高等院校电气工程及其自动化专业系列精品教材

电磁场

汪泉弟 张淮清 主编

科学出版社

高等院校电气工程及其自动化专业系列精品教材

电　磁　场

汪泉弟　张淮清　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书由重庆大学“电磁场原理”课程组在多年教学研究和实践的基础上编写而成，内容满足教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会对“电磁场”课程教学的基本要求。

本书共分8章，主要内容包括：矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波的传播、导行电磁波、电磁辐射与天线。每章均有大量例题，每章末有小结和习题，书后附有部分习题答案、附录和名词索引。

本书可作为高等学校电气信息类专业电磁场课程的教材或教学参考书，也可供相关学科的教师、科研工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场/汪泉弟，张淮清主编. —北京：科学出版社，2013.12
(高等院校电气工程及其自动化专业系列精品教材)
ISBN 978-7-03-039409-5

Ⅰ.①电… Ⅱ.①汪…②张… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309839号

责任编辑：余 江 张丽花/责任校对：郭瑞芝
责任印制：闫 磊/封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年12月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013年12月第一次印刷 印张：16 1/2
字数：420 000

定价：36.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

电磁场课程是高等学校电气信息类本科各专业的一门重要的技术基础课，旨在电磁学的基础上进一步阐述宏观电磁现象，介绍其基本规律和工程应用的基本知识，培养学生应用场的观点和方法对电工领域中的电磁现象、电磁过程进行定性分析与定量计算的能力，培养学生正确的思维方法和严谨的科学态度，为学生今后解决工程实际问题打下基础。

进入 21 世纪后，电磁场理论的应用几乎无所不在，尺度从纳米到千米，电压从微伏到兆伏，功率从微瓦到亿瓦，频率从直流到光频，等等。另一方面，电磁场理论与数值分析方法的结合，成为一些新兴学科与交叉学科的生长点和发展基础。可以预见，随着科学技术的不断进步，必将对电磁场课程的要求越来越高，对学生掌握良好的电磁场理论的呼声越来越强，电磁场课程在电气信息类本科各专业的重要性将不断提升，这些都是科学技术发展的必然。因此，本课程的作用不仅关系到学生后续课程的学习，还将影响到他们今后的就业和发展，掌握好本课程的知识将会极大地增强学生的适应力和创造力。

本书根据教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会制订的《“电磁场”课程教学基本要求》编写，内容系统，知识结构完整，可作为高等学校电气工程学科本科生电磁场课程的教材或教学参考书。

在编写中，编者贯穿了以下思想：

（1）电磁场以经典内容为主，在保持电磁场理论必要体系的同时，强调本课程对电类专业的基础支撑。

（2）突出电磁场理论的普遍规律，注重基本概念、基本规律和基本分析计算方法，使学生能牢固掌握，灵活运用。

（3）注重本课程的应用性和实践性，强调工程问题电磁模型的建立和定性分析，培养学生提出问题和分析问题的能力。

（4）从应用角度描述矢量分析这部分数学内容，促进学生形成对电磁场课程的学习和分析方法。

基于上述指导思想，本书编写的主要特点是：

（1）遵循由特殊到一般、由简单到复杂、循序渐进的原则，按照由静态到动态、由一维空间到三维空间的思路来编排本书内容。

（2）突出对电磁场基本规律的认识和应用，特别是主要的分析和解算的思路与要点，不涉及特殊函数和数值计算方法。

（3）突出电磁场的矢量场特性，以矢量分析这个数学工具来帮助和加深对电磁场基本特性的认识，强化矢量分析在解算电磁场习题中的应用。

（4）精心配置各章的例题和习题，突出定性分析在建立电磁场数学模型和分析电磁场分布中的重要作用。

本书共分 8 章，分别是矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波的传播、导行电磁波、电磁辐射与天线。每章末均有小结和习题，书后有部分习题答案、附录和名词索引。

本书由汪泉弟、张淮清主编，李永明、杨帆、徐征参编。第1、5章由张淮清执笔，第2、3章由李永明执笔，第4章由汪泉弟执笔，第6、7章由杨帆执笔，第8章由徐征执笔，全书由汪泉弟统稿。

对于书中的不妥之处，希望使用本书的师生和读者批评指正，意见请发至编者的电子邮箱 wangquandi@cqu. edu. cn。

编　者

2013年8月于重庆大学

目　　录

第 1 章　矢 量 分 析

本章是数学基础，它为研究电磁场和其他物理场提供必不可少的数学工具和分析方法。由于基本的电磁场量是有方向的，表示时需采用矢量形式；同时电磁场又以分布形态存在于空间中，刻画其变化规律需采用数学分析方法，因而矢量分析便成为电磁场研究的基本工具。

场研究的关键问题即是场源与场量的因果关系，可从数学和物理的角度归纳出场的研究方法论，即场论。与场的物理概念有关的矢量分析数学关系式概括了各类物理场的共同特征及其变化规律，形成了场论的基本概念和定理。这些数学基础知识是本书后续各章论述的必备条件。本章首先系统介绍矢量分析的基础知识，包括矢量的代数和分析运算，定义梯度、散度和旋度；然后给出矢量场的积分定理、赫姆霍兹定理；最后介绍圆柱坐标系和球坐标系。

1.1　矢量代数与位置矢量

1.1.1　矢量和标量

仅有大小的标量，用英文字母或希腊字母表示，如 f、g、φ、ψ 等。既有大小又有方向的矢量，则用黑体英文字母或英文字母顶上加上箭头表示，如 $\boldsymbol{A}$ 或 $\vec{A}$、$\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$ 等，前者多见诸印刷出版物中，后者则易于书写。$\boldsymbol{A}$ 的模记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A。

数与形是基本的数学表示形式，因而矢量的表示主要有两种，即代数方法和几何方法。用几何方法表示时，矢量可形象地用带箭头的有向线段表示，有向线段无箭头的一端叫做起点(尾)，有箭头的一端叫做终点(头)，该有向线段的长度与矢量的模(或称大小)成比例，箭头所指方向表示矢量的方向。矢量在空间中平移不会改变其大小和方向。而采用代数方法表示时，首先需建立联系数与形的坐标系(本书主要采用直角坐标系)，然后可根据各坐标分量确定矢量大小和方向。

1.1.2　矢量运算

1. 矢量加(减)运算

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加定义为两矢量的和，用新矢量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示，可按图 1-1(a)所示的平行四边形法则或图 1-1(b)所示的首尾相接法则进行。

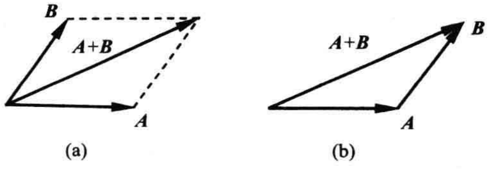

图 1-1　两矢量相加

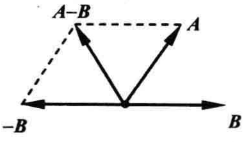

图 1-2　两矢量相减

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相减定义为两矢量的差，用新矢量 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 表示。因 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，作图时应

先将 $\boldsymbol{B}$ 反向然后再与 $\boldsymbol{A}$ 相加，所得的 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 如图 1-2 所示。

矢量加(减)运算也可在两个以上的矢量之间进行。矢量的加(减)运算有如下法则：

交换律 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1-1-1}$$

结合律 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C} \tag{1-1-2}$$

在图 1-3 所示的右手直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 起自坐标原点，它的三个坐标分量(即 $\boldsymbol{A}$ 分别在 x、y、z 坐标轴上的投影)分别为 A_x、A_y、A_z，因此有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z \tag{1-1-3}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 分别为沿坐标 x、y、z 正方向的单位矢量。

$\boldsymbol{A}$ 的模为

$$A=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2} \tag{1-1-4}$$

若已知

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x B_x+\boldsymbol{e}_y B_y+\boldsymbol{e}_z B_z$$

则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{e}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{e}_z(A_z\pm B_z) \tag{1-1-5}$$

$$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|=[(A_x\pm B_x)^2+(A_y\pm B_y)^2+(A_z\pm B_z)^2]^{1/2} \tag{1-1-6}$$

2. 数乘

标量 f 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积定义为一新矢量，用 $f\boldsymbol{A}$ 表示，它是 $\boldsymbol{A}$ 的 f 倍。在图 1-4 中，就 $f>0$ 和 $f<0$ 的两种情况画出了 $f\boldsymbol{A}$。由式(1-1-3)可得

$$f\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x fA_x+\boldsymbol{e}_y fA_y+\boldsymbol{e}_z fA_z \tag{1-1-7}$$

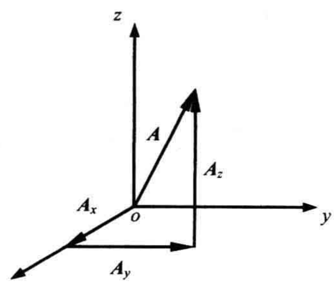

图 1-3　直角坐标中 $\boldsymbol{A}$ 及其各分矢量

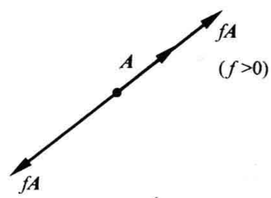

图 1-4　f 与 $\boldsymbol{A}$ 相乘

3. 矢量点积

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，它定义为两矢量的模与两矢量间夹角 θ ($0\leqslant\theta\leqslant180°$)的余弦之积，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1-1-8}$$

显而易见：两矢量的点积为一标量，所以也称为标量积，其正、负取决于 θ 是锐角还是钝角。点积遵从交换律，即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相互垂直即 $\theta=90°$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，反之亦然。$\boldsymbol{A}$ 自身的点积等于其模的平方，即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$。用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的直角坐标式进行点乘运算时，需将两矢量的各分量逐项点乘，并利用单位矢量的如下点乘关系：

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1$$
$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$$

可得

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1-1-9}$$

利用矢量的直角坐标式可以证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的点积遵循分配律

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \tag{1-1-10}$$

4. 矢量叉积

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积也称为矢量积，记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，其定义式为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB\sin\theta\, \boldsymbol{e}_n \tag{1-1-11}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，$\boldsymbol{e}_n$ 是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的单位矢量，它与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相垂直，$\boldsymbol{e}_n$ 的方向按图 1-5 所示的右手定则确定。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 大小反映了由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矢量确定的平行四边形面积。

由式(1-1-11)可知，叉积不遵从交换律，而是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相平行($\theta = 0$ 或 $180°$)时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，反之亦然。显然，$\boldsymbol{A}$ 自身的叉积为零，即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$。

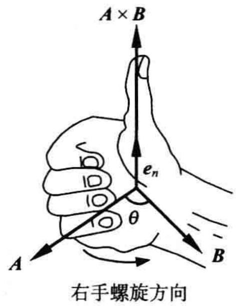

图 1-5　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的右手定则

用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的直角坐标式进行叉积运算时，除将两矢量的各分矢量逐项叉积外，还需用到单位矢量的如下叉积关系

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0$$
$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \quad (\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z)$$
$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \quad (\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x)$$
$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \quad (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y)$$

于是可得

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{e}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{e}_z(A_x B_y - A_y B_x)$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1-1-12}$$

不难证明，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 的叉积遵循分配律，即

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1-1-13}$$

5. 三重积

三矢量的乘积有两种，即运算结果为标量的标量三重积和运算结果为矢量的矢量三重积。利用矢量的直角坐标式直接运算，可以证明标量三重积和矢量三重积有下列恒等式

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1-1-14}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1-1-15}$$

标量三重积可用矢量的直角坐标分量写成易于记忆的式(1-1-16)的行列式形式，其大小表示由三个矢量围成的平行六面体体积。

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1-1-16}$$

矢量三重积公式也形象称为 bac-cab 法则。

1.1.3 位置矢量

在已选定坐标系的情况下，空间中任一点的位置可以用一个起点在坐标原点、终点与该点重合的空间矢量表示。在图 1-6 中，P 点的位置可用矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示，其模为 P 点与原点 o 之间的距离，其方向表示 P 点相对于 o 点所处的方位，称矢量 $\boldsymbol{r}$ 为 P 点的位置矢量。考虑到空间中的点与位置矢量的一一对应关系，亦可将 $\boldsymbol{r}$ 所确定的点径称为 $\boldsymbol{r}$ 点。

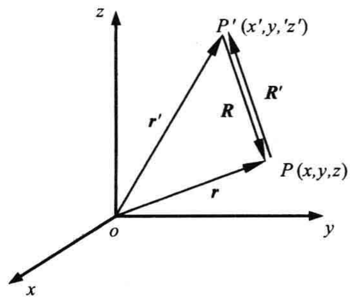

图 1-6 位置矢量与相对位置矢量

设 P 点的坐标为 (x,y,z)，则位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z \tag{1-1-17}$$

其模

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \tag{1-1-18}$$

对于图 1-6 中另一点 $P'(x',y',z')$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}'$，同样有

$$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{e}_x+y'\boldsymbol{e}_y+z'\boldsymbol{e}_z \tag{1-1-19}$$

$$r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2} \tag{1-1-20}$$

位置矢量描述的是空间一点相对于坐标原点的位置关系，而空间任意两点之间的位置关系用相对位置矢量给予描述。如图 1-6 所示，$\boldsymbol{R}$ 是以 P' 点为起点、P 点为终点的空间矢量，其模表示 P 点相对于 P' 点的距离，其方向表示 P 点相对于 P' 点所处的方位，类比位置矢量，称 $\boldsymbol{R}$ 为 P 点相对于 P' 点的相对位置矢量。显然，$\boldsymbol{R}$ 及模 R 应分别为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z \tag{1-1-21}$$

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2} \tag{1-1-22}$$

需要指出的是，对于上述任意两点来说，除 P 点相对于 P' 点的相对位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 外，也可以有 P' 点相对于 P 点的相对位置矢量 $\boldsymbol{R}'$，如图 1-6 所示。因 $\boldsymbol{R}'$ 的方向是由 P 点指向 P' 点，故有 $\boldsymbol{R}'=-\boldsymbol{R}$。

任何真实的物理场，都有其产生的根源即所谓“场源”，如静止电荷是静电场的场源，恒定电流是恒定磁场的场源，等等。场源和物理场是与空间概念联系在一起的，即任何物理场及其场源都存在于空间之中。在后面研究电磁场和它的源之间的积分关系时将表明，表示场源所在的位置的点和需要确定场量（如电场强度矢量和磁场强度矢量）的观察点在名称上以及符号上有明确加以区分的必要，前者简称源点并用加撇的源点坐标 $(x',\ y',\ z')$ 或 $\boldsymbol{r}'$ 表示，后者简称场点用不带撇的场点坐标 $(x,\ y,\ z)$ 或 $\boldsymbol{r}$ 表示。在这样的规定下，式(1-1-21)中的 $\boldsymbol{R}$（或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$）就具有了场点相对于源点的相对位置矢量的特殊含义，今后，凡是出现在场、源积分关系式中的 $\boldsymbol{R}$ 均作如此理解。至于空间普通两点的相对位置矢量，可通过加双下标予以区别。例如，将 P_2 点相对于 P_1 点的相对位置矢量记为 $\boldsymbol{R}_{12}$，其方向是由 P_1 点指向 P_2 点。

与相对位置矢量有关的一类函数称为相对坐标函数，其变量形式为场点与源点的坐标差。相对坐标标量函数和相对坐标矢量函数分别记为

$$f(\boldsymbol{R})=f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(x-x',y-y',z-z') \tag{1-1-23}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{F}(x-x',y-y',z-z') \tag{1-1-24}$$

1.2 标量场及其梯度

1.2.1 标量场定义及图示

标量场即分布在区域 V 内且物理量为标量的场，它可从代数和几何两个角度加以描述。从代数角度，对于区域 V 内的任意一点 $\boldsymbol{r}$，若有某种物理量的一个确定的数值或标量 $f(\boldsymbol{r})$ 与之对应，称这个标量函数 $f(\boldsymbol{r})$ 是定义于 V 内的标量场。

而从几何角度，就某一时刻而言，标量场 $f(\boldsymbol{r})$ 的空间分布情况可用一系列等值面形象地给予描绘，一个等值面即 $f(\boldsymbol{r})$ 为同一数值的所有点构成的空间曲面。在直角坐标中，标量场的等值面方程为

$$f(x,y,z)=C \tag{1-2-1}$$

式中，C 为常数，不同的等值面对应不同的 C 值。

在绘制标量场的等值面时，应使任意两相邻等值面的差值保持为一个常数，符合此要求的一组等值面与纸面相交所得的截迹线——等值线，如图 1-7 所示。显然，不同值的等值面(线)不能相交。

标量场有两种：一种是与时间无关的恒稳标量场，用 $f(\boldsymbol{r})$ 表示；另一种是与时间有关的时变标量场，用 $f(\boldsymbol{r},t)$ 表示。

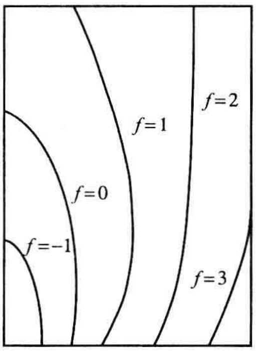

图 1-7 标量场的一组等值线

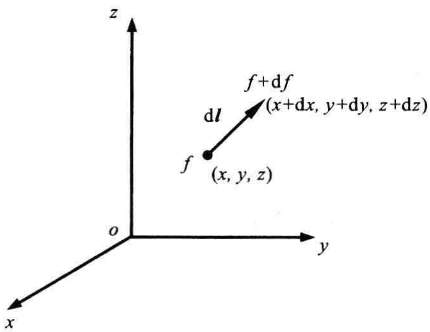

图 1-8 点位移导致 f 的改变

1.2.2 梯度与方向导数

针对某一标量场及其描述，可进一步开展关于其分布变化的研究。对于几何形式的标量场等值面(线)，其疏密程度能定性反映标量场在各处沿不同方向变化快慢的情况。而对于代数表示的标量函数 $f(\boldsymbol{r})$，则可通过数学分析方法来定量研究。

1. 梯度的概念

对于在其定义域内连续、可微的标量场 $f(x,y,z)$，我们来定量考察它在 (x,y,z) 点邻域内沿各方向的变化情况。在图 1-8 中，设沿某一方向由 (x,y,z) 点到邻近的 $(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$ 点的微分位移用线元矢量表示，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1-2-2}$$

标量场的相应微增量 $\mathrm{d}f$ 则为

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\ \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-2-3}$$

将式(1-2-3)的右边改写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与另一矢量的点积形式，即

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-2-4}$$

把式中那个以 f 的三个偏导数作为分量的矢量称为标量场 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 点的梯度(gradient)，记作 $\mathrm{grad}f$ 或 ∇f，即

$$\mathrm{grad}f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \tag{1-2-5}$$

于是，式(1-2-4)可以写成

$$\mathrm{d}f=\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-2-6}$$

今后，一律用符号 ∇f 表示 $f(\boldsymbol{r})$ 的梯度，∇f 也是空间坐标的矢量函数。

2. 方向导数

式(1-2-5)中的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 分别叫做 f 在 x、y、z 方向上的方向导数，它们各自表示 f 在某点邻域内沿 x、y、z 方向的变化快慢情况。$f(x,y,z)$ 在 x、y、z 方向上的方向导数就是 ∇f 的相应坐标分量，因此有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=(\nabla f)_x=\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_x\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=(\nabla f)_y=\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_y\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=(\nabla f)_z=\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\right\} \tag{1-2-7}$$

推而广之，$f(x,y,z)$ 在某点沿任意矢量 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数应表为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\nabla f)_l=\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_l \tag{1-2-8}$$

式中，$\boldsymbol{e}_l$ 是 $\boldsymbol{l}$ 的单位矢量。

几点说明：

(1) 式(1-2-6)的表达形式虽由直角坐标导出，但它仍适用于其他坐标系，故可视其为标量场梯度的定义式。

(2) 梯度这个矢量可以同时回答标量场在任一点的最大变化率是多少以及获得该最大变化率应沿着什么方向的问题。由 $\mathrm{d}f=\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=|\nabla f|\,\mathrm{d}l\cos\theta$（$\theta$ 是 ∇f 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的夹角）表明，在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为定长的条件下，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 取向不同相应有不同值的 $\mathrm{d}f$，仅当 $\theta=0$ 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的取向与 ∇f 的方向一致时，$\mathrm{d}f$ 才具有最大值 $\mathrm{d}f|_{\max}=|\nabla f|\,\mathrm{d}l$，或 $|\nabla f|=\frac{\mathrm{d}f|_{\max}}{\mathrm{d}l}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}l}\right|_{\max}$。

(3) ∇f 与标量场的等值面(线)处处正交。这是因为在同一等值面上任意两邻近点间的 $\mathrm{d}f=0$，即与两邻近点相关的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 起点处的 ∇f 的点积 $\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$。

3. 梯度算子

式(1-2-5)中的矢量微分算符 ∇ 称为哈密顿算子(读作 del 或 nabla)，它在直角坐标系中的具体形式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1-2-9}$$

在使用∇算符时，应注意以下几点：

(1) ∇算符与其他算符(如微分、积分算符)一样，单独存在没有任何意义，它必须是施加于某类函数上。式(1-2-9)的直角坐标形式表明，∇算符由三个线性微分算子构成，因此满足微分运算法则。

(2) ∇算符虽然不是一个真实矢量，但当它对其右端的场函数进行有意义的微分运算时，必须视∇为矢量，并赋予它矢量的一般特性，使得$\nabla \cdot \nabla=\nabla^2$，$\nabla \times \nabla=0$，因而也称$\nabla$算符为矢量微分算子。

(3) 在不同坐标系中，∇算符有不同的表达形式。因此，用∇算符表示的场函数的某种微分运算在不同坐标系中的具体表达形式也就不同。

4. *梯度运算一般公式*

∇算符作用于标量函数后得到了表征标量场最大变化率及方向的矢量函数，即梯度。梯度运算应遵从微分运算的基本法则，因此，梯度运算的一般公式有

$$\nabla c=0 \quad (c \text{ 为常数}) \tag{1-2-10}$$

$$\nabla(cf)=c\,\nabla f \tag{1-2-11}$$

$$\nabla(f \pm g)=\nabla f \pm \nabla g \tag{1-2-12}$$

$$\nabla(fg)=g\,\nabla f+f\,\nabla g \tag{1-2-13}$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\,\nabla f-f\,\nabla g) \tag{1-2-14}$$

$$\nabla f(u)=f'(u)\,\nabla u(u \text{ 为中间变量}) \tag{1-2-15}$$

下面给出有关梯度运算的几个基本关系式，并予以证明。

(1) 对于相对坐标标量函数 $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，有

$$\nabla f=-\nabla' f \tag{1-2-16}$$

式中，∇f 表示对场点 $\boldsymbol{r}$ 求 $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$的梯度；$\nabla' f$ 表示对源点 $\boldsymbol{r}'$求 $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$的梯度。

在直角坐标系中对式(1-2-16)进行证明，此时

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(x-x',y-y',z-z')$$

式(1-2-16)也可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=-\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y'}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z'}\boldsymbol{e}_z\right)$$

这相当于有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial z'}$$

由此可见，只要证明这三个偏导数关系成立就行了。

令 $x-x'=X, y-y'=Y, z-z'=Z$，应用复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x'}=-\frac{\partial f}{\partial X}$$

即有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x'}$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y'},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial z'}$$

(2) 关于相对位置矢量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$的模 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$,有

$$\nabla R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R \tag{1-2-17}$$

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\quad (R\neq 0) \tag{1-2-18}$$

上两式中 $\boldsymbol{e}_R$是$\boldsymbol{R}$ 的单位矢量。

在直角坐标中

$$\boldsymbol{R}=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z$$
$$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{1}{2}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}\\&\quad\cdot\frac{\partial}{\partial x}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-x')}{R}=\frac{x-x'}{R}\end{aligned}$$

同理有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y-y'}{R},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z-z'}{R}$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla R&=\frac{\partial R}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{1}{R}[(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z]=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R\end{aligned}$$

再根据∇算符的微分特性,并将 R 看做中间变量,应用式(1-2-15),可得

$$\nabla\frac{1}{R}=\left(\frac{1}{R}\right)'\nabla R=-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}=-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\quad (R\neq 0)$$

例 1-1 求 $f=4\mathrm{e}^{2x-y+z}$ 在点 $P_1(1,1,-1)$处的由该点指向 $P_2(-3,5,6)$方向上的方向导数。

解 $\nabla f=\nabla(4\mathrm{e}^{2x-y+z})=4\,\nabla(\mathrm{e}^{2x-y+z})=4\mathrm{e}^{2x-y+z}\,\nabla(2x-y+z)$

$=4\mathrm{e}^{2x-y+z}(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$

$\nabla f|_{P_1}=4\mathrm{e}^{2-1-1}(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=4(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$

$$e_{12}=\frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}}=\frac{(-3-1)\boldsymbol{e}_x+(5-1)\boldsymbol{e}_y+(6+1)\boldsymbol{e}_z}{[(-4)^2+4^2+7^2]^{1/2}}$$
$$=\frac{-4\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y+7\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{81}}=\frac{-4\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y+7\boldsymbol{e}_z}{9}$$

于是，f 在 P_1 点处沿 $\boldsymbol{R}_{12}$ 方向上的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial R_{12}}\right|_{P_1}=\nabla f|_{P_1}\cdot\boldsymbol{e}_{12}=4(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)\cdot\frac{-4\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y+7\boldsymbol{e}_z}{9}$$
$$=\frac{4}{9}[2\times(-4)+(-1)\times4+1\times7]=-\frac{20}{9}$$

1.3 矢量场的通量及散度

1.3.1 矢量场定义及图示

矢量场即分布在区域 V 内且物理量为矢量的场，它仍可从代数和几何角度加以描述。从代数角度，对于空间区域 V 内的任意一点 $\boldsymbol{r}$，若有一个矢量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 与之对应，称这个矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 是定义于 V 空间的矢量场。与标量场类似，矢量场也有恒稳矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 和时变矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$。恒稳矢量场的直角坐标式为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+F_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+F_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \tag{1-3-1}$$

式中，F_x、F_y、F_z 是 $\boldsymbol{F}$ 的三个坐标分量。

从几何角度，矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 可形象地用矢量线（简称 $\boldsymbol{F}$ 线）表示。矢量线是带有箭头的空间曲线，其上每点切线方向即为该处矢量场的方向，因而矢量线互不相交，而且 $\boldsymbol{F}$ 线上的任一线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 总是与该处的 $\boldsymbol{F}$ 共线（图 1-9），故有

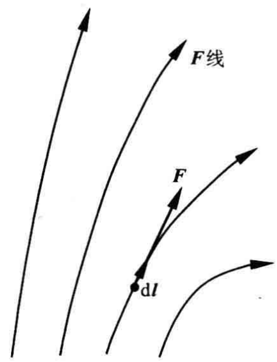

图 1-9 矢量线的示意图

$$\boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

在直角坐标中则为

$$(F_y\mathrm{d}z-F_z\mathrm{d}y)\boldsymbol{e}_x+(F_z\mathrm{d}x-F_x\mathrm{d}z)\boldsymbol{e}_y+(F_x\mathrm{d}y-F_y\mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_z=0$$

或

$$F_y\mathrm{d}z-F_z\mathrm{d}y=0$$
$$F_z\mathrm{d}x-F_x\mathrm{d}z=0$$
$$F_x\mathrm{d}y-F_y\mathrm{d}x=0$$

进而可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x}=\frac{\mathrm{d}y}{F_y}=\frac{\mathrm{d}z}{F_z}$$

这就是 $\boldsymbol{F}$ 线的微分方程。

对于某一特定矢量场的研究，从代数上看即转化为对矢量函数各分量的分析运算，并由不同运算规则给出不同结论；从几何角度看，矢量线不能相交，因而每条矢量线要么自行闭合，要