten der Zahl 30 gegenübersteht, noch besonders durch stärkere Linien hervorgehoben; die Unter-Abtheilungen sind dieselben geblieben. Im dritten Theile endlich sind die den vollen Minuten entsprechenden Zeilen in doppelte Linien eingeschlossen und die je fünfte Minute durch stärkere Linien kenntlich gemacht. Diese Einrichtung, welche zuerst bei der

sechsstelligen Tafel ¹⁾) versucht wurde, gewährt zugleich den Vortheil, dass bei auf- und niedersteigendem Argumente, wie im 2ten und 3ten Theile, die Linien zu den Zahlen am linken und rechten Rande der Seite immer dieselbe Lage haben, welches durch die bisher üblichen einfachen Horizontallinien nicht zu erreichen ist.

2. Die Ziffer. Es ist schon öfter von Mathematikern und Astronomen die Bemerkung gemacht worden, dass die in den letzten Decennien Mode gewordenen stark schattirten und gleich hohen Ziffern, wenn auch der Druck im Ganzen sich besser annimmt, bei weitem nicht so gut zu lesen sind, als die älteren. Hierzu kommt, dass die neuere Ziffer leicht in den feineren Theilen beschädigt wird, so dass 1 und 4, 0, 6 und 9, 3, 5 und 8 kaum mehr zu unterscheiden sind. Auch ist es häufig der Fall, dass eine solche stark schattirte Ziffer, die ohnehin durch ihre tiefe Schwärze schon das Auge blendet, einen viel zu geringen weissen Raum übrig lässt, dass nämlich die Ziffern sowohl unter sich als auch den Linien, welche die Spalten trennen viel zu nahe stehen. Alle diese Uebelstände erschweren das Aufschlagen und ermüden das Auge. Es ist daher eine Ziffer genommen, welche, nur äusserst wenig schattirt, sich der älteren Form mehr nähert, theilweise über und unter die den Hauptkörper einschliessenden Parallellinien hinwegragt, den weissen Grund nicht zu sehr bedeckt und deren Grösse weder zu klein ist, um von mittelmässig starkem Auge leicht erkannt zu werden noch zu gross um die erforderliche Menge in ein mässiges Format bringen zu können. Der Schnitt der Ziffer ist charakteristisch verschieden, so dass selbst bei geringen Beschädigungen, die nach langem Gebrauche nicht ausbleiben, nicht leicht Verwechselungen zu befürchten sind. Auf eine zweckmässige Vertheilung des Raumes, den die Ziffern und Linien einnehmen, ist besonders geachtet und erst nach vielfachen Versuchen und mit Berücksichtigung aller den leichten Gebrauch der Tafeln fördernden Umstände die Form der Seiten festgestellt.

3. Man findet häufig in dem trigonometrischen Theile neben den Graden, Minuten und Secunden auch noch eine Spalte, welche denselben Bogen in Zeitmaass angiebt; ebenso im ersten Theile noch eine oder zwei Spalten für die in Grade, Minuten und Secunden verwandelte einfache oder zehnfache nebenstehende Zahl, als Secunden gedacht. Dieses und Aehnliches ist überall vermieden,

1) *Logarithmorum VI decimalium nova tabula Berolinensis.* Berlin, 1852.

da die doppelten und dreifachen Argumente, welche in nautischen Tabellen eher an ihrer Stelle sind, auf den einfachen Gebrauch einer siebenstelligen Tafel mehr störend einwirken als von Nutzen sind. Dagegen ist im 1^{sten} Theile am Fusse der Tafel die doppelte Bogenverwandlung des Arguments angegeben nebst den Logarithmen von $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ von 10 zu 10 Secunden, von 0 bis 2° 46' 40". Diese letzteren vermitteln den Uebergang von Log Bogen zu Log Sinus und Log Tang, und sind in der Geodäsie von besonderm Werthe, wo mitunter lange Rechnungen mit kleinen in der Regel in Secunden ausgedrückten Bogen auszuführen sind, bei welchen aber vier oder fünf Decimalstellen der Secunde gewahrt werden sollen.

4. Zur Erleichterung der Interpolation sind im ersten und dritten Theile Differenztafelchen hinzugefügt. Mit Hülfe einer kleineren Ziffer ist es ermöglicht, auch auf den ersten Seiten für jede vorkommende Differenz ein solches Tafelchen zu geben. Diese Tafelchen gehen die Zehntheile der ganzen Differenz genau an, so dass durch successive Addition der Zehntel, Hundertel und Tausendtel der Proportionaltheil bis auf die letzte Ziffer genau sich berechnet, welches bei der gewöhnlichen Einrichtung nicht der Fall ist. Die sehr häufig vorkommende Einrichtung, wornach das Differenztafelchen für die ganze Gegend, wo es placirt ist, ohne Rücksicht, ob die Differenz um eine Einheit grösser oder geringer ist, zur Anwendung kommt, musste als ungenau verworfen werden. Wenn im dritten Theile die Tafelchen im Anfange, d. h. von 5° an, wegen Mangel an Raum nur für Differenzen, die um 10 Einheiten verschieden sind, angebracht werden konnten, dann von 5 zu 5, von 3 zu 3 und endlich von 24 Grad an erst für jede Differenz, so ist der Vortheil, welchen sie bei der Interpolation gewähren, doch um so höher anzuschlagen als andere Tafeln gar Nichts bieten.

5. Eine besondere Aufmerksamkeit ist auf den richtigen Ansatz der siebenten Decimalstelle verwendet worden. Da der genaue Werth eines Logarithmen, wenn er nicht einer ganzen Zahl gleich ist, nur durch unendlich viele Decimalstellen ausgedrückt gedacht werden kann, so betragen die auf die siebente Stelle folgenden Decimalstellen nothwendig mehr oder weniger als fünf Einheiten der achten Stelle. Im ersten Falle muss die siebente Stelle um eine Einheit erhöht werden, im letzteren nicht, damit der Tafel-

Logarithmus immer um weniger als eine halbe Einheit der letzten Stelle von dem wahren Werthe des Logarithmen abweiche. Für den richtigen Ansatz der siebenten Stelle ist daher die Kenntniss der folgenden Ziffern erforderlich. Eine Vergleichung mit Vega's *Thesaurus logarithmorum* ¹⁾ liess unter den Logarithmen der Zahlen nur diejenigen als zweifelhaft übrig, bei welchen der zehnstellige Logarithmus auf 500 endigte, und welche daher bis zur fünfzehnten Stelle nachgerechnet wurden. Da die zehnte Decimalstelle sich durchgängig, auch bei vielen andern Nachrechnungen als genau erwies, so war es nicht nöthig auch noch die auf 499 und 501 endigenden Logarithmen auf eine grössere Menge von Decimalstellen zu berechnen. Anders verhielt es sich aber mit der trigonometrischen Abtheilung. Der *Thesaurus logarithmorum* kann hier, mit Ausnahme weniger Fälle, welche von Vega selbst angegeben sind, und soweit das Argument von 10 zu 10 Secunden fortschreitet, wohl nur als ein Abdruck von Vlack ²⁾ angesehen werden, da vielfache Vergleichungen fehlerhafter Stellen keinen Unterschied zwischen beiden Tafeln ergeben haben. Die Unsicherheit der letzten Stelle steigt aber bis auf vier Einheiten, einzelne Fälle, wo 5 und 6 Einheiten vorkommen, ungerechnet, und es war daher nöthig alle Logarithmen nachzurechnen, deren Endziffern zu 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503 und 504 im *Thesaurus* angesetzt sich finden, weil eine Berichtigung um mehr als 4 Einheiten die letzte Stelle des siebenstelligen Logarithmen ändern konnte ³⁾. Diese Rechnungen sind mit Hilfe der Brigg'schen vierzehnstelligen Tafel ⁴⁾, deren Angaben durch Bildung von Differenzreihen geprüft wurden, ausgeführt und es hat sich gezeigt, dass in neueren Tafeln und auch in den früheren Ausgaben dieses Handbuchs viele Logarithmen desshalb unrichtig angesetzt sind, weil man den Angaben des *Thes. log.* zu viel Vertrauen geschenkt hat. Zur Vergleichung der Sinus und Tangenten, welche von Secunde zu Secunde fortschreiten gab der *Thes. log.* nur bis 2 Grad die zehnziffrigen Logarithmen und es musste daher für das Intervall von 2 bis 5 Grad ein anderes Mittel aufgesucht werden. Die Interpolation aus der Trig. britt., welche

1) *Thesaurus logarithmorum completus*. Leipzig 1794.

2) *Trigonometria artificialis*. Gouda 1688.

3) Es kommen auch andere Fehler vor, die keineswegs als Druckfehler sondern als Rechenfehler angesehen werden müssen. So sind die drei letzten Ziffern 517 in *log tang 0° 2' 7"* um 90 zu hoch angegeben. Sinus und Contangente haben denselben Fehler.

4) *Trigonometria britannica*, herausgegeben von Gellibrand, Gouda 1633.

sich zunächst darbot, zeigte sich nach mehrfachen Versuchen zu zeitraubend, weil sechs Differenzreihen in Rechnung zu ziehen waren. Die Interpolation zwischen die von 10 zu 10 Secunden gegebenen zehnziffigen Logarithmen schien misslich, da die Unsicherheit der letzten Stelle bei den interpolirten Zahlen noch grösser werden musste. Es wurde daher der directen Berechnung der Vorzug gegeben, um so mehr, als diese bei schicklicher Anordnung am schnellsten und sichersten zum Ziele führte. Zuerst wurden für das ganze Intervall von 0 bis 5 Grad von 400 zu 400 Secunden die Logarithmen von $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ berechnet; die für diese Functionen nach Potenzen von x fortlaufenden Reihen convergiren sehr schnell, so dass man nur vier Glieder derselben gebraucht um den Logarithmus auf 14 Decimalstellen genau zu erhalten, und vier Differenzreihen genügen zur Interpolation. Nachdem diese durch Differenzen geprüft, und durch Interpolation auf das Intervall von 100 Secunden gebracht waren, wurden die ersten zehn Stellen weiter interpolirt bis auf das Intervall von 1 Secunde, hierzu die Logarithmen der Zahlen addirt, wodurch sich die sämmtlichen Sinus und Tangenten bis auf zehn Stellen ergaben. Nachdem noch diejenigen der auf solche Weise erhaltenen Logarithmen, welche sich auf 499, 500 und 501 endigten, wegen einer durch die Interpolation entstandenen Unsicherheit von $1\frac{1}{2}$ Einheiten auf weitere 3 Stellen nach dem ersteren auf 14 Stellen entworfenen Tableau durch Interpolation berechnet waren, wobei die vierzehnstelligen Logarithmen der natürlichen Zahlen aus der Briggschen Tafel¹⁾ zur Anwendung kamen, war das Material vorhanden, um jeden in die vorliegende Tafel aufzunehmenden Logarithmus mit aller Schärfe angeben zu können, unabhängig von anderweitigen Angaben. Nachdem aber die siebente Decimalstelle feststand, wurden die vorhergehenden sechs Decimalstellen durch Differenzen geprüft, und dadurch die Ueberzeugung ihrer Richtigkeit gewonnen.

Zur Erlangung eines möglichst fehlerfreien Druckes sind vor der Stereotypie drei Probeabzüge gelesen und einer nach den fertigen Platten. Die beiden ersten Probedrucke wurden durch Vergleichung mit dem Manuscript berichtigt, der dritte dagegen durch Differenzen geprüft um gegen Schreibfehler im Manuscript

1) H. Briggsii arithmetica logarithmica. London 1624.

gesichert zu sein. Endlich ist die letzte Decimalstelle mit Gardiner, Babbage¹⁾, Callet²⁾ und theilweise mit Taylor³⁾ verglichen. Gardiner, welcher seine siebenstelligen Logarithmen ebenfalls durch Abkürzung der zehnstelligen nach Vlack genommen, ist sehr vorsichtig zu Werke gegangen, um die siebente Stelle richtig zu erhalten. Wenn er in der Vorrede zu seiner Tafel sagt, dass er die letzte Stelle von Vlack vorher durch Differenzen geprüft und viele Fehler berichtigt habe, so muss dieses in der That mit vieler Umsicht geschehen sein, denn die Vergleichung hat nur zwei Fälle ergeben, wo die letzte Stelle nicht ganz richtig angesetzt ist, nämlich: $\log 52943$ und $\log \cos 24^\circ 55' 30''$, welche zu 7238086 und 9.9575404 angegeben, beide um eine Einheit der letzten Stelle zu gross sind. Der genaue Werth dieser Logarithmen ist 7238085 4683559 und 9.9575403 4999866. Diese Sorgfalt, welche sich auch auf denjenigen Theil ausdehnt, welcher die Logarithmen für jede Secunde von 0 bis 72 Minuten enthält, scheint bei den späteren Bearbeitern von Logarithmen-Tafeln nicht die verdiente Würdigung gefunden zu haben, endlich sogar völlig in Vergessenheit gerathen zu sein, wie theilweise aus den Zusätzen erhellt, welche die späteren Ausgaben des Gardiner erhalten haben, theilweise daraus, dass nach dem Erscheinen des *Thesaurus logarithmorum*, worin wie schon erwähnt, nur wenige Logarithmen des Vlack berichtigt, die meisten unverändert abgedruckt sind, die Herausgeber von Tafeln sich hiernach richteten, entweder die Mühe einer scharfen Kritik scheuend oder verblendet durch die Ankündigung des Preises von einem Dukaten für jede fehlerhafte Stelle, während keine der früheren Tafeln etwas Aehnliches gewagt hatte. Nur hierdurch lässt es sich erklären, dass in neueren Tafeln mehrere Logarithmen auf den fehlerhaften Werth, wie er aus Vlack sich ergibt, zurückgeführt sind, ungeachtet solche im Gardiner richtig stehen. Beispiele sind: 1. der $\log \sin$ von $2^\circ 29' 50''$, dessen genauer Werth 8,6391970 5001389 ist, und dessen 7te Stelle von Gardiner sehr richtig als 1 angegeben wird. Da aber in Vlack und Vega der zehnstellige Logarithmus zu 6391970 499 angegeben ist, so findet man in den neueren Tafeln und auch im Taylor 0 als siebente Stelle. 2. Der

1) Table of logarithms. London 1826.

2) Tables portatives de logarithmes. Paris 1796. Tirage 1821.

3) Tables of logarithms. London 1792.

log tang von $5^{\circ} 7' 40''$ ist 8,9529682 4994086. Vlack und Vega haben 9529682 501. Gardiner giebt als 7te Stelle 2, die neueren Tafeln incl. Taylor dagegen 3. 3. Der log tang von $7^{\circ} 23' 50''$ ist gleich 9,1133684 5003401, also 5 die richtige siebente Stelle. Vlack und Vega aber haben 1133684 499, wesshalb die neueren Tafeln und auch Taylor 4 angeben. 4. Der log tang $7^{\circ} 59' 0''$ ist 9,1468849 4989462 also 9 in siebenter Endziffer. Vega und Vlack haben 1468849 501 und die neueren Tafeln setzen daher 50 als letzte Stellen. 5. Der log sin von $20^{\circ} 9' 0''$ ist 9,5371628 5008911, dagegen in Vlack und Vega 5371628 499. Gardiner giebt 9, die Neueren 8 an der siebenten Stelle.

Die im Jahre 1770 zu Avignon veranstaltete zweite Auflage des Gardiner enthält ausser den sämtlichen Logarithmen der ersten Auflage, die ohne Abänderung aufgenommen wurden ¹⁾, die log sin für jede Secunde von $72'$ bis 4 Grad, und die log tang für jede Secunde zwischen 0 und 4 Grad. Die Logarithmen dieser Erweiterung haben nicht den Grad von Schärfe, wie die aus der älteren Tafel übernommenen, wenngleich ihnen eine Genauigkeit nicht abzusprechen ist, welche immer noch den späteren Tafeln hätte zum Muster dienen können. Die Vergleichung ergab nämlich 22 um eine Einheit fehlerhafte Stellen unter 22032 Logarithmen. Diese beiden Ausgaben haben Grossquart-Format, welches für den Gebrauch etwas unbequem ist. Aus diesem Grunde und weil die Gardinerschen Tafeln anfangen seitener zu werden, bearbeitete Callet eine neue logarithmisch-trigonometrische Tafel, welche, in der Officin von Firmin Didot gedruckt, die erste war, bei welcher der Plattendruck versucht wurde und zur Anwendung kam. Ausser einer langen Einleitung über die Berechnung und Anwendung der Logarithmen, ausser Tafeln der natürlichen Sinus und Cosinus, Tangenten und Cotangenten, den Neperschen und Briggschen Logarithmen der Zahlen auf 20 und 60 Decimalstellen, fanden die sämtlichen Logarithmen der Avignonschen Ausgabe des Gardiner Aufnahme. Die letzteren wurden noch dahin erweitert, dass die log sin und log tang von Secunde zu Secunde, welche die Avignonsche Ausgabe bereits bis 4 Grad enthielt, noch um einen Grad weiter berechnet und hinzugefügt wurden. Hierbei ist aber der durch Gardiner eingeführte Grad von Genauigkeit gänzlich ausser Acht gelassen.

1) Einige Druckfehler, welche in den 29 Jahren ihres Gebrauches entdeckt waren, wurden berichtigt, wogegen viele neue Druckfehler entstanden sind.

Eine Vergleichung mit diesem Theile, welcher 6480 Logarithmen enthält, welche in den Ausgaben des Gardiner nicht vorkommen, ergab 1368 Logarithmen, bei welchen die letzte Stelle um eine Einheit fehlerhaft angesetzt ist. Endlich wurde noch die Endziffer sämtlicher 36000 Logarithmen der zweiten Abtheilung mit Taylor, welcher hinsichtlich der Genauigkeit der Endziffer gewöhnlich als Muster aufgestellt wird, verglichen, und jede Differenz, welche sich dabei ergab, einer besondern Untersuchung unterworfen. Hiernach ergaben sich 35 Fälle, in welchen die letzte Stelle bei Taylor um eine Einheit unrichtig ist. Darunter sind 19 mit den fehlerhaften Angaben der Ausgabe Avignon übereinstimmend.

Die Vergleichung der Logarithmen des ersten Theiles mit der äusserst sorgfältig bearbeiteten Tafel von Babbage, in welcher zuerst Grundsätze über die Construction von Tafeln aufgestellt werden, ergab einen Fall, nämlich den Logarithmus von 52943, welcher wie bei Gardiner um eine Einheit zu gross angesetzt ist. Derselbe Fehler ist auch in Callet, Taylor, Delambre und andern älteren Tafeln, offenbar weil alle die Angaben des Gardiner ohne weitere Discussion abgeschrieben haben.

Die erste Correctur dieser Tafel ist von dem Regierungs-Geometer Herrn Lautensach gelesen worden, die zweite von dem Studiosus der Naturwissenschaften Herrn Goldammer, eine dritte Revision von mir nach Differenzen. Nach der Stereotypie haben sich in die Platten-Revisionen getheilt die Herren Volkmann, gegenwärtig Astronom in San Jago und Koch, Diätar im Ministerium für Handel.

Berlin.

BREMIKER.

EINLEITUNG.

Die Brigg'schen Logarithmen, welche als Erleichterungsmittel bei Ausführung grösserer numerischer Rechnungen ausschliesslich gebraucht werden, sind Exponenten der Zahl 10, deren Potenzen den zugehörigen Zahlen gleich sind. Sind nämlich a und b die Logarithmen der Zahlen A und B , so hat man die Gleichungen

$$10^a = A \text{ und } 10^b = B$$

$$\text{oder } \log A = a \text{ und } \log B = b$$

und die Lehre von den Potenzen und Logarithmen leitet hieraus die nachstehenden Gleichungen ab

$$10^{a+b} = AB, 10^{a-b} = \frac{A}{B}, 10^{a \cdot c} = A^c, 10^{\frac{a}{c}} = \sqrt[c]{A}$$

oder logarithmisch geschrieben:

$$\log AB = a + b, \log \frac{A}{B} = a - b, \log A^c = ac, \log \sqrt[c]{A} = \frac{a}{c}$$

woraus man sieht, dass die Logarithmen von Producten, Quotienten gefunden werden, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt oder subtrahirt, die Logarithmen der Potenzen oder Wurzeln aber, wenn man die Logarithmen der Grundzahlen mit dem Exponenten multiplicirt oder dividirt. Die Anwendung dieser vier Formeln, worauf sich das ganze Rechnen mit Logarithmen beschränkt, wird aber dadurch bedingt, dass zu jeder gegebenen Zahl der zugehörige Logarithme mit Leichtigkeit gefunden werden kann, und zu jedem gegebenen Logarithmen wiederum die zugehörige Zahl, welches zu vermitteln der Zweck der Logarithmentafeln ist.

Aus dieser Erklärung der Logarithmen, welche für den praktischen Rechner vollkommen ausreichend und überall maassgebend ist, folgt nun ferner, dass

$\log 1 = 0$	$\log 0,1 = -1$
$\log 10 = 1$	$\log 0,01 = -2$
$\log 100 = 2$	$\log 0,001 = -3$
$\log 1000 = 3$	$\log 0,0001 = -4$
etc.	etc.

und dieses sind die einzigen Zahlen, deren Logarithmus eine ganze Zahl ist. Von allen übrigen Zahlen ist der Logarithmus eine ganze Zahl (Charakteristik oder Kennziffer) mit angehängtem Decimalbruch (Mantisse) und dieser Decimalbruch hat die Eigenthümlichkeit, dass er nie vollständig hingeschrieben werden kann, weil er ohne Ende fortgeht. Glücklicherweise kommen aber nur selten Fälle vor, in welchen die Kenntniss von mehr als sieben Decimalstellen dieses Bruches erforderlich wäre, in der Regel genügen sogar vier oder fünf Stellen und nur in den feinsten Rechnungen wendet man sechs oder sieben an.

TAFEL I.

Um für irgend eine Zahl, welche aus Ganzen und einem Decimalbruch zusammengesetzt ist, den Logarithmus zu erhalten, oder wenn umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus die angehörige Zahl zu suchen ist, wendet man eine Tafel an, worin die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 10000 bis 100000 verzeichnet sind. Eine solche Tafel ist die von Pag. 6 bis Pag. 185. Wenn derselben noch wenige Seiten vorangeschickt sind, mit den Logarithmen von 1 bis 1000, so ist dieses mehr der Bequemlichkeit wegen geschehen, als weil ein Bedürfniss dafür vorhanden gewesen wäre, da diese sämtlichen Logarithmen schon in jener Tafel vorkommen.

Gegeben eine Zahl, gesucht deren Logarithmus.

In der ersten mit N (numerus) überschriebenen Spalte sind die Zehner einer vorgelegten fünfzifferigen Zahl aufzusuchen und in der Horizontal-Reihe desselben N die Einer. Die vier letzten Ziffern des Logarithmen stehen nun da, wo die Horizontalzeile, welche den Zehnern entspricht, mit der Vertica Columnne der Einer zusammentrifft. Die drei ersten Ziffern des Logarithmen stehen in der mit 0 überschriebenen Columnne und sind für sämtliche Ziffern derselben Horizontalreihe gemeinschaftlich. Sind diese drei Ziffern nicht angegeben, so gelten die vorhergehenden, oder

hat die erste der vier letzten Ziffern einen Strich, so gelten als erste drei Ziffern die, welche in der zunächst folgenden Zeile stehen. Es sei z. B. der Logarithme von 24818 zu suchen. Man gehe Pag. 35 in der ersten Vertical-Columnne bis 2481 herunter und nun horizontal nach rechts bis in die mit 8 überschriebene Columnne. Hier findet sich die Zahl 7668. Diese vier letzten Ziffern werden mit den in der Columnne 0 um drei Zeilen früher stehenden Ziffern 394, welche für mehrere Zeilen dieselben bleiben, zusammen gelesen, wodurch man 3947668 erhält. Die Kennziffer, welche in der Tafel nicht mit angegeben ist, ist durchgehend 4, daher der Logarithmus von $24818 = 4,3947668$. Hätte man den Logarithmus von 24833 zu suchen, so würden die vier letzten Ziffern 0292, weil die 0 mit einem Striche versehen ist mit den ersten drei 395 zu verbinden sein, daher $\log 24833 = 4,3950292$. Hat die vorgelegte fünfzifferige Zahl noch Decimalstellen, so wird mit diesem Decimalbruch die Differenz der Logarithmen multiplicirt, und das Product zu dem Logarithmus der ganzen Zahl addirt. Wäre z. B. die vorgelegte Zahl 24833,73, welche zwischen den ganzen Zahlen 24833 und 24834 liegt, so würde man die Logarithmen dieser letzteren Zahlen von einander abziehen, also $0467 - 0292 = 175$ und diese Differenz mit 0,73 multipliciren, wodurch man 128 erhält. Diese 128 sind alsdann noch zu dem Logarithmen 4,3950292 zu addiren, so dass man 4,3950420 als den Logarithmen von 24833,73 erhält. Zur Erleichterung dieser Multiplication sind für jede der auf der aufgeschlagenen Seite des Buches vorkommenden Differenzen kleine Täfelchen beigefügt, welche in der mit P. P. (*partes proportionales*) überschriebenen Spalte unter einander stehen. Diese Täfelchen geben die Zehntel der ganzen Differenz an, woraus sich dann leicht auch die Hundertel, Tausendtel etc. ergeben. In dem vorgelegten Falle kommt das mit 175 überschriebene Täfelchen zur Anwendung, und man entnimmt aus demselben

für 0,7	122,5
0,03	5,25
zusammen . .	127,75

wovon die Decimaltheile weggelassen werden, mit Erhöhung jedoch der letzten Ziffer um eine Einheit, wenn der fortbleibende Decimalbruch mehr als 0,5 beträgt.

Aus den Logarithmen der fünfzifferigen Zahlen lassen sich

aber sehr leicht die aller übrigen Zahlen finden, da solche nur in der Kennziffer von jenen verschieden sind. Hätte man z. B. den Logarithmen von 24,83373 zu suchen, so würde man den Logarithmen von 24833,73 nehmen, und davon den $\log 1000$ abziehen. Da letzterer = 3 ist, so erhält man $\log 24,83373 = 1,3950420$. Eben so ist $\log 248337300 = \log 24833,73 + \log 10000 = 8,3950420$. Ist die gegebene Zahl ein ächter Bruch, z. B. 0,06103, so findet sich auf Pag. 108 der Logarithme von 61030 = 4,7855434 und man hat alsdann $\log 0,06103 = \cancel{1000000} = \log 61030 - \log 1000000 = 4,7855434 - 6$. Dieser Logarithme wird negativ = -1,2144566, wofür jedoch der bequemen Rechnung wegen 8,7855434 - 10 geschrieben wird, so dass die Mantisse als positive Zahl in die Rechnung eingeht. Im Allgemeinen wird man daher aus jeder vorgelegten Zahl, entweder durch Anhängen von Nullen oder durch Absondern der ersten fünf Ziffern, eine fünfzifferige Zahl bilden, dazu den Logarithmen in der Tafel aufsuchen, und die Kennziffer um eine Einheit geringer nehmen, als die Anzahl der Ziffern der vorgelegten ganzen Zahl beträgt. Die Kennziffer eines ächten Bruches wird erhalten, wenn man die Anzahl der nach dem Komma des Decimalbruches folgenden Nullen von 9 abzieht.

Gegeben ein Logarithmus, gesucht die zugehörige Zahl.

Ist ein Logarithmus gegeben und soll die zugehörige Zahl gesucht werden, so suche man zuerst die drei ersten Ziffern der Mantisse in der mit 0 überschriebenen Spalte, alsdann in den mit 0, 1, 2 ... überschriebenen Columnen diejenigen vier Ziffern, welche zunächst kleiner sind als die des vorgelegten Logarithmen. Hierzu entnimmt man aus der Vertical-Column N, die auf derselben Zeile, wo die vier letzten Ziffern gefunden werden, stehenden vier ersten Ziffern der Zahl und die Kopfszahl der Verticalspalte als fünfte. Ist z. B. gegeben der Logarithmus 2,5833980, so findet man auf Seite 62 den Logarithmus 5833915, welcher zur Zahl 38317 gehört. Die Differenz zwischen diesem und dem nächstfolgenden Logarithmen ist 113, die Differenz aber mit dem gegebenen Logarithmen ist 65. Die auf die fünfte Stelle der gefundenen Zahl folgenden Ziffern werden nun gefunden, wenn man 65 durch 113 dividirt, und zwar eine Stelle, wenn dieser Bruch 10 mal, zwei Stellen, wenn er 100 mal, drei Stellen, wenn er 1000 mal genommen wird. Mehr Stellen zu nehmen würde

Nichts nützen, weil die dritte schon unsicher ist. Diese Division wird aber durch das Differenztäfelchen 113 erleichtert. Nimmt man aus demselben das zunächst kleinere Zehntel 56,5 welchem 5 entspricht und zieht dieses von 65 ab, wodurch man 8,5 erhält, so geht man mit dem Zehnfachen hiervon, also mit 85 wieder in dasselbe Täfelchen ein, erhält 7 als zweite Stelle mit der Differenz $85 - 79,1 = 5,9$, mit dessen Zehnfachem, also mit 59 man zum Drittenmal eingeht, um noch 5 zu entnehmen. Die auf die ersten fünf Ziffern folgenden sind also 575 und die sämtlichen Ziffern der zu suchenden Zahl 38317575. Da der gegebene Logarithme aber die Kennziffer 2 hat, so ist das Komma nach der dritten Ziffer zu setzen, daher die gesuchte Zahl selbst = 383,17575. Die Charakteristik könnte übrigens jede beliebige andere sein, das Aufsuchen der Zahl würde doch immer dasselbe bleiben, und nur das Komma würde eine andere Stelle erhalten. Wäre z. B. gegeben der Logarithmus 9.5833980, so würde die zugehörige Zahl aus zehn Ziffern bestehen. Da aber zu der gegebenen Mantisse nur die obigen acht Ziffern der zu suchenden Zahl gefunden werden können, so müssen noch zwei Nullen angehängt werden, wodurch man 3831757500 erhält. Wäre gegeben 7,5833980 — 10 als Logarithme, so würde die zugehörige Zahl = 0,0038317575 sein. Die Berechnung des Proportionaltheils, welche bei einiger Übung und mit Hilfe der Differenztäfelchen leicht im Kopfe gemacht werden kann, so dass keine andere Zahl als die zu suchende wirklich geschrieben wird, stellt sich demnach so:

Gegebener Logarithmus	2,5833980	
Pag. 61. Zahl 383,17	2,5833915	
	Differenz	65
Nach den Differenz - Täfelchen 113	5 . . .	56,5
		85
Ferner	7 . . .	79,1
	5 . . .	59
Gesuchte Zahl = 383,17575		

Bezüglich des Rechnens mit Logarithmen ist zu bemerken, dass Fälle vorkommen können, in welchen von einem Logarithmus wieder der Logarithmus zu nehmen ist. Hat man z. B. eine Zahl mit einem vielzifferigen Exponenten zu potenziren oder die Wurzel zu nehmen nach einem Exponenten, der aus vielen Ziffern zusammengesetzt ist, so würde der Logarithme der gegebenen Zahl mit einer andern grossen Zahl zu multipliciren oder zu dividiren sein, welches wieder am besten mit Logarithmen ausgeführt