· 同济六版 ·

高等数学 上册

习题详解

张天德◎主编

GAODENG SHUXUE
XITI XIANGJIE

中国政法大学出版社

·同济六版·

高等数学习题详解

张天德◎主编

上册

中国政法大学出版社

2013·北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（同济六版）习题详解. 上册 / 张天德主编. 一北京：中国政法大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5620-4969-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第203815号

书　　名	高等数学（同济六版）习题详解. 上册
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路 25 号)
	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088　fada.sf@sohu.com
	http://www.cuplpress.com　(网络实名：中国政法大学出版社)
	(010) 58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　　印	固安华明印刷厂
规　　格	787mm × 1092mm　1/16
印　　张	19.25
字　　数	295 千字
版　　本	2013 年 9 月第 1 版　　2013 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5620-4969-2/O
定　　价	30.80 元

前 言

大学期间，如何学好数学？考研准备期，又该如何复习好数学呢？虽然考研数学没有指定的教材，全国各高校的教材又是五花八门，百家争鸣，但总体来讲，值得我们关注的，也是我在此重点推荐的，是如下四本书：同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）。这四本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，亦是最接近考研数学的权威教材。所以，我建议同学们用这套书做大学数学的学习和考研复习之用。

那么，如何才能使用好这套书呢？大家应该有所共识：数学学习得好与坏，那是需要通过做题去检验的。做什么题？就做这套书的课后习题。为了使同学们能真正用好这套书，能真正掌握解题的方法，我们组织了一批在本科教学一线和考研辅导一线的老师、专家，共同编写了与此相配套的四本图书，包括：《高等数学习题详解（上册）》、《高等数学习题详解（下册）》、《线性代数习题详解》、《概率论与数理统计习题详解》。在体例方面，本系列图书章节的划分与设置均与教材保持一致。每章内容包括：概念网络图；习题详解；单元小结。通过概念网络图对本章知识进行体系总结；在习题详解部分，提供准确的解题思路和方法，并对相应的考试要求加以提示；在单元小结中，对本章知识要点予以准确概括和提炼，并对基本方法进行说明。

总之，本系列图书汇集了编者丰富的教学经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，配合权威教材所附习题的解答和分析，帮助学生融会贯通相关知识，提高学习效率。

本系列丛书编写过程中，参考了同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）以及教育部考试中心编写的《考研数学考试大纲》等，在此感谢诸多相关作者的辛勤工作，同时也要感谢中国政法大学出版社。
限于水平，本书在编写过程中难免出现不妥之处，敬请广大读者给予指正。

编　者

目　录

第一章　函数与极限……………………………………………………………（1）
一、概念网络图……………………………………………………………（1）
二、习题详解……………………………………………………………（2）
习题 1—1　映射与函数　/ 2
习题 1—2　数列的极限　/ 12
习题 1—3　函数的极限　/ 15
习题 1—4　无穷小与无穷大　/ 19
习题 1—5　极限运算法则　/ 22
习题 1—6　极限存在准则　两个重要极限　/ 25
习题 1—7　无穷小的比较　/ 28
习题 1—8　函数的连续性与间断点　/ 30
习题 1—9　连续函数的运算与初等函数的连续性　/ 35
习题 1—10　闭区间上连续函数的性质　/ 38
三、单元小结……………………………………………………………（40）
总习题一　/ 41

第二章　导数与微分……………………………………………………………（49）
一、概念网络图……………………………………………………………（49）
二、习题详解……………………………………………………………（49）
习题 2—1　导数概念　/ 49
习题 2—2　函数的求导法则　/ 56
习题 2—3　高阶导数　/ 64
习题 2—4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率　/ 68
习题 2—5　函数的微分　/ 74
三、单元小结……………………………………………………………（80）

总习题二 / 80

第三章 微分中值定理与导数的应用…………………………（88）
一、概念网络图…………………………（88）
二、习题详解…………………………（89）
习题 3—1 微分中值定理 / 89
习题 3—2 洛必达法则 / 94
习题 3—3 泰勒公式 / 97
习题 3—4 函数的单调性与曲线的凹凸性 / 101
习题 3—5 函数的极值与最大值最小值 / 111
习题 3—6 函数图形的描绘 / 118
习题 3—7 曲率 / 122
习题 3—8 方程的近似解 / 126
三、单元小结…………………………（128）
总习题三 / 129

第四章 不定积分…………………………（138）
一、概念网络图…………………………（138）
二、习题详解…………………………（138）
习题 4—1 不定积分的概念与性质 / 138
习题 4—2 换元积分法 / 144
习题 4—3 分部积分法 / 149
习题 4—4 有理函数的积分 / 154
习题 4—5 积分表的使用 / 158
三、单元小结…………………………（162）
总习题四 / 162

第五章 定积分…………………………（171）
一、概念网络图…………………………（171）
二、习题详解…………………………（172）
习题 5—1 定积分的概念与性质 / 172
习题 5—2 微积分基本公式 / 178
习题 5—3 定积分的换元法和分部积分法 / 183
习题 5—4 反常积分 / 191
习题 5—5 反常积分的审敛法 Γ函数 / 193

三、单元小结…………………………………………………………（196）
总习题五 / 196

第六章 定积分的应用……………………………………………………（208）
一、概念网络图…………………………………………………………（208）
二、习题详解……………………………………………………………（208）
习题 6—1 定积分在几何学上的应用 / 208
习题 6—2 定积分在物理学上的应用 / 221
三、单元小结……………………………………………………………（226）
总习题六 / 227

第七章 微分方程…………………………………………………………（231）
一、概念网络图…………………………………………………………（231）
二、习题详解……………………………………………………………（232）
习题 7—1 微分方程的基本概念 / 236
习题 7—2 可分离变量的微分方程 / 234
习题 7—3 齐次方程 / 240
习题 7—4 一阶线性微分方程 / 246
习题 7—5 可降阶的高阶微分方程 / 253
习题 7—6 高阶线性微分方程 / 260
习题 7—7 常系数齐次线性微分方程 / 265
习题 7—8 常系数非齐次线性微分方程 / 270
习题 7—9 欧拉方程 / 280
习题 7—10 常系数线性微分方程组解法举例 / 283
三、单元小结……………………………………………………………（289）
总习题七 / 289

第一章
函数与极限

一、概念网络图

- 函数
  - 定义：三要素
  - 函数的运算
    - 四则运算
    - 复合函数
    - 反函数
  - 函数的性质
    - 单调性
    - 周期性
    - 奇偶性
    - 有界性
  - 初等函数
- 极限
  - 定义
    - 数列极限
    - 函数极限
    - 无穷小与无穷大
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 保号性
  - 重要公式、定理
    - 极限的四则运算
    - 两个重要极限
    - 两个收敛准则
      - 夹逼定理
      - 单调有界收敛定理
  - 无穷小的比较
- 连续
  - 连续性
    - 函数在一点连续
    - 函数在一个开区间上连续
    - 函数在一个闭区间上连续

- 间断点
  - 定义
  - 分类
    - 第一类
      - 可去间断点
      - 跳跃间断点
    - 第二类
      - 无穷间断点
      - 振荡间断点
- 闭区间上连续函数的性质
  - 有界性
  - 最值定理
  - 介值定理（零点存在定理）

本章讲解高等数学中最基本的概念：函数以及极限的相关概念，是整个学科的基础. 其中，函数是高等数学的研究对象，其重要性不言而喻. 这一部分主要是对中学期间初等数学相关内容的复习和回顾，难度不大. 高等数学是一门关于极限的学科，学科中的所有主要概念（导数、积分、级数）本质上都是特殊形式的极限. 因此正确理解极限的概念，掌握极限的相关运算法则就成了学好整个学科的关键. 极限分为函数极限与数列极限，其中函数极限又分为左极限、右极限等多种特殊形式，它们有相似的定义和性质，同学们要把握其中规律，学会举一反三. 学习极限的核心任务是极限的计算，同学们要多加练习，掌握常用的计算方法，同时要注意遵循基本的运算法则，在学习之初就养成良好的思维习惯. 函数的连续性是通过极限定义的，讨论函数的连续性也就是计算函数的极限. 对间断点的分类要记住分类标准，并能进行简单的判断. 最后，闭区间上连续函数具有一些良好的性质，同学们要记住相关的定理，并学会用它们进行简单的分析证明.

二、习题详解

习题 1－1　映射与函数

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$，

$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\setminus(A\setminus B)=[-10,-5)$.

注　$A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

2. 设 A，B 是任意两个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证　对 $\forall x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$，

故 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$.

又对 $\forall x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$，

故 $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$.

从而 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$，$B \subset X$. 证明：

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证

(1) ($\Rightarrow$) 因为 $A \subset X$，$B \subset X$，所以 $A \cup B \subset X$. 所以 $f(A \cup B)$ 有意义.

对 $\forall y \in f(A \cup B)$，则 $\exists x \in A \cup B$，使得 $f(x) = y$.

所以 $x \in A$ 或 $x \in B$，即 $f(x) \in f(A)$ 或 $f(x) \in f(B)$，

所以 $f(x) \in f(A) \cup f(B)$，则 $y \in f(A) \cup f(B)$.

由 y 的任意性，知：$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. ①

($\Leftarrow$) 设 $\forall y \in f(A) \cup f(B)$，有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$，

所以 $\exists x \in A$ 或 $x \in B$，使得 $f(x) = y$，

即 $\exists x \in A \cup B$，使 $f(x) = y$，所以 $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

由 y 的任意性，知：$f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$. ②

所以由①②得：$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 因为 $A \subset X$，$B \subset X$　所以 $A \cap B \subset X$.　所以 $f(A \cap B)$ 有意义.

$\forall y \in f(A \cap B)$，$\exists x \in A \cap B$，使得：$f(x) = y$.

因为 $x \in A$ 且 $x \in B$，所以 $f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$.

故 $f(x) \in f(A) \cap f(B)$，即 $y \in f(A) \cap f(B)$，

由 y 的任意性知：$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y = \sqrt{3x+2}$；　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y = \sin\sqrt{x}$；　(6) $y = \tan(x+1)$；

(7) $y = \arcsin(x-3)$；　(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y = \ln(x+1)$；　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，即定义域为$\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$，即定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \neq 0$ 且 $|x| \leqslant 1$，即定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $4-x^2>0 \Rightarrow |x|<2$，即定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $x \geqslant 0$，即定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) $x+1 \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$，即定义域为 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3| \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4$，即定义域为 $[2, 4]$.

(8) $3-x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$，即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) $x+1>0 \Rightarrow x>-1$，即定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) $x \neq 0$，即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

注　本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：

$y=\frac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x) \neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，$x \geqslant 0$；

$y=\log_a x$，$x>0$；

$y=\tan x$，$x \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

$y=\cot x$，$x \neq k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

$y=\arcsin x$，$|x| \leqslant 1$；

$y=\arccos x$，$|x| \leqslant 1$.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) 不同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$，$g(x)$ 的定义域为 $x>0$.

(2) 不同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(3) 相同，因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同，因为 $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x=\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$ 分母不能为 0，要求 $x \neq k\pi+\frac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同.

6. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\ \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

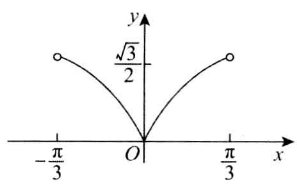

图 1-1

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty, 1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0, +\infty)$.

证　(1) 对 $\forall x_1, x_2\in(-\infty, 1)$，且 $x_1<x_2<1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2) 对 $\forall x_2>x_1>0$，有 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$x_2-x_1>0$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明　设 $x_1, x_2\in(-l, 0)$ 且 $x_1<x_2$，则必有 $-x_1, -x_2\in(0, l)$，且 $-x_2<-x_1$.

由 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，可得 $f(-x_2) < f(-x_1)$.

因为 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2) = -f(x_2)$，$f(-x_1) = -f(x_1)$，所以 $-f(x_2) < -f(x_1)$，亦即 $f(x_1) < f(x_2)$.

这就证明了对 $(-l, 0)$ 内任取的 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$.

因此，$f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是偶函数，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $\quad F(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad G(x) = g_1(x) + g_2(x)$，

则 $\quad F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$，

所以 $F(x)$ 为偶函数.

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) + (-g_2(x)) \\ &= -(g_1(x) + g_2(x)) = -G(x), \end{aligned}$$

所以 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是偶函数，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $\quad F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$，$G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$，

$\quad H(x) = f_1(x) \cdot g_1(x)$，

则 $\quad F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x)$，

所以 $F(x)$ 为偶函数.

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

所以 $G(x)$ 为偶函数.

$$\begin{aligned} H(-x) &= f_1(-x) \cdot g_1(-x) = f_1(x) \cdot [-g_1(x)] \\ &= -f_1(x) \cdot g_1(x) = -H(x), \end{aligned}$$

所以 $H(x)$ 为奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y = x^2(1-x^2)$； (2) $y = 3x^2 - x^3$；

(3) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$； (4) $y = x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，因为

$$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$，因为

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$
$$f(-x)\neq f(x)\text{，且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为

$$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]$$
$$=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$
$$f(-x)\neq f(x)\text{ 且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

11. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin \pi x$; (4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数，周期 $l=2$.

（4）不是周期函数.

（5）是周期函数，周期 $l=\pi$.

12. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$；（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$；（4）$y=2\sin 3x\quad\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（5）$y=1+\ln(x+2)$；（6）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

分析 函数 f 存在反函数的前提条件为：f：$D\to f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射，特别是（1）、（4）、（5）、（6）中的函数均为单调函数，故都存在反函数.

解 （1）将 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x=\sqrt[3]{y+1}$，再解出得 $y=x^3-1$.

（2）将 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，再解出得 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

（3）将 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x=\dfrac{-\mathrm{d}y+b}{cy-a}$，再解出得 $y=\dfrac{-\mathrm{d}x+b}{cx-a}$.

（4）将 $y=2\sin 3x$ 改写为 $x=2\sin 3y$，再解出得 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

（5）将 $y=1+\ln(x+2)$ 改写为 $x=1+\ln(y+2)$，再解出得 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

（6）将 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x=\dfrac{2^y}{2^y+1}$，再解出得 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证 充分性：若 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则存在 k_1，k_2 使对 $\forall x\in X$ 有

$$f(x)\leqslant k_1 \text{ 且 } f(x)\geqslant k_2，\text{即 } k_2\leqslant f(x)\leqslant k_1.$$

取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$，显然有 $\forall x\in X$，$|f(x)|\leqslant M$，

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

必要性：若 $f(x)$ 在 X 上有界，则存在 $M>0$，使对 $\forall x\in X$ 有

$$|f(x)|\leqslant M，\text{即}\quad -M\leqslant f(x)\leqslant M,$$

故 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

14. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求该函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

（1）$y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{3}$；

（2）$y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$；

（3）$y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

（4）$y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

（5）$y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

解　（1）$y=\sin^2 x$，$y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{3}{4}$.

（2）$y=\sin 2x$，$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=1$.

（3）$y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$.

（4）$y=e^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=e$.

（5）$y=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}$.

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

（1）$f(x^2)$；　　（2）$f(\sin x)$；

（3）$f(x+a)$ $(a>0)$；　　（4）$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解　（1）由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

（2）由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，得 $2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$（k 为整数）.

（3）由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，　故 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a,1-a]$.

（4）由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$注意到 $a>0$，只可能有两种情形：

当 $1-a<a$ 时，即 $a>\frac{1}{2}$时，上面不等式组无解；

当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，上面不等式组的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.

故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 $[a,1-a]$ $(0<a\leqslant\frac{1}{2})$.

16. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1.\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e, & |x|<1, \\ 1, & |x|=1, \\ e^{-1}, & |x|>1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形分别如图 1-2，图 1-3 所示.

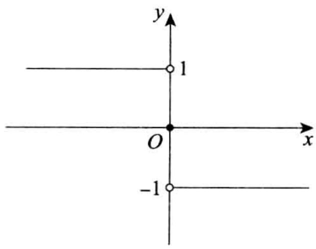

图 1-2

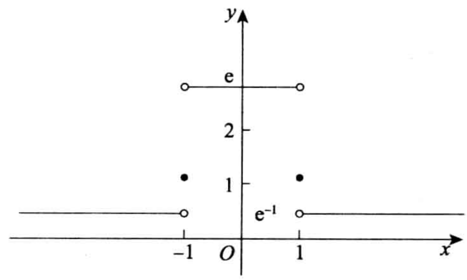

图 1-3

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（图 1-4）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L（$L=AB+BC+CD$）与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

解 如图 1-4 所示，$AB=CD$，

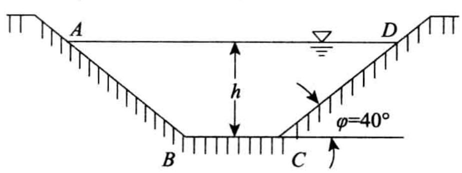

图 1-4

$S_0=\dfrac{1}{2}h(BC+AD)$，

$h=CD\sin\varphi$，$AD=b+2CD\cos\varphi$，$BC=b$，

从而 $S_0=\dfrac{h}{2}\left(b+b+2\dfrac{h}{\sin\varphi}\cos\varphi\right)=h(b+h\cot\varphi)$. ①

又由于 $L=AB+BC+CD=b+2CD=b+\dfrac{2h}{\sin\varphi}$， ②

由①②消去 b 得 $S_0=h\left(L-\dfrac{2h}{\sin\varphi}+h\cot\varphi\right)$，

从而有 $L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2h}{\sin\varphi}-h\cot\varphi$，

即 $L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos40°}{\sin40°}h$ 为所求周长 L 与水深 h 之间的函数关系式.

由题意可知，其定义域由 $h>0$ 和 $b>0$ 所确定，