

数学建模竞赛 优秀论文评析

SHUXUE JIANMO
JINGSAI YOUXIU
LUNWEN PINGXI

杨桂元 朱家明 编

中国科学技术大学出版社

数学建模竞赛 优秀论文评析

杨桂元 朱家明 编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书精选数学建模竞赛优秀论文(全部是全国大学生数学建模竞赛的获奖论文)15篇,每一篇独立成文。各篇采用相同的行文体例,分为竞赛原题再现、获奖论文精选、论文评析3部分。每一篇精选的获奖论文都按照竞赛论文的格式写作:首先是论文的摘要,然后是论文展开,分为7个部分,分别为问题的重述、问题的分析、模型的假设、主要变量符号说明、模型的建立与求解、模型的结果分析和对模型的评价。每篇论文的末尾列出其引用的参考文献,并且附上对论文的评析,从论文特色和不足之处两方面评价论文的建模方法和写作技巧。

本书可作为本科生、专科生“数学建模”课程的参考书,也可作为大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,还可用作从事复杂问题建模工作的工程技术人员的建模指导书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模竞赛优秀论文评析/杨桂元,朱家明编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2013.9

ISBN 978-7-312-03322-3



I. 数… II. ①杨…②朱… III. 数学模型—文集 IV. O22-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 189218 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>

印刷 合肥华星印务有限责任公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×960 mm 1/16

印张 25.5

字数 500 千

版次 2013 年 9 月第 1 版

印次 2013 年 9 月第 1 次印刷

定价 45.00 元

前 言

自 1992 年全国大学生数学建模竞赛(简称数学建模竞赛)创办以来,这项赛事已经走过了 20 多个年头。从 1992 年开始举办这项竞赛时的 74 所高校的 314 支参赛队,到 2012 年的 1 284 所高校的 21 219 支参赛队(参赛学生 6 万多人),参赛校数和队数分别以年平均 15.34% 及 23.45% 的速度增长,不仅已成为我国高校规模最大的学科性竞赛活动,而且成功地推动了数学教学的改革,进行了这些年来规模最大也最成功的、以推进数学建模为核心的数学教学改革实践,许多同学都用“一次参赛,终生受益”来表达了他的亲身体会*。

全国大学生数学建模竞赛是提高高等教育质量及提高学生实践创新能力的重要举措,也是激励学生学习数学积极性、提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题综合能力的重要平台。通过竞赛,可以鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动,开拓知识面,培养创造精神及合作意识,推动大学数学教学体系、教学内容和数学方法的改革。数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一,每年吸引几万名在校大学生参加,数学建模的书籍也大量涌现。但是,对于初次参加数学建模的大学生来说,除了分门别类培训各种方法以外,最需要的是学习针对特定的问题,可以用什么方法建模,用什么方法求解以及对结果的分析 and 评价等;还需要掌握数学建模竞赛论文写作的基本要领,包括论文基本结构与写作方法,还包括论文的格式等。正是为了满足这种需要,我们编撰了这本《数学建模竞赛优秀论文评析》,同时本书也可以为缺乏竞赛指导条件的地区或高校的学生提供帮助。

安徽财经大学自 1998 年组织学生参加全国大学生数学建模竞赛,至今已经 15 年了。1998 年组织 3 个队参赛,其中 1 个队获得了全国二等奖的好成绩,这使得我校的数学建模活动得到延续和发展壮大。2012 年组织 37 个队参加“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛,2 个队获得全国一等奖,6 个队获得全国二等奖。15 年来,学生的受益面和获奖面不断扩大,产生了广泛的社会影响。特别是“统计与应用数学学院 2010 年数学建模教与学团队”入选“安徽财经大学 2010 年十大感动校

* 李大潜院士在全国大学生数学建模竞赛 20 周年庆典暨 2011 高教社杯颁奖仪式上的讲话。





园人物”^{*}。安徽财经大学数学建模教与学团队是由统计与应用数学学院数学建模培训小组部分老师和大学生数学建模协会中的骨干成员构成的,以“进取,开拓,创新,实践”为宗旨,以培养“面对新世纪各种严峻挑战,富有创造力和竞争力的高素质人才”为目的建立的科技团队^{**}。

《数学建模竞赛优秀论文评析》是从安徽财经大学 15 年来参加大学生数学建模竞赛的论文中精选加工整理而成的。所选择的论文都是最有代表性的,每篇论文都按照竞赛论文的要求写作,其中包含论文的摘要、问题的重述、问题的分析、模型的假设与符号说明、模型的建立与求解、模型的分析与检验、模型的评价与改进等内容。论文几乎完整地保持了参赛论文的原貌,并在每篇论文后由编者给出了简要的评析。值得一提的是:每一篇论文都是参赛学生在教师的指导下在 3 天内完成的,尽管论文在有些方面还有些稚嫩,对问题的分析和解决还不太成熟,甚至连表述都还有不完善的地方,但这是他们集体智慧的结晶,原汁原味,体现了学生的创新能力,希望后来者可以参考和借鉴。

本书可作为本科生、专科生“数学建模”课程的教学参考书,也可作为大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,还可作为从事复杂问题建模的工程技术人员建模的建模指导书。

本书受安徽财经大学著作出版基金资助。由衷感谢安徽财经大学校领导、教务处、科研处和统计与应用数学学院各级领导对本书出版所给予的大力支持;感谢安徽财经大学数学建模教练组的各位老师,尤其要感谢本书所收录论文的指导老师——唐晓静、李天胜、冯守平、杨凌、庄科俊、闫云侠、李勇等,本书的出版应该归功于数学建模教练组各位指导老师的辛勤工作和无私奉献。在此,一并致以诚挚的感谢。

由于我们才疏学浅,书中难免有错误及不妥之处,尤其是评析部分不一定恰当,敬请各位专家、同行和广大读者不吝批评指正!

编者
2013 年 2 月

* <http://tw.aufe.edu.cn/youth/ShowArticle.asp?ArticleID=2681>。

** <http://tw.aufe.edu.cn/youth/ShowArticle.asp?ArticleID=2735>。

目 录

前言	(i)
第 1 篇 组合投资方案的决策方法	(001)
竞赛原题再现 1998 年 A 题 投资的收益和风险	(001)
获奖论文精选 组合投资方案的决策方法	(002)
1.1 问题的重述	(003)
1.2 问题的分析	(003)
1.3 模型的假设	(004)
1.4 符号的说明	(004)
1.5 模型的建立与求解	(005)
1.6 模型的结果分析	(011)
1.7 模型的评价	(011)
参考文献	(012)
建模特色点评	(012)
第 2 篇 最优钢管订购和运输计划的制订	(014)
竞赛原题再现 2000 年 B 题 钢管订购和运输	(014)
获奖论文精选 最优钢管订购和运输计划的制订	(016)
2.1 问题的重述	(017)
2.2 问题的分析	(018)
2.3 模型的假设	(018)
2.4 符号的说明	(018)
2.5 模型的建立与求解	(019)
2.6 模型的评价	(030)
参考文献	(030)
建模特色点评	(031)
第 3 篇 公交车调度方案的优化模型	(032)
竞赛原题再现 2001 年 B 题 公交车调度	(032)



获奖论文精选 公交车调度方案的优化模型	(035)
3.1 问题的重述	(035)
3.2 问题的分析	(036)
3.3 模型的假设	(036)
3.4 符号的说明	(037)
3.5 模型的建立与求解	(037)
3.6 对问题三的建议	(047)
3.7 模型的进一步分析	(047)
3.8 模型的评价与推广	(048)
参考文献	(052)
建模特色点评	(053)
第4篇 彩票方案的合理性分析	(054)
竞赛原题再现 2002年B题 彩票中的数学	(054)
获奖论文精选 彩票方案的合理性分析	(057)
4.1 问题的重述	(057)
4.2 模型的假设	(058)
4.3 符号的说明	(059)
4.4 问题的分析	(059)
4.5 模型的建立	(061)
4.6 模型的评价	(066)
参考文献	(067)
建模特色点评	(067)
第5篇 露天矿生产车辆安排方案的优化模型	(068)
竞赛原题再现 2003年B题 露天矿生产的车辆安排	(068)
获奖论文精选 露天矿生产车辆安排方案的优化模型	(070)
5.1 问题的重述	(071)
5.2 问题的分析	(073)
5.3 模型的假设	(074)
5.4 符号的说明	(075)
5.5 模型的建立与求解	(076)
5.6 模型的讨论、灵敏度分析与误差分析	(095)
5.7 模型的评价和改进	(099)
参考文献	(101)
建模特色点评	(101)



第 6 篇 输电阻塞管理优化模型	(103)
竞赛原题再现 2004 年 B 题 电力市场的输电阻塞管理	(103)
获奖论文精选 输电阻塞管理优化模型	(109)
6.1 问题的重述	(110)
6.2 基本概念与符号说明	(113)
6.3 模型的假设	(114)
6.4 模型的建立与求解	(114)
6.5 模型的结果分析与检验	(128)
6.6 模型的评价	(134)
6.7 模型的推广	(134)
参考文献	(134)
建模特色点评	(135)
第 7 篇 长江水污染的评价与预测	(136)
竞赛原题再现 2005 年 A 题 长江水质的评价和预测	(136)
获奖论文精选 长江水污染的评价与预测	(137)
7.1 问题的重述	(139)
7.2 模型的假设	(140)
7.3 符号的说明	(140)
7.4 模型的建立与求解	(141)
7.5 模型的误差分析	(163)
7.6 模型的评价	(164)
参考文献	(164)
建模特色点评	(165)
第 8 篇 艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型	(166)
竞赛原题再现 2006 年 B 题 艾滋病疗法的评价及疗效的预测	(166)
获奖论文精选 艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型	(167)
8.1 问题的重述	(168)
8.2 问题的分析	(169)
8.3 模型的假设	(172)
8.4 名词解释与符号说明	(172)
8.5 模型的建立与求解	(173)
8.6 模型的误差分析、检验和进一步讨论	(193)
8.7 模型的评价与推广	(195)
参考文献	(195)



建模特色点评	(196)
第 9 篇 人口增长预测模型	(197)
竞赛原题再现 2007 年 A 题 中国人口增长预测	(197)
获奖论文精选 人口增长预测模型	(198)
9.1 问题的重述	(199)
9.2 问题的分析	(199)
9.3 模型的假设	(200)
9.4 名词解释与符号说明	(200)
9.5 模型的建立与求解	(202)
9.6 模型的误差分析与灵敏度分析	(213)
9.7 模型的评价与推广	(215)
参考文献	(217)
建模特色点评	(217)
第 10 篇 高等教育学费问题探讨	(219)
竞赛原题再现 2008 年 B 题 高等教育学费标准探讨	(219)
获奖论文精选 高等教育学费问题探讨	(220)
10.1 问题的重述	(221)
10.2 模型的假设	(222)
10.3 名词解释与符号说明	(222)
10.4 模型的建立与求解	(224)
10.5 模型Ⅲ的进一步分析	(237)
10.6 模型的误差分析	(240)
10.7 模型的评价与推广	(240)
10.8 关于高校收费问题的可行性报告及建议	(241)
参考文献	(242)
建模特色点评	(243)
第 11 篇 眼科病床合理安排的优化模型	(244)
竞赛原题再现 2009 年 B 题 眼科病床的合理安排	(244)
获奖论文精选 眼科病床合理安排的优化模型	(245)
11.1 问题的重述	(246)
11.2 问题的分析	(248)
11.3 模型的假设	(249)
11.4 名词解释与符号说明	(250)



11.5 模型的建立与求解	(251)
11.6 模型的误差分析与灵敏度分析	(265)
11.7 模型的评价与推广	(266)
参考文献	(267)
建模特色点评	(267)
第 12 篇 上海世博会经济影响力定量评估模型	(268)
竞赛原题再现 2010 年 B 题 2010 年上海世博会影响力的定量评估 ..	(268)
获奖论文精选 上海世博会经济影响力定量评估模型	(268)
12.1 问题的重述	(270)
12.2 问题的分析	(271)
12.3 模型的假设	(273)
12.4 名词解释与符号说明	(273)
12.5 模型的建立与求解	(274)
12.6 模型的误差分析与灵敏度分析	(294)
12.7 模型的评价	(295)
12.8 模型的改进	(296)
12.9 模型的推广	(297)
参考文献	(297)
建模特色点评	(298)
第 13 篇 交巡警服务平台设置与调度优化模型	(299)
竞赛原题再现 2011 年 B 题 交巡警服务平台的设置与调度	(299)
获奖论文精选 交巡警服务平台设置与调度优化模型	(301)
13.1 问题的重述	(302)
13.2 问题的分析	(303)
13.3 符号的说明	(304)
13.4 模型的假设	(305)
13.5 模型的建立与求解	(305)
13.6 模型的评价	(317)
13.7 模型的改进	(317)
参考文献	(320)
建模特色点评	(321)
第 14 篇 城市表层土壤重金属污染分析	(322)
竞赛原题再现 2011 年 A 题 城市表层土壤重金属污染分析	(322)



获奖论文精选 城市表层土壤重金属污染分析	(323)
14.1 问题的重述	(324)
14.2 问题的分析	(326)
14.3 模型的假设	(327)
14.4 名词解释与符号说明	(327)
14.5 模型的建立与求解	(328)
14.6 模型的误差分析与改进	(364)
14.7 模型的评价与推广	(366)
参考文献	(367)
建模特色点评	(367)
第 15 篇 葡萄酒质量的影响因素分析	(369)
竞赛原题再现 2012 年 A 题 葡萄酒的评价	(369)
获奖论文精选 葡萄酒质量的影响因素分析	(370)
15.1 问题的重述	(371)
15.2 问题的分析	(372)
15.3 模型的假设	(373)
15.4 名词解释与符号说明	(374)
15.5 模型的建立与求解	(375)
15.6 模型的误差分析	(395)
15.7 模型的评价	(395)
15.8 模型的改进	(396)
15.9 模型的推广	(396)
参考文献	(397)
建模特色点评	(397)

第 1 篇 组合投资方案的决策方法



竞赛原题再现

1998 年 A 题 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产(如股票、债券……) $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 供投资者选择, 某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估, 估算出在这一时期内购买产品 S_i 的平均收益率为 r_i , 并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i 。考虑到投资越分散, 总的风险越小, 公司确定, 当用这笔资金购买若干种资产时, 总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

购买 S_i 要付交易费, 费率为 p_i , 并且当购买额不超过给定值 u_i 时, 交易费按购买 u_i 计算(不买当然无须付费)。另外, 假定同期银行存款利率是 $r_0 (r_0 = 5\%)$, 且既无交易费又无风险。已知 $n = 4$ 时的相关数据如表 1.1 所示。

表 1.1 4 种资产的相关数据

S_i	r_i	q_i	p_i	u_i (元) *
S_1	28%	2.5%	1%	103
S_2	21%	1.5%	2%	198
S_3	23%	5.5%	4.5%	52
S_4	25%	2.6%	6.5%	40

试给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定的资金 M , 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使净收益尽可能大, 而总体风险尽可能小。

* 如无特别说明, 本书中所涉及的金额币种皆指人民币。



试就一般情况对以上问题进行讨论,并利用表 1.2 中的数据进行计算。

表 1.2 15 种资产的相关数据

S_i	r_i	q_i	p_i	u_i (元)	S_i	r_i	q_i	p_i	u_i (元)
S_1	9.6%	42%	2.1%	181	S_9	33.6%	53.3%	2.7%	475
S_2	18.5%	54%	3.2%	407	S_{10}	36.8%	40%	2.9%	248
S_3	49.4%	60%	6.0%	428	S_{11}	11.8%	31%	5.1%	195
S_4	23.9%	42%	1.5%	549	S_{12}	9%	5.5%	5.7%	320
S_5	8.1%	1.2%	7.6%	270	S_{13}	35%	46%	2.7%	267
S_6	14%	39%	3.4%	397	S_{14}	9.4%	5.3%	4.5%	328
S_7	40.7%	68%	5.6%	178	S_{15}	15%	23%	7.6%	131
S_8	31.2%	33.4%	3.1%	220					

原题详见全国大学数学建模竞赛网(<http://www.mcm.edu.cn>)。



组合投资方案的决策方法*

摘要:本文对组合投资方案决策问题提出了有效的算法。组合投资问题可以归结为在一定的约束条件下使得平均净收益最大和总体风险最小的双重目标的非线性规划模型。通常,投资风险和收益之间存在正相关关系,这就决定了多重目标问题没有最优解。由于投资者只能在收益和风险之间进行权衡,而我们的权衡标准是选定总体风险的一个上界值,来确定净收益的最大值。为了简化算法,我们在合理分析的基础上采用了将实际分段费用率函数近似以 p_i 作为替代,以使非线性规划问题转化为线性规划问题。所得的组合投资方案选择模型在资产数目不太大的情况下,可以用手工求解。当资产数目较大时,手工算法费时很大,则可用计算机运算的方法加以解决。

本模型最终给出资产组合的风险控制值和相应的最大净收益率及投资比例向量的关系供投资者决策,并为投资者提供了一些实用的建议,同时还讨论了模型的优缺点。

* 本文获 1998 年全国大学生数学建模竞赛二等奖。队员:方红生、邱大鹏、齐丽群;指导教师:杨桂元、马永开等。





关键词:组合投资 线性规划 决策

1.1 问题的重述

1.1.1 投资、收益与风险

投资是经济和金融的术语,它涉及财产的累积以求在未来得到收益。技术上来讲,这意味着“将某物品放入其他地方的行动”。从金融学角度来讲,投资相较于投机而言,其整个行为过程的时间段更长一些,更趋向于在未来一定时间段内获得某种比较持续稳定的现金流收益,是未来收益的累积。投资不仅与收益相关,更与风险相关,收益越大则风险也越大。俗话说“不要将所有的鸡蛋放在同一个篮子里”,如何合理投资以实现资金收益最大化并最大限度地规避风险是投资者关心的问题。

1.1.2 投资的相关条件

某公司准备用资金 M 作为一个时期内对市场上 n 种资产(如股票、债券等)的投资。经评估,该时期内购买产品 S_i 的平均收益率为 r_i , 风险损失率为 q_i , 所付交易费率为 p_i 。当购买额不超过给定值 u_i 时,交易费按购买 u_i 计算。同期存款利率是 5%,既无交易费也无风险。

1.1.3 要解决的具体问题

1. 问题一

现已知 4 种资产的相关数据(见表 1.1),要求设计一种投资组合方案,用给定的资金 M ,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,而总体风险尽可能小。

2. 问题二

在问题一的基础上就一般情况进行讨论,并用表 1.2 中的 15 种资产的数据进行计算。

1.2 问题的分析

投资是指经济主体为在未来获取收益而投放资金于一定对象的经济行为。投资常可获得较银行存款利息高的收益,但同时也必须承担一定的风险。公司将一笔数额为 M 的资金进行投资时,必然希望收益尽可能大而风险尽可能小,组合投资便是达到这一目的的有效方法。组合投资是将资金同时投资于多种资产的投资方法,其目的是通过分散投资来降低投资风险。当参加组合的各种资产选定时,资产组合的收益和风险将由投资比例向量确定。本题实际上就是要求建立一个确定投资比例向量的模型,使资产组合的净收益尽可能大,而总体风险尽可能小。



1.3 模型的假设

- (1) 在投资期内银行利率不会改变；
- (2) 风险损失率等于同期无风险收益率与预期收益率波动下限的差值；
- (3) 题目要求的净收益是指净收益率的期望值，即平均净收益率；
- (4) 题目中的“总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量”可理解为“资产组合的风险以所投资的 S_i 对资产组合的风险损失率贡献值中的最大值来度量”；
- (5) 公司投资决策者是风险厌恶型投资者；
- (6) 在控制资产组合风险的前提下，使平均净收益率最大是该公司所期望的；
- (7) 给出资产组合风险控制值和相应最大净收益率及投资比例向量的关系是投资决策者期望的；
- (8) 将银行存款也当做一种资产；
- (9) 模型的适用对象尽可能是大投资者；
- (10) 投资者均可理智地确定自己的风险承受能力。

1.4 符号的说明

本模型所用主要变量符号及意义如表 1.3 所示。

表 1.3 主要变量符号及意义

序号	符号	意义
1	M_n	由 n 种资产构成的资产组合收益率下限
2	m_i	第 i 种资产收益率下限
3	Q_n	由 n 种资产构成的资产组合的风险损失率
4	q_0	投资者所允许的 S_i 中单个资产风险损失率的上限
5	x_i	投资于 S_i 的投资比例系数
6	X	资产组合的投资比例系数向量
7	F_n	由 n 种资产构成的资产组合风险值
8	R_i	S_i 的收益率
9	T_i	S_i 的净收益率
10	t_i	S_i 的平均净收益率
11	C_i	S_i 的实际交易费率



1.5 模型的建立与求解

1.5.1 含有4种风险资产和银行存款的投资组合选择模型

1. 模型的建立

根据模型的假设,风险损失率 q_i 是指银行存款利率 r_0 与资产 S_i 收益率波动下限的差值,即银行存款利率 r_0 与资产 S_i 最不景气时收益率的差值,它可以用如下公式表示:

$$\text{风险损失率} = \frac{\text{银行存款利息} - \text{最小收益}}{\text{本金}} = \frac{r_0 \times \text{本金} - m_i \times \text{本金}}{\text{本金}} = r_0 - m_i$$

风险是指未来收益率的不确定性,而风险损失率反映的是最坏情况下的收益损失,所以,风险损失率可以作为度量风险的一个指标。

设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 分别是投资于 S_1, S_2, S_3, S_4 和银行存款的投资比例系数。根据风险损失率计算的公式,可得资产组合的风险损失率计算模型如下:

$$Q_5 = r_0 - M_5 = \sum_{i=1}^5 x_i r_0 - \sum_{i=1}^5 x_i m_i = \sum_{i=1}^4 x_i (r_0 - m_i) = \sum_{i=1}^4 x_i q_i \quad (1.1)$$

式(1.1)中的 $x_1 q_1, x_2 q_2, x_3 q_3, x_4 q_4$ 分别为资产 S_1, S_2, S_3, S_4 对总体风险损失率的贡献值,由1.3中的假定知,资产组合的风险 F_5 为:

$$F_5 = \max\{x_1 q_1, x_2 q_2, x_3 q_3, x_4 q_4\} \quad (1.2)$$

从式(1.1)和式(1.2)可看出: $Q_5 \leq 4F_5$, 即资产组合风险值的4倍可作为资产组合风险损失率的上限。

当投资在 S_i 上的投资比例系数为 x_i 时资产 S_i 的净收益率为: $T_i = R_i - C_i$, 平均净收益率为:

$$t_i = E(T_i) - C_i$$

其中 $x_i = 0$ 时 $C_i = 0$; $0 < x_i \leq \frac{u_i}{M}$ 时 $C_i = \frac{p_i u_i}{x_i M}$; $x_i \geq \frac{u_i}{M}$ 时 $C_i = p_i$ 。

资产组合的平均净收益率为:

$$t = \sum_{i=1}^4 x_i t_i + r_0 x_5 \quad (1.3)$$

从式(1.2)和式(1.3)可看出,资产组合的收益和风险由投资比例向量 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ 确定。要使资产组合的净收益尽可能大,而总体风险尽可能小,可使用下面的模型A选择投资比例向量 X 。

$$\text{模型 A} \quad \min F_4 = \min \max\{x_1 q_1, x_2 q_2, x_3 q_3, x_4 q_4\}$$



$$\begin{aligned} \max t &= \sum_{i=1}^4 x_i t_i + r_0 x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

模型 A 是多目标规划模型,将表 1.1 的数据代入模型 A 可发现,模型中的两个目标不可能同时达到最优,该模型没有最优解。实际上,投资者往往希望收益尽可能地大而风险尽可能地小,但高收益往往伴随高风险,投资者只能在收益和风险之间进行权衡。我们采用的权衡方法是:在选定总体风险的一个上界 q_0 时,使得总体的净收益达到最大,即可通过下面的模型 B 选择投资比例向量:

$$\begin{aligned} \text{模型 B} \quad \max t &= \sum_{i=1}^4 x_i t_i + r_0 x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ F_5 \leq q_0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

根据式(1.2)可知,模型 B 等价于模型 B'。

$$\begin{aligned} \text{模型 B}' \quad \max t &= \sum_{i=1}^4 x_i t_i + r_0 x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_i q_i \leq q_0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

模型 B' 的意义是:在给出资产组合风险上限 q_0 的条件下,使资产组合的净收益率 t 最大。

由于 M 相当大,购买额下限 u_i 是经纪人为保护每笔交易的最低收入而设置的,考虑到公司为了聚集社会闲散资金,必会面向众多投资者,包括中小投资者,所以 u_i 的取值通常较小,那么 u_i/M 也相当小, C_i 可看作 p_i ,故模型 B' 可简化为模型 C:

$$\begin{aligned} \text{模型 C} \quad \max t &= \sum_{i=1}^4 x_i (r_i - p_i) + r_0 x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \leq \frac{q_0}{q_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. 模型的求解

模型 C 中 q_0 的取值范围定为 $[0, +\infty)$ 。对于线性规划模型 C,我们的求解方法是:对系数进行降序排列,当确定一个 q_0 值时,为了使平均净收益率 t 达到最大值,