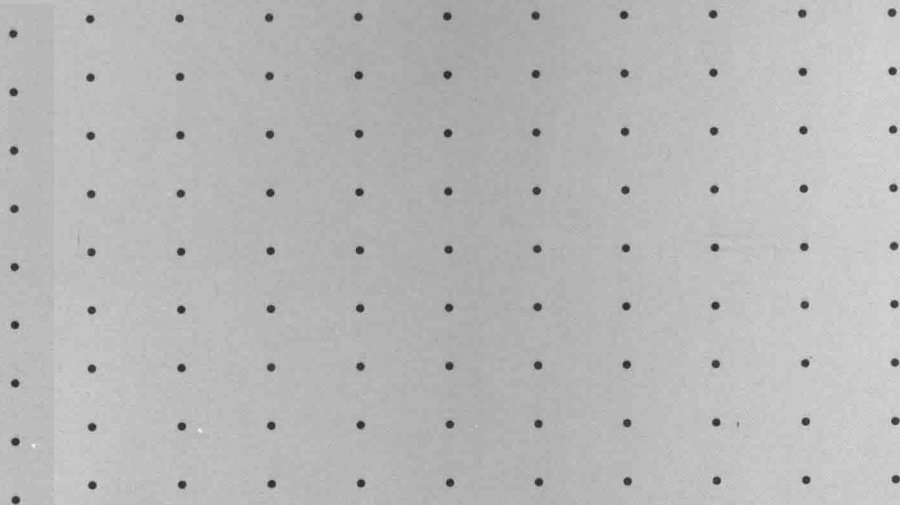


40

泛函分析中的反例

汪 林



40

泛函分析中的反例

汪 林

FANHAN FENXI ZHONG DE FANLI



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书汇集了泛函分析中的大量反例，主要内容有度量空间、赋范线性空间、线性算子、弱拓扑和弱*拓扑、向量值函数、不动点理论、Hilbert 空间、线性算子的谱。书中对 Banach 空间的同构理论、基、凸性和范数可微性方面的反例也做了介绍。

本书可供高等学校数学类各专业的本科生、研究生以及教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析中的反例 / 汪林著. — 北京: 高等教育出版社, 2014.1

ISBN 978-7-04-038890-9

I. ①泛… II. ①汪… III. ①泛函分析 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 279828 号

策划编辑 赵天夫

责任编辑 赵天夫

封面设计 赵阳

责任印制 田甜

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 22.25

字 数 470 千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版 次 2014 年 1 月第 1 版

印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷

定 价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 38890-00

序 言

在数学的教学和研究中,经常要从正面肯定某个命题成立,或从反面否定某个命题不成立,这也是揭示任何自然规律的两个主要手段.而绝大多数的数学书籍,主要致力于证明在某些条件下某一结论是真,很少谈到在另一些条件下某一结论是真还是错误的,即用来说明某些命题不真的反例则较少,这不利于学习的深入.因此,比较系统地汇集某个数学分支的反例,以弥补这方面的不足,无疑是十分有益的.然而,目前国内还没有一本泛函分析反例方面的专门著作,也未见到国外的.本书就是填补这一空白的尝试.

本书所指的反例,其含义比较广泛.例如,“点列的强、弱收敛性等价的无穷维赋范线性空间”,就是关于“无穷维赋范线性空间中点列的强、弱收敛性必定不等价”这一命题不成立的一个例子.总之,本书是通过具体的例子来说明某个命题不成立的事实.

为了适合不同程度的读者的需要,本书编入了不同难易程度的各种反例.因而,即便是刚学完一般泛函分析教程的读者,也能从书中有所得益;而某些较难的例子,甚至对专家来说,也不失其参考价值.

本书的取材,主要是从各种有关的书籍以及散见在各种数学杂志上的反例中挑选出来的.阅读本书所需的预备知识,假定读者已经掌握.因此,书中只准备了很少的说明.每一章都以引言开始,用来明确与本书有关的泛函分析方面的记号、术语和定义,也陈述了一些有关的定理,这些定理或者是构造某些反例时要用到,或者是为了衬托某个反例.各章的引言中未介绍实分析方面的记号、术语、定义以及有关定理,有关这方面的内容,读者可参看作者撰写的《实分析中的反例》(高等教育出版社 1989 年出版)一书.此外,书中还提出了一系列尚待解决的问题,可供读者进一步探讨.

中国科学院学部委员,业师程民德教授仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而

又十分宝贵的意见; A. C. Thompson 教授^①给作者以很大的鼓励, 并提供了一些例子; 云南大学卫念祖教授始终关怀本书的编写; 杨富春、杨华康、丁彦恒、郑喜印、谷照升、李小娥等同志阅读了本书的部分手稿, 并提出了许多有益的建议; 本书的责任编辑仔细地审读了书稿全文, 对本书各个部分做了核对, 并且提出了许多宝贵的意见, 为提高本书的质量做了大量工作.

对上面提到的所有的人, 作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限, 因而一定存在不少缺点, 殷切期望专家和读者予以批评指教.

汪林

初稿 1986 年元月

定稿 1990 年 10 月于云南大学

在学习和研究数学的过程中, 经常需要从正面肯定某个命题的成立, 或从反面否定某个命题不成立, 从而更有利于学习的深入. 因此本书自出版发行后, 就受到读者的欢迎和好评, 经有关专家推荐再版. 出版社对书中的部分疏漏进行了修正. 由于作者的水平有限, 书中仍有可能存在不妥之处, 敬请专家和读者予以批评和指正.

汪林

2013 年 10 月于昆明

^①A. C. Thompson 系加拿大数学教授, 1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学, 并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

现代数学基础 图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林
40	38890-9	泛函分析中的反例	汪林

网上购书: academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, www.joyo.com, www.dangdang.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费, 发票随后寄出。

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电 话: 010-58581118/7/6/5/4

传 真: 010-58581113

通过邮局汇款:

地 址: 北京西城区德外大街 4 号

户 名: 高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街 4 号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 度量空间	1
0. 引言	1
1. 实直线 $\mathbb{R}^1$ 上存在距离 d 和点列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset (\mathbb{R}^1, d)$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 都存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$	4
2. 存在 $\mathbb{R}^2$ 的一个测度为零的度量空间, 它的某个稠密开集的边界为不可数集	4
3. 存在一个集上的两个距离 d_1 与 d_2 , 不存在距离 d 使 $d \leq d_1, d \leq d_2$	4
4. 存在两个不相交的有界闭集, 它们之间的距离等于零	5
5. 存在一个完备度量空间中的紧集 F_1 与闭集 F_2 , 使对任意 $x \in F_1, y \in F_2$ 恒有 $d(x, y) > d(F_1, F_2)$	5
6. $C[0, 1]$ 上的两种距离, 使得按照一种距离的单位球的余集在另一种距离下的单位球内是稠密的	6
7. 一个度量空间, 其中存在开球, 它是闭集但不是闭球; 又存在闭球, 它是开集但不是开球	6
8. 存在度量空间, 其中开球的闭包都是闭球, 但它的某个子空间却无此性质	7
9. 存在某个度量空间的紧子空间 E , 使 E 中每个球都是连通的, 但是开球的闭包未必是闭球	7
10. 存在某个度量空间, 在其中有半径分别为 r_1 与 r_2 的闭球 B_1 与 B_2 , 虽然 $r_1 > r_2$, 却有 $B_1 \subset B_2$	7
11. 存在度量空间, 在其中有集 A , 使 $\{p : d(p, A) \leq 1\} \neq \cup_{q \in A} B[q, 1]$, 这里 $B[q, 1] = \{p : d(q, p) \leq 1\}$	7
12. 存在完备度量空间, 在其中一个渐缩的非空闭球列 $\{B_n\}$, 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$	8
13. 存在某个集上的两个距离, 使得得到的两个度量空间一个完备而另一个不完备	8
14. 任何子集都是既开又闭的完备度量空间	9
15. 任何子集都是既开又闭的不完备的度量空间	9
16. 内点都是孤立点的度量空间	10

17. 同一个集 X 上的两个距离 d_1 与 d_2 , 使 (X, d_1) 可分而 (X, d_2) 不可分.	10
18. 无理数集上存在非离散的完备距离, 使其成为完备的可分空间.	10
19. 有界而非全有界的集合.	11
20. 全有界而不列紧的集合.	11
21. 有界闭集并不都是列紧的度量空间.	11
22. 一个列紧集列, 其并集并不列紧.	12
23. 存在某个度量空间中的列紧集, 它与它的某个真子集等距.	12
24. 存在某个非紧度量空间, 它不能与它的真子集等距.	12
25. 存在非紧的度量空间, 在它上面的每个实值连续函数都是一致连续的.	12
26. 存在两个度量空间 X 与 Y , 使 X^2 与 Y^2 等距而 X 与 Y 并不等距.	13
27. 一个不完备的度量空间, 它同胚于它的完备化空间.	14
28. 存在两个不同胚的度量空间, 每一个都是另一个的一对一的连续像.	14
29. 某个度量空间中的子集 A 与 B , 虽然 A 与 B 的某个子集同胚, B 与 A 的某个子集同胚, 但 A 与 B 仍不同胚.	14
30. $\mathbb{R}^1$ 中存在两个同胚的子集 A 与 B , 而不存在 $\mathbb{R}^1$ 到 $\mathbb{R}^1$ 上的同胚映射 f , 使 $f(A) = B$	15
31. 把 Cauchy 点列映成非 Cauchy 点列的同胚映射.	15
32. Cauchy 点列的几种弱形式之间的关系.	15
33. 把全有界集映成非全有界集的同胚映射.	16
34. 把列紧集映成非列紧集的同胚映射.	17
35. 把闭集映成非闭集的同胚映射.	17
36. 一个连续映射, 它把某个有界闭集映成非闭集.	17
37. 一个开集的等距像, 它不是开集.	17
38. 连续而不列紧的映射.	18
39. 映每个子集为列紧集的无处连续映射.	18
40. 存在由 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的某个子集上的一对一的连续映射 g , 使对任意 $p \in \mathbb{R}^2$ 都有 $d(p, g(p)) = 1$, 而 g 不是 $\mathbb{R}^2$ 到该子集上的等距映射.	18
41. 一个完备的凸度量空间 (X, d) , 使 X 到 X 的一切连续映射所成的度量空间 F 不是凸的, 其中 F 上的距离为 $e(f, g) = \sup_{p \in X} d(f(p), g(p))$	18

第二章 赋范线性空间 21

0. 引言.	21
1. 存在某个线性空间中的两个线性子空间, 其并不是线性子空间.	24
2. 存在某个线性空间的子集 A , 使 $A + A \neq 2A$	24
3. 存在某个线性空间中的非凸集 A , 适合 $A + A = 2A$	24
4. 存在某个线性空间中的非凸集 A 和线性映射 T , 使 $T(A)$ 是凸集.	25
5. 存在 n 维欧氏空间中不同胚的闭凸集.	25
6. $\mathbb{R}^2$ 中的一个吸收集, 它在复平面内并不吸收.	25
7. $\mathbb{R}^2$ 中的一个均衡集, 它在复平面内并不均衡.	25

8. 存在某个线性空间中的集, 它的均衡包的凸包不等于它的凸包的均衡包.	25
9. 任给线性空间 X , 可在 X 上赋予范数而使之成为赋范线性空间.	26
10. 存在某个线性空间上的两个不可比较的完备范数.	26
11. 存在某个线性空间上的强、弱两个范数, 使强范数完备而弱范数不完备.	26
12. 存在某个线性空间上的强、弱两个范数, 使弱范数完备而强范数不完备.	26
13. 不能赋予完备范数的线性空间.	27
14. 存在某个线性空间上的两个完备范数, 其和并不完备.	27
15. 存在某个线性空间上的两个不完备范数, 其和完备.	27
16. 一个 Banach 空间中的第一纲子空间, 它本身并非第一纲空间.	28
17. 不完备的第二纲空间.	28
18. 一个不完备的赋范线性空间 X 及 X 的闭子空间 M , 使商空间 X/M 完备. . .	28
19. 存在某个赋范线性空间的子空间 M 及点 x_0 , 使 x_0 到 M 的最近元不是唯一的. .	29
20. Riesz 引理中的实数 α ($0 < \alpha < 1$) 不能加强为 $\alpha = 1$	29
21. 属于 l^p 而不属于 l^r ($1 \leq r < p < +\infty$) 的元素.	30
22. 属于 $\cap_{n=1}^{\infty} l^{1+\frac{1}{n}}$ 而不属于 l 的元素.	30
23. 属于 c_0 而不属于 $\cup_{n=1}^{\infty} l^n$ 的元素.	30
24. 存在点列 $\{x_n\} \subset l^r$, 使 $\{x_n\}$ 在 l^p ($1 \leq r < p < +\infty$) 中收敛而在 l^r 中不收敛.	30
25. 存在某个线性空间上的两个范数及点列 $\{x_n\}$, 使 $\{x_n\}$ 在这两个范数下均收敛而极限不同.	30
26. 存在某个线性空间 X 上的两个范数 $\ \cdot\ $ 与 $\ \cdot\ _1$ 及子集 A , 使 A 在 $(X, \ \cdot\)$ 与 $(X, \ \cdot\ _1)$ 中都是紧的, 而在 $(X, \ \cdot\ + \ \cdot\ _1)$ 中不紧.	31
27. 赋范线性空间上不连续的线性泛函.	32
28. 赋范线性空间中不闭的线性子空间.	32
29. 存在某个赋范线性空间中无内点的凸的均衡吸收集.	33
30. 存在某个赋范线性空间内稠密的凸的均衡吸收的真子集.	33
31. 存在某个赋范线性空间中的无处稠密的闭的凸均衡吸收集.	33
32. 存在某个赋范线性空间中的子集, 它的线性闭包不等于它的闭包张成的线性子空间.	34
33. 存在某个赋范线性空间中的无限集, 它的线性闭包不等于它的元素的无限线性组合所成的线性子空间.	35
34. 存在某个赋范线性空间中的两个闭集, 其和不是闭集.	35
35. 设 A 与 B 都是赋范线性空间中的闭凸集, C 是有界集, 则 $A + C = B + C$ 蕴涵 $A = B$. 上述条件缺一不可.	36
36. $C[0, 1]$ 中的一个闭凸子集, 它不含有最小范数的元素.	36
37. $L[0, 1]$ 中的一个闭凸子集, 它含有无穷多个最小范数的元素.	37
38. 存在某个 Banach 空间 X 的子集 A , 使 A 的每个无限子集张成的线性子空间在 X 中稠密.	37
39. 不可分的 Banach 空间.	37

40. 一个可分 Banach 空间, 其共轭空间不可分.	38
41. 存在不可分的 Banach 空间, 它有可分的无穷维商空间.	38
42. 某个赋范线性空间 X 与 $f \in X^*$, 而不存在 $x \in X$, 使 $\ x\ = 1$ 且 $f(x) = \ f\ $	38
43. l (或 l^∞) 中存在两个线性无关元 x 与 y , 适合 $\ x - y\ \cdot \ x + y\ = \ \ x\ ^2 - \ y\ ^2\ $	39
44. 存在赋范线性空间 X 及 $x, y \in X$, 使 $\ x - y\ \geq \frac{1}{2}(\ x\ + \ y\)\ \frac{x}{\ x\ } - \frac{y}{\ y\ }\ $ 不成立.	39
45. 存在某个 Banach 空间中的闭凸集, 它没有端点.	40
46. 具有 Krein-Milman 性质的非自反 Banach 空间.	41
47. 存在某个 Banach 空间中的紧凸集, 它不是其端点集的凸包.	41
48. 存在不自反的 Banach 空间, 它的单位闭球的端点不可数.	41
第三章 算子和泛函	43
0. 引言.	43
1. 连续而无界的泛函.	45
2. 下半连续而不连续的泛函.	46
3. 存在某个复赋范线性空间上的可加连续算子, 它不满足复齐性的条件.	46
4. l^∞ 上的一个有界线性泛函 f , 不能表成 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \xi_n$ 的形式, 其中 $x = \{\xi_n\} \in l^\infty$, 而 $\{\beta_n\}$ 为某个固定数列.	46
5. 存在某个赋范线性空间的子空间上的有界线性泛函, 其保范扩张并不唯一.	47
6. 存在范数不等于 1 的射影算子.	48
7. Hahn-Banach 定理不能推广到一般的有界线性算子.	49
8. 存在某个 Banach 空间上的非零连续线性泛函, 它在单位闭球上取不到最大值.	50
9. 存在与某个 Banach 空间中的单位闭球相切而不相交的闭超平面.	50
10. 任给无穷维赋范线性空间上的非零连续线性泛函 f , 可构造一个可数有界闭集 S , 使 $f(S)$ 不闭.	50
11. 存在不连续的双线性泛函, 它对各个变元分别连续.	51
12. 非仿射的等距映射.	51
13. 存在赋范线性空间 $(X, \ \cdot\ _X)$ 与 $(Y, \ \cdot\ _Y)$ 及映射 f , 使 $\ x_1 - x_2\ _X = 1$ 蕴 涵 $\ f(x_1) - f(x_2)\ _Y = 1$, 但 f 不是等距映射.	52
14. 等距齐性而非线性的映射.	53
15. 不可换的连续线性算子.	53
16. 存在某个赋范线性空间到其自身上的一对一的不连续的线性算子.	54
17. 存在某个赋范线性空间到其自身上的不连续线性算子 f , 使 $\{x: f(x) = 0\}$ 是 闭集.	54
18. 一个有界线性算子, 其逆算子无界.	55
19. 一个无界线性算子, 其逆算子有界.	55
20. 存在某个非同胚的线性算子, 使 T^* 是同胚的线性算子.	55
21. Banach 逆算子定理不成立的赋范线性空间.	55

22. 存在两个可逆矩阵, 其积不可逆.	56
23. 一个具有逆矩阵的无穷矩阵, 而它并不可逆.	56
24. 一个可逆矩阵, 它却不存在左逆矩阵.	57
25. 一个开映射, 它的逆映射不连续.	57
26. 一个乘积空间中的闭集, 其射影不是闭集.	58
27. 存在两个闭映射, 构成不闭的复合映射.	58
28. 存在闭映射 $y = f(x)$ 与连续映射 $z = g(y)$, 构成不闭的复合映射 $z = g[f(x)]$	58
29. 存在闭线性算子 T 与连续线性泛函 f , 构成不闭的线性泛函 $f \circ T$	58
30. 两个闭线性算子的和与积不必是闭线性算子.	59
31. 具有闭的值域的非闭线性算子.	60
32. 把某个闭集映成非闭集的闭线性算子.	60
33. 连续线性算子与闭线性算子互不蕴涵.	60
34. 存在某个连续的一对一的闭线性算子, 其逆算子是闭的不连续算子.	61
35. 闭图像定理不成立的赋范线性空间.	61
36. 一个在第一纲赋范线性空间上定义而在另一个 Banach 空间上取值的闭线性算子, 使其也是连续算子.	62
37. 开映射定理不成立的赋范线性空间.	63
38. 一个在 Banach 空间上定义而在另一个第一纲赋范线性空间上取值的闭线性算子, 使其也是开算子.	64
39. 存在两个闭线性算子, 其和没有闭的扩张.	64
40. 线性算子与其共轭算子之间的关系.	65
41. 有界线性算子与其扩张算子之间的关系.	70
第四章 弱拓扑和弱 * 拓扑.	73
0. 引言.	73
1. 存在某个 Banach 空间上的有界线性泛函列 $\{f_n\}$, 它弱 * 收敛于 f , 而它的任何有限线性组合所成的点列都不按范数收敛于 f	76
2. 存在某个无穷维赋范线性空间, 其中点列的强、弱收敛性是等价的.	76
3. 弱 * 收敛而不弱收敛的泛函列.	78
4. 赋范线性空间中弱收敛而不强收敛的点列.	78
5. 存在点列 $\{x_n\} \subset l^2$, 使 $\{x_n\}$ 按坐标收敛而并不弱收敛.	78
6. 强收敛而不一致收敛的有界线性算子列.	79
7. 弱收敛而不强收敛的有界线性算子列.	79
8. 共鸣定理不成立的赋范线性空间.	80
9. 存在某个 Banach 空间 X 到另一赋范线性空间 Y 内的一个一致有界的线性算子列 $\{T_n\}$, 使对 X 的某个稠密子集 G 的每一点 x , $\{Tx\}$ 都收敛, 但 $\{T_n\}$ 并不强收敛于某个 $T \in L(X, Y)$	81
10. 弱序列完备而不弱完备的赋范线性空间.	81
11. 存在某个 Banach 空间, 它并不弱序列完备.	82

12. 弱序列完备而不自反的 Banach 空间.	82
13. 存在无穷维线性空间 X 上的两种不同的拓扑, 在这两种拓扑下, X 上的连续线性泛函却是相同的.	83
14. 存在无穷维线性空间 X 上的两种不同的拓扑, 在这两种拓扑下, X 中的有界集却是相同的.	84
15. 共轭空间中弱 * 有界而不弱有界的集合.	84
16. 某个共轭空间中强闭而不弱 * 序列闭的子空间.	85
17. 某个赋范线性空间中强闭而不弱序列闭的子集.	85
18. 共轭空间中弱序列闭而不弱 * 序列闭的子集.	85
19. 存在某个赋范线性空间的子集, 它的弱闭包与弱序列闭包并不相同.	86
20. 存在某个共轭空间中的子集, 它的弱 * 闭包与弱 * 序列闭包并不相同.	87
21. 存在某个共轭空间中弱 * 序列连续而不弱 * 连续的线性泛函.	87
22. 某个共轭空间的子集, 它的范数拓扑闭包与弱 * 拓扑闭包并不相同.	88
23. $L^\infty(\mathbb{R}^1)$ 中存在一个弱 * 稠密的子空间 F , 使对任何 r ($0 < r \leq 1$), $F \cap B_1$ 在 B_r 中均不弱 * 稠密, 这里 B_r 是半径为 r 的闭球.	89
24. 一个不可分的 Banach 空间, 其共轭空间弱 * 可分.	89
25. 弱 * 可分而不弱可分的共轭空间.	90
26. 弱 * 可分而不弱 * 序列可分的共轭空间.	90
27. 一个弱 * 可分的共轭空间, 其中存在不弱 * 可分的闭子空间.	90
28. 某个共轭空间中弱 * 紧而不弱 * 序列紧的子集.	91
29. 某个共轭空间中的弱 * 序列紧集, 它不是范数拓扑下的有界集.	91
30. 某个赋范线性空间中的弱序列紧而不强序列紧的集合.	92
31. 某个共轭空间中弱 * 序列紧而不弱序列紧的集合.	92
32. 赋范线性空间中弱序列完备而不弱序列紧的集合.	92
33. 存在紧集, 它的闭凸包不是紧的.	93
34. 某个非自反的 Banach 空间 X , 使 X^* 中点列的弱收敛与弱 * 收敛相一致.	93
35. 某个 Banach 空间 X , 使 X^* 中点列的弱 * 收敛与弱收敛相一致, 但 X^* 中点集的弱 * 紧与弱紧并不一致.	94
36. 有界闭集都是紧的无穷维局部凸空间.	94
第五章 Banach 空间中的基	95
0. 引言.	95
1. Banach 空间中收敛而不绝对收敛的级数.	97
2. 赋范线性空间中绝对收敛而不收敛的级数.	98
3. Banach 空间中收敛而非无条件收敛的级数.	98
4. 某个 Banach 空间中弱无条件收敛而非无条件收敛的级数.	98
5. 某个 Banach 空间中无条件收敛而非绝对收敛的级数.	99
6. 赋范线性空间中 Hamel 基与 Schauder 基互不蕴涵.	99
7. 既是 Hamel 基又是 Schauder 基的无穷点列.	100

8. 一个有基的 Banach 空间, 其共轭空间没有基.	100
9. 没有基的可分 Banach 空间.	101
10. 没有逼近性质的可分 Banach 空间.	101
11. 存在某个 Banach 空间, 它有逼近性质而没有有界逼近性质.	101
12. 存在某个 Banach 空间, 它有有界逼近性质而没有度量逼近性质.	102
13. 存在某个有基的 Banach 空间 X , 使 X^* 可分, 但 X^* 没有逼近性质.	102
14. 一个赋范线性空间中的基, 它不是 Schauder 基.	102
15. 某个赋范线性空间的弱 Schauder 基, 它不是基.	103
16. 某个共轭空间 X^* 的基, 它在 X 中没有双直交列.	104
17. 一个双直交点列 $\{x_n\}$ 与 $\{f_n\}$, 使 $\{x_n\}$ 是基而 $\{f_n\}$ 不是基.	104
18. 某个 Banach 空间中的基序列, 它的坐标泛函列不是基序列.	105
19. 某个 Banach 空间的稠密子空间的基, 它不是整个空间的基.	106
20. 一个赋范线性空间中的基 $\{x_n\}$, 它有子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $\{x_{n_k}\}$ 不是基序列.	106
21. 存在点列 $\{x_n\}$, 它是 Banach 空间 $(X, \ \cdot\ _X)$ 与 $(Y, \ \cdot\ _Y)$ 的基, 但不是 $(X \cap Y, \ \cdot\ = \ \cdot\ _X + \ \cdot\ _Y)$ 的基.	107
22. 一个 Banach 空间的基 $\{x_n\}$, 使基序列 $\{x_{2k}\}$ 等价于基 $\{x_n\}$, 但 $\{f_{2k}\}$ 并不等价于 $\{f_n\}$, 这里, $\{f_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的坐标泛函列.	107
23. 有弱 * 基而没有基的共轭空间.	108
24. 存在某个 Banach 空间的共轭空间, 它有弱 * 基而并不可分.	108
25. 某个 Banach 空间的共轭空间中的 Schauder 基, 它不是弱 * 基.	108
26. 一个 Banach 空间的共轭空间中的弱 * 基, 它不是弱 * Schauder 基.	109
27. 一个共轭空间中的弱 * Schauder 基, 它不是 Schauder 基.	110
28. 一个 Banach 空间的共轭空间, 它弱 * 可分而没有弱 * 基.	111
29. 一个共轭空间 X^* 中的点列, 它既是 X^* 的基, 又是 X^* 的弱 * 基, 但它并不弱 * 收敛于 0.	111
30. 一个有基的 Banach 空间, 它没有单调基.	112
31. 一个 Banach 空间的有界完全基, 它的一个基序列却不是有界完全的.	112
32. 一个双直交列 $\{x_n\}$ 与 $\{f_n\}$, 使 $\{f_n\}$ 是有界完全的基序列, 而 $\{x_n\}$ 却不是收缩的基序列.	112
33. 一个双直交列 $\{x_n\}$ 与 $\{f_n\}$, 使 $\{f_n\}$ 是收缩的基序列, 而 $\{x_n\}$ 却不是有界完全的基序列.	113
34. 一个 Banach 空间中的基, 它不是正规基.	114
35. 一个 Banach 空间的非正规基 $\{x_n\}$, 使坐标泛函列 $\{f_n\}$ 是 $\overline{\text{span}}\{f_n\}$ 的正规基.	114
36. 一个 Banach 空间的 Bessel 基, 它不是 Hilbert 基.	115
37. 一个 Banach 空间的 Hilbert 基, 它不是 Bessel 基.	115
38. 一个 Banach 空间的基, 它不是无条件基.	115
39. 有基而没有无条件基的 Banach 空间.	117
40. 一个没有无条件基的赋范线性空间, 而能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间.	117

41. 某个 Banach 空间的 Schauder 基, 它弱收敛于 0, 但它没有无条件的基序列.	118
42. 具有唯一无条件基的无穷维 Banach 空间.	118
43. 某个 Banach 空间的无条件基, 它不是有界完全的.	118
44. 一个 Banach 空间的无条件基, 它不是收缩的.	118
45. 某个 Banach 空间的无条件基, 它不是绝对收敛基.	119
46. 某个 Banach 空间中的次对称基, 它不是对称基.	119
47. 有基而没有次对称基的 Banach 空间.	120
48. 一个有基的 Banach 空间 X , 其中存在有基的子空间 G , 使 G 中没有一个基 可以扩张成为 X 的基.	120
49. 一个 Banach 空间的分解, 它不是 Schauder 分解.	120
50. 具有 Schauder 分解的不可分的 Banach 空间.	121
第六章 自反空间和弱紧生成空间	123
0. 引言.	123
1. 不自反的 Banach 空间.	124
2. 一个不自反的赋范线性空间, 其共轭空间自反.	124
3. 存在某个不自反的赋范线性空间 X , 使对每一 $f \in X^*$, f 在 X 的单位闭球 上达到上确界.	125
4. 等距同构于它的第二共轭空间而本身并不自反的 Banach 空间.	126
5. 存在某个无穷维自反 Banach 空间, 它非线性同胚于它的 Cartesian 积.	126
6. 一个无穷维 Banach 空间, 它的每个自反子空间都是有限维的.	127
7. 一个自反空间的连续像, 它不是自反空间.	127
8. 具有弱 Banach-Saks 性质而不具有 Banach-Saks 性质的 Banach 空间.	127
9. 不具有 Banach-Saks 性质的自反 Banach 空间.	128
10. 存在 Banach 空间 X , 使 X 不具有 Banach-Saks 性质, 而 X^* 具有 Banach- Saks 性质.	130
11. 具有弱 Banach-Saks 性质而不自反的 Banach 空间.	131
12. 自反而不具有弱 Banach-Saks 性质的 Banach 空间.	131
13. 具有 Banach-Saks 性质而不超自反的 Banach 空间.	132
14. 自反而不严格凸的 Banach 空间.	132
15. 没有 Banach-Saks 性质的接近一致凸的 Banach 空间.	133
16. 一个具有无条件基的自反的 Banach 空间, 它没有线性同胚于 l^p ($1 \leq p <$ $+\infty$) 的子空间.	134
17. James 空间.	135
18. 非次自反的赋范线性空间.	136
19. 不完备的次自反空间.	136
20. 具有有界完全基而非几乎自反的 Banach 空间.	137
21. 非弱紧生成空间.	137
22. 既不可分也不自反的弱紧生成空间.	137

23. 存在某个不可分 Banach 空间, 它的每个闭子空间都是弱紧生成空间.	137
24. 存在某个弱紧生成空间的闭子空间, 它不是弱紧生成空间.	137
25. 存在某个弱紧生成空间, 其共轭空间不是弱紧生成空间.	138
26. 存在某个非弱紧生成空间, 其共轭空间是弱紧生成空间.	138
第七章 Banach 空间的凸性、光滑性及范数的可微性	139
0. 引言.	139
1. 存在某个赋范线性空间中的点列 $\{x_n\}$, 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 且 $\ x_n\ \rightarrow \ x_0\ $, 但 $\{x_n\}$ 并不强收敛于 x_0	141
2. 一个一致凸赋范线性空间上的非零连续线性泛函, 它在单位闭球上取不到极大 值.	142
3. 不可分的一致凸 Banach 空间.	143
4. 一致凸而不自反的赋范线性空间.	144
5. 一个自反 Banach 空间, 在它上面不能赋予与原范数等价的一致凸范数.	144
6. 局部一致凸而非自反的 Banach 空间.	146
7. 存在某个非自反的不可分 Banach 空间, 在它上面可赋予等价的局部一致凸的 范数.	147
8. 不能赋予等价的严格凸范数的 Banach 空间.	147
9. 存在某个可分且严格凸的 Banach 空间, 而不能赋予等价的一致凸范数.	149
10. 严格凸而不弱局部一致凸的 Banach 空间.	150
11. 弱局部一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间.	150
12. 局部一致凸而非一致凸的 Banach 空间.	150
13. 严格凸而非中点局部一致凸的 Banach 空间.	151
14. 中点局部一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间.	152
15. 严格凸而非各向一致凸的 Banach 空间.	152
16. 各向一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间.	152
17. 各种凸性之间的相互关系的补充例子.	153
18. 存在某个 Banach 空间, 其范数不 Gateaux 可微.	155
19. 存在某个 Banach 空间, 其范数在某点 Gateaux 可微而不 Fréchet 可微.	155
20. 可分而不光滑的 Banach 空间.	156
21. 不能赋予等价的光滑范数的 Banach 空间.	156
22. 存在某个不可分的 Banach 空间, 而能赋予等价的光滑范数.	156
23. 存在某个可分的 Banach 空间, 其共轭空间非线性同胚于任何一个光滑空间.	157
24. 存在一个 Banach 空间 X , 使 X^* 是严格凸的, 但 X 并不非常光滑.	157
25. 存在一个弱 Asplund 空间, 它不是 Asplund 空间.	158
26. 无处 Gateaux 可微的连续的凸函数.	159
27. 存在某个线性同胚于严格凸空间的 Banach 空间, 它的某个商空间非线性同胚 于任何严格凸空间.	159