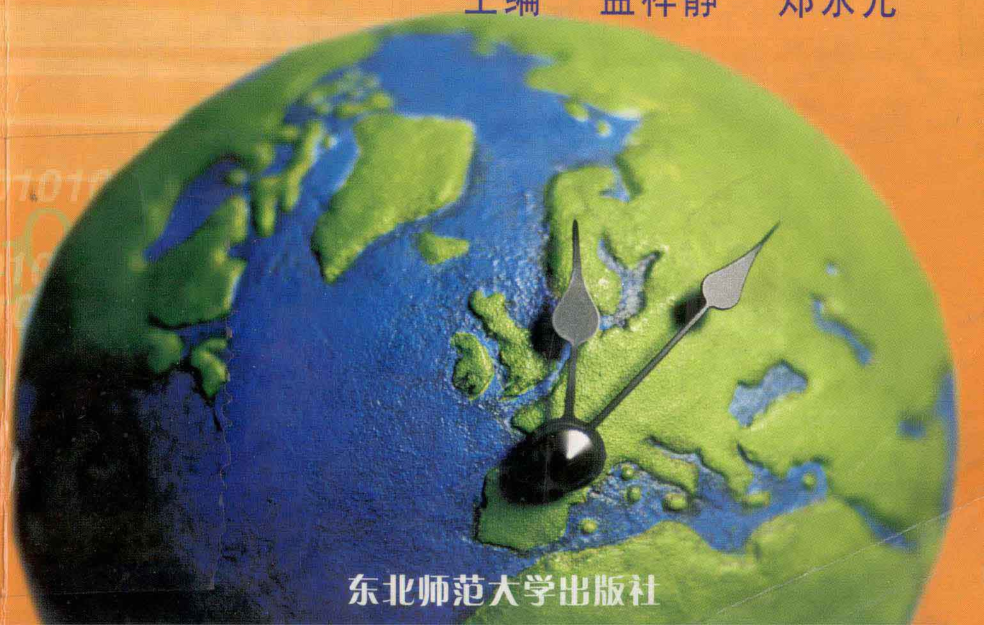
初中数学

奥赛手册

八年级

主编　孟祥静　郑永先



东北师范大学出版社

初中数学奥赛手册

八年级

主编　朱丽娅

班级：________________________

姓名：________________________

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（CIP）数据

初中数学奥赛手册．八年级/孟祥静．郑永先主编．长春：东北师范大学出版社，2005.2
ISBN 7－5602－3992－7

Ⅰ．初…　Ⅱ．①孟…　②郑…　Ⅲ．数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 006210 号

□策　　划：孟祥静　张晶莹
□责任编辑：刘效梅　□封面设计：张　番
□责任校对：张中敏　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
销售热线：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林省吉新月历制版印刷有限公司印装
吉长公路南线 1 公里处 邮政编码：130031
2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷
幅面尺寸：148 mm×210 mm　印张：11.5　字数：334 千
印数：00 001 — 10 000 册

定价：15.00 元

《初中数学奥赛手册》作者

总 主 编

孟祥静　郑永先

本册主编

朱丽娅

编　　写

（按姓名笔画排序）

王　宇　王永会　王林辉　庄乾岭

李永和　张国昌　邵宏玉　周　发

赵丽喆　胡志刚　柏秀泽　崔英发

崔国涛

前　言

为贯彻国家教材和教育改革的最新精神，推进基础教育新一轮课程改革的实施，全面推进素质教育，拓宽学生的知识视野，通过玩数学、做数学、学数学来提高初中学生综合学习能力，培养学生的创新精神和实践能力，切实有效地提高学生中考和竞赛成绩，同时为了弥补与新课改理念相适应的竞赛用书的空白，我们集中了十几所名校名师及教育专家，根据新课程标准和教学要求，精心研究、策划、精编了这套与全国基础教育改革同步，与教材同步的初中数学竞赛辅导用书。

这套书有三本，书中提炼出若干问题，这些问题体现出新的课程标准，新的教材特点，新的教学方式、方法，新的评价观、信息技术与学科课程的整合，供七、八、九年级学生与教学同步使用。

本书特点：

1. 适应新课改下的全新教学理念，重视学生发展，注重培养学生综合能力。

2. 内容新、全、精，有创意，注重理论联系实际。

3. 体系编排科学合理，符合竞赛教学的基本规律。

4. 知识全面系统，难易程度适中，在训练学生基础知识和基本技能的同时，更有知识的扩展，开放训练，体现层次性和选择性。

5. 指导性强，有利于引导学生利用已有的知识与经验，解决相关问题，有利于指导教师的创造性教学。

6. 与教材联系紧密，帮助广大教师和学生更准确、更深刻地理解教材。

孟祥静

2005 年 2 月 3 日

目　录

第一章　一次函数

知识在线

1. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是过点 $(0,b)$ 且平行于直线 $y=kx$ 的一条直线. 当 $k>0$ 时, y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

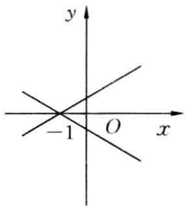
2. $k>0$, $b>0$,其图像不过第四象限;$k<0$, $b<0$,其图像不过第一象限.

经典解题

例 1　已知 $abc\neq0$,且 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=p$,则直线 $y=px+p$ 必通过(　　).

A. 第一、二象限　　　B. 第二、三象限

C. 第三、四象限　　　D. 第一、四象限



分析: 由 $y=px+p$ 中点 P 满足 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=p$,可求得 p 的值. 但无论 p 取何值,直线 $y=px+p$ 一定经过定点 $(-1,0)$. 当直线 $y=px+p$ 绕着点 $(-1,0)$ 旋转时,它经过的象限为一、二、三或为二、三、四,但选择答案告诉我们,直线恰过两个象限,故只能是一、二、三与二、三、四的公共部分.

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$

解: $\because \frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=p$, $\therefore \begin{cases} a+b=pc, \\ b+c=pa, \\ a+c=pb. \end{cases}$

$p=\frac{1+2+3}{2+4+6}$

三式相加，得 $2(a+b+c)=p(a+b+c)$.

当 $a+b+c\neq 0$ 时，$p=2$；

当 $a+b+c=0$ 时，$a+b=-c$，于是 $p=\dfrac{a+b}{c}=-1$.

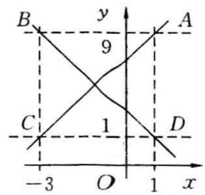
(1)当 $p=2$ 时，直线 $y=2x+2$ 通过第一、二、三象限；

(2)当 $p=-1$ 时，直线 $y=-x-1$ 通过第二、三、四象限.

综合上述两种情况，直线一定通过第二、三象限，故选 B.

例 2 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，对应的 y 值为 $1\leqslant y\leqslant 9$，求 kb 的值.

分析：如图，直线 $x=1$，$x=-3$，$y=1$，$y=9$ 围成矩形 $ABCD$，则满足条件的直线 $y=kx+b$ 是对角线 AC 与 BD 所在的直线.



解：当 $x=-3$，$y=1$，$x=1$，$y=9$ 时，有 $-3k+b=1$，$k+b=9$.

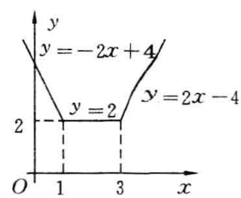
解得 $k=2$，$b=7$，此时 $kb=2\times 7=14$；

当 $x=-3$，$y=9$，$x=1$，$y=1$ 时，有 $-3k+b=9$，$k+b=1$，

解得 $k=-2$，$b=3$，此时 $kb=-2\times 3=-6$.

故 kb 的值为 -6 或 14.

例 3 作函数 $y=|3-x|+|x-1|$ 的图像.



解：当 $x<1$ 时，$y=(3-x)+(1-x)$
$$=-2x+4;$$

当 $1\leqslant x<3$ 时，$y=(3-x)+(x-1)=2$；

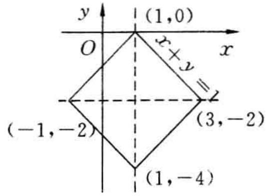
当 $x\geqslant 3$ 时，$y=(x-3)+(x-1)=2x-4$.

$$\therefore y=\begin{cases}-2x+4, & \text{当 } x<1 \text{ 时；}\\ 2, & \text{当 } 1\leqslant x<3 \text{ 时；}\\ 2x-4, & \text{当 } x\geqslant 3 \text{ 时.}\end{cases}$$

它的图像如图所示.

例 4　点(x,y)满足方程$|x-1|+|y+2|=2$，求它的图像所围成区域的面积.

解：当$x\geqslant1,y\geqslant-2$时，$x-1+y+2=2$，即$y=-x+1$.



当$x\geqslant1,y<-2$时，$x-1-(y+2)=2$，即$y=x-5$.

当$x<1,y\geqslant-2$时，$-x+1+y+2=2$，即$y=x-1$.

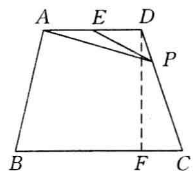
当$x<1,y<-2$时，$-x+1-(y+2)=2$，即$y=-x-3$.

于是，所得图像如图所示.

由此可知，$|x-1|+|y+2|=2$的图像是一个对角线长为4，边长为$2\sqrt{2}$的正方形，因此所求区域面积为$(2\sqrt{2})^2=8$.

例 5　设梯形$ABCD$中，$AB=CD=5$，$AD=8$，$BC=14$，E为AD上的定点，$AE=4$. 动点P从D出发，沿着梯形的周界依次经过C,B，最后到达A. 设点P走过的距离为x，$\triangle APE$的面积为y，把y表示成x的函数，并画出图像.

解：如图(1)，过D作$DF\perp BC$于F，



(1)

则$CF=3$，$DF=4$，于是有$\sin C=\frac{4}{5}$.

当P在DC上移动，即$0\leqslant x\leqslant5$时，

$$y=S_{\triangle APE}=S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin\angle EDP$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}x;$$

当P在CB上移动，即$5\leqslant x\leqslant19$时，

$$y=S_{\triangle APE}=S_{\triangle EPD}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8;$$

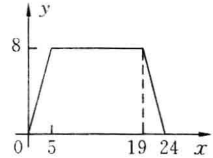
当P在BA上移动，即$19\leqslant x\leqslant24$时，

$$y=S_{\triangle APE}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(24-x)\cdot\sin\angle BAD$$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(24-x)\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(24-x)\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}(24-x).$

故 y 表示成 x 的函数为

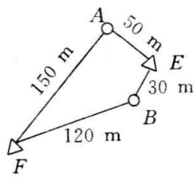
$$y=\begin{cases}\frac{8}{5}x & (0\leqslant x\leqslant 5);\\ 8 & (5\leqslant x\leqslant 19);\\ \frac{8}{5}(24-x) & (19\leqslant x\leqslant 24).\end{cases}$$



(2)

其图像为如图(2)所示的一段折线.

例 6 如图所示,工地上有 A 和 B 两个土墩,洼地 E,池塘 F.两个土墩的体积分别是 781 立方米、1584 立方米;洼地 E 需要填土 1025 立方米,池塘 F 可填土 1390 立方米.现要求挖掉两个土墩,把这些土先填平洼地 E,余下的土填入池塘 F.如何安排运土方案,才能使劳力最省?(A,B,E,F 各地相距的路程见图)



分析:以 1 立方米土每移动 1 米距离为一个劳力的单位.把 A,B 两个土墩的土运到洼地 E 和池塘 F,运送的方案很多,但要使劳力最省,即使用劳力的单位最小,就要比较不同方案,从中找出最优方案.

解:记"1 立方米土 · 1 米"作为运土花费劳力的单位,设从 A 运到 E 的体积为 x_1,运到 F 的体积为 y_1;从 B 运到 E 的体积为 x_2,运到 F 的体积为 y_2.运土的总劳力的单位数为 w.根据题意,

$\because x_1+y_1=781$, ①

$x_2+y_2=1584$, ②

$x_1+x_2=1025$, ③

$\therefore y_1+y_2=1340$. ④

则 $w=50x_1+150y_1+30x_2+120y_2$,⑤

其中 $0\leqslant x_1\leqslant 781$,$0\leqslant x_2\leqslant 1584$.

由①式得 $y_1=781-x_1$,

由③式得 $x_2=1025-x_1$,

由④式得 $y_2=1340-y_1=1340-(781-x_1)=559+x_1$,

$\therefore w=50x_1+150(781-x_1)+30(1025-x_1)+120(559+x_1)$

$\quad=214980-10x_1.$

故当 x_1 取最大值 781 时，$w_{\text{最小值}}=207170$.

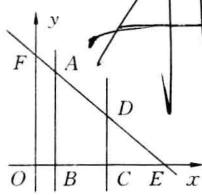
∴使用劳力最省的运土方案为：

土墩 A 的 781 立方米土全部运到洼地 E，土墩 B 运土 244 立方米到洼地 E，土墩 B 剩下的土全部运到池塘 F.

例 7 已知一次函数 $y=mx+4$ 具有性质：y 随 x 的增大而减小，分别与直线 $x=1$，$x=4$ 相交于 A，D，且点 A 在第一象限内. 直线 $x=1$，$x=4$ 分别与 x 轴相交于 B，C.

(1)要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形，试求 m 的取值范围；

(2)已知四边形 $ABCD$ 为凸四边形，直线 $y=mx+4$ 与 x 轴相交于点 E，当 $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{4}{7}$ 时，求这个一次函数的解析式.



分析：此类代数与几何的综合题须将几何条件转化为点的坐标. (1)如图，若四边形 $ABCD$ 为凸四边形，则点 D 必在点 C 的上方，即 D 点纵坐标必大于 0，可列出关于 m 的不等式. (2)由 $AB\parallel CD$，得 $\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{4}{7}$，再将 E 点坐标用 m 表示出来，即可列出关于 m 的方程.

解：(1)由 D 为 $x=4$ 与 $y=mx+4$ 的交点，知 D 点横坐标为 4，代入 $y=mx+4$，易求出 D 点坐标为 $(4,4m+4)$. 又 $y=mx+4$ 中，y 随 x 的增大而减小，由题意得 $\begin{cases} m<0, \\ 4m+4>0. \end{cases}$ 解得 $-1<m<0$.

(2)由 E 为 $y=mx+4$ 与 x 轴交点，得 $E\left(-\dfrac{4}{m},0\right)$，

则 $EC=\left|-\dfrac{4}{m}-4\right|=-\dfrac{4}{m}-4$，$BC=3$，

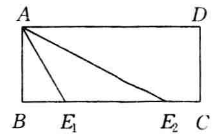
又 $\because AB\parallel CD$，

$\therefore \frac{EC}{EB}=\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{EC}{BC}=\frac{4}{3}$，即$\frac{-\frac{4}{m}-4}{3}=\frac{4}{3}$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

例 8 已知矩形的长大于宽的 2 倍，周长为 12. 从它的一个顶点作一条射线，将矩形分成一个三角形和一个梯形，且这条射线与矩形一边所成角的正切值等于$\frac{1}{2}$. 设梯形的面积为 S，梯形中较短的底的长为 x，试写出梯形面积 S 关于 x 的函数关系式.

解：设矩形 $ABCD$ 的长 BC 大于宽 AB 的 2 倍. 由于周长为 12，故长与宽满足 $4<BC<6$，$0<AB<2$.

由题意，有如下两种情况：



(1) 如图，$\tan\angle BAE_1=\frac{1}{2}$，这时 $CE_1=x$，$BE_1=BC-x$，$AB=CD=2(BC-x)$，

$\therefore 2(BC-x)+BC=6$，$BC=\frac{6+2x}{3}$，

$$S_{梯形AE_1CD}=\frac{1}{2}(CE_1+AD)\cdot CD$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{6+2x}{3}\right)\cdot 2\left(\frac{6+2x}{3}-x\right)$$
$$=\frac{6+5x}{3}\cdot\frac{6-x}{3}=-\frac{5}{9}x^2+\frac{8}{3}x+4,$$

其中 $3<x<6$（由 $4<\frac{6+2x}{3}<6$ 得出）.

(2) 当 $\tan\angle DAE_2=\frac{1}{2}$时，$\because \angle AE_2B=\angle DAE_2$，

$\therefore \tan\angle AE_2B=\frac{1}{2}$，这时 $CE_2=x$，$BE_2=2AB$.

由 $(2AB+x)+AB=6$，$\therefore AB=\frac{6-x}{3}$，

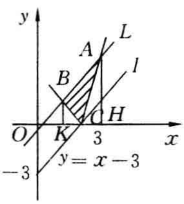
$$S_{梯形AE_2CD}=\frac{1}{2}(CE_2+AD)\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+2\cdot\frac{6-x}{3}+x\right)\cdot\frac{6-x}{3}$$
$$=\left(x+\frac{6-x}{3}\right)\cdot\frac{6-x}{3}$$
$$=-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x+4,$$

其中 $0<x<6\left(由\ 0<\frac{6-x}{3}<2\ 得出\right)$.

例 9 作函数 $y=2|x-3|$,$y=x-a$ 的图像,问 a 取什么值时,它们可围出一个平面区域,并求其面积.

分析:含有绝对值的一次函数也称为分段函数. 在研究它的图像时,一般是先将绝对值符号去掉,分成几个不含绝对值的一次函数. 然后,按所在区域分别作出它们的图像. 本题中 $y=2|x-3|$ 即为 $y=\begin{cases}2(x-3) & (x\geqslant 3),\\ 2(3-x) & (x<3),\end{cases}$ 而函数 $y=x-a$ 的图像只有与以上两条射线相交,才能围成有面积的区域. 在求这个区域(三角形)面积时,采用的割补法将不规则图形转化成规则图形来求.



解:由 $y=2|x-3|$,得 $y=\begin{cases}2x-6 & (x\geqslant 3),\\ 6-2x & (x<3),\end{cases}$

其图像如图是一条折线,而直线 $y=x-3$ 的图像是直线 l.

要使直线 $y=x-a$ 与折线都相交,必须 $a<3$.

由 $\begin{cases}y=2x-6,\\ y=x-a,\end{cases}$ 得交点 $A(6-a,6-2a)$.

由 $\begin{cases}y=6-2x,\\ y=x-a,\end{cases}$ 得交点 $B\left(\frac{a+6}{3},\frac{6-2a}{3}\right)$.

分别过点 A,B 作 x 轴的垂线,垂足分别是 H,K.

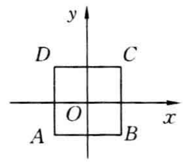
则 $S_{\triangle ABC}=S_{梯形AHKB}-S_{\mathrm{Rt}\triangle AHC}-S_{\mathrm{Rt}\triangle BKC}$

$$=\frac{1}{2}\left(6-2a+\frac{6-2a}{3}\right)\times\left(6-a-\frac{a+6}{3}\right)-\frac{1}{2}(6-2a)\cdot(6-a-3)-\frac{1}{2}\times\frac{6-2a}{3}\times\left(3-\frac{a+6}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(3-a)^2 \quad (a<3).$$

$\therefore$ 当 $a<3$ 时，两个函数的图像可围成 $\triangle ABC$，面积是 $\frac{2}{3}(3-a)^2$.

例 10 在直角坐标系中，有以 $A(-1,-1)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$ 为顶点的正方形，如图(1)所示. 设它在折线 $y=|x-a|+a$ 上侧部分的面积为 S，试求 S 关于 a 的函数关系式，并画出它们的图像.



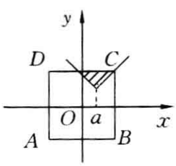
(1)

解：对 a 的值分区间讨论：

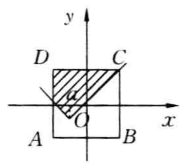
(1) $a\geqslant 1$，$y=|x-a|+a\geqslant 1$，$S=0$；

(2) $0\leqslant a<1$，如图(2)所示，

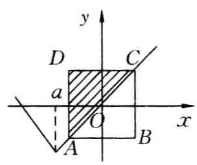
$$S=\frac{1}{2}(1-a)\times 2(1-a)=(1-a)^2.$$



(2)



(3)



(4)

(3) $-1\leqslant a<0$，如图(3)所示，

$$S=2-\frac{2(1-|a|)(1-|a|)}{2}=2-(1+a)^2.$$

(4) $a<-1$，如图(4)所示，$S=2$.

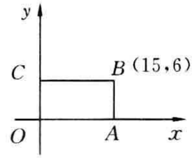
这是关于动态图形的函数关系问题，要对其中的参数 a 分情况进行讨论. 这样的函数关系，一般都是分段函数. 本题中的函数综合起来就是：

$$S=\begin{cases} 0, & (a\geqslant 1) \\ (1-a)^2, & (0\leqslant a<1) \\ 2-(1+a)^2, & (-1\leqslant a<0) \\ 2. & (a<-1) \end{cases}$$

巩固训练

1. 直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与坐标轴的交点分别是 A,B，如果 $S_{\triangle AOB}\leqslant 1$，那么 $|b|$ $\frac{1}{2}\cdot 2b^2\leqslant 1$ $b^2\leqslant 1$
b 的取值范围是(　　).
A. $b\leqslant 1$　　B. $0<b\leqslant 1$　　C. $-1\leqslant b\leqslant 1$　　D. $b\leqslant -1$ 或 $b\geqslant 1$

2. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为(15,6)，直线 $y=\frac{1}{3}x+b$ 恰好将矩形 $OABC$ 的面积分成相等的两部分，那么 $b=$ ________.

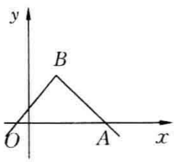


第 2 题

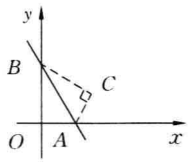
3. 已知点 P 在直角坐标系中的坐标为(0,1)，O 为坐标原点，$\angle QPO=150^\circ$，且 P 到 Q 的距离为 2，则 Q 的坐标为 ________.

4. 函数 $y=3-|x-2|$ 的图像如图所示，则点 A 与 B 的坐标分别是 A ________，B ________.

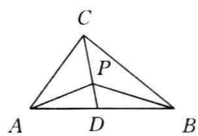
5. 如图，直线 $y=-2x+10$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A,B 两点，把 $\triangle AOB$ 沿 AB 翻折，点 O 落在 C 处，则点 C 的坐标是________.



第 4 题



第 5 题



第 6 题

6. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，AB 是斜边，点 P 在中线 CD 上，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm，设点 P,C 的距离为 x cm，$\triangle APB$ 的面积为 y cm^2，那么 y 与 x 的函数关系式为________，x 的取值范围是________.

7. 在一次函数 $y=-x+3$ 的图像上取点 P，作 $PA\perp x$ 轴，垂足为 A，作 $PB\perp y$ 轴，垂足为 B，且矩形 $OAPB$ 的面积为 2，则这样的点 P 共有(　　).
A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

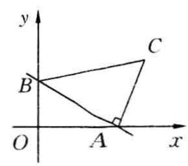
8. 设直线 $nx+(n+1)y=\sqrt{2}$(n 为自然数)与两坐标轴围成的三角形面

积为 $S_n(n=1,2,\cdots,2005)$，则 $S_1+S_2+\cdots+S_{2005}$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. $\frac{2003}{2004}$　　C. $\frac{2005}{2006}$　　D. $\frac{2005}{2004}$

9. 求证：不论 k 为何值，一次函数 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 的图像恒过一定点.

10. 如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角三角形 ABC，$\angle BAC=90°$，如果在第二象限内有一点 $P(a,\frac{1}{2})$，且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，求 a 的值.



第 10 题

拓展平台

1. 甲、乙二人同时从 A 地出发，沿同一条道路去 B 地，途中都使用两种不同的速度 v_1 与 $v_2(v_1<v_2)$. 甲用一半的路程使用速度 v_1，另一半的路程使用速度 v_2；乙用一半的时间使用速度 v_1，另一半的时间使用速度 v_2. 关于甲、乙二人从 A 地到达 B 地的路程与时间的函数关系有下面 4 个不同的图示分析（其中横轴 t 表示时间，纵轴 s 表示路程）. 其中正确的图示分析为（　　）.