大学物理学讲义

下册

李天增　高家碧　编

西南石油学院

一九八四年十二月

第九章
狭义相对论

对电磁现象包括光现象的研究，人们碰到了大量的关于物质作高速运动的新问题。在这些新问题面前，爱因斯坦提出了著名的"狭义相对论"，本章，通过对这些新问题"是如何解决的"的分析，介绍这个理论的基本原理和主要结果。

第一节
狭义相对论的基本原理

1. 由第一章"经典的时空性质"一节知道：经典的时空观是由伽利略变换

$$x=x'+vt,\quad y=y',\quad z=z',\quad t=t' \tag{9.1}$$

表达的。式中，$(x, y, z; t)$ 和 $(x', y', z'; t')$ 分别是在 x 方向以速度 v 值作相对运动的二坐标系 O 系和 O′ 系中的空间和时间坐标。

(9.1)式的一般表达式是

$$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t,\quad t=t' \tag{9.1'}$$

由伽利略变换，我们知道：一切惯性对描写物质运动的力学规律都是等价的。

这一说法叫做伽利略相对性原理或力学相对性原理。

该法说中，所谓“等价的”是指具有相同的数学形式，和相同的结果：例如，在O系和O′系中，有力$\vec{F}$和$\vec{F'}$，且$\vec{F}=\vec{F'}$；有冲量$\vec{F}dt$和$\vec{F'}dt'$，且$\vec{F}dt=\vec{F'}dt'$；有动量变化$m\,dv_x$和$m\,dv'_x$，且$m\,dv_x=$ $=m\,dv'_x$；有功$F_x\,dx$和$F'_x\,dx'$，且$F_x\,dx=F'_x\,dx'$；有相同的动量守恒定律的表达式等。这就是说，一物体在一个惯性系中的运动规律与该物体在另一惯性系中的运动规律是完全相同的。在一匀速直线运动的船内，与地面上比较，“苍蝇将继续自己的飞行，在各方面都是一样，毫不发生苍蝇聚集在船尾的情形”（伽利略，1932年）。也就是说，一物体在一个惯性系中的运动规律通过伽利略变换到另一个惯性系中时，二结果是相同的。因此，伽利略变换对力学规律是不变的。

2．问题是，对描述物体作高速运动的物理规律，伽利略变换是否再保持不变？许多电磁现象的研究，使这一问题被尖锐地提出来了。

例如，按照伽里略变换，真空中的光速C值在不同的惯性系O和O′中应有不同的数值C和（C±V）；但按照麦克斯韦电磁理论，C O是个常数，与坐标系的选择无关，且由公式

$$C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

确定（式中，ε_0和μ_0分别为真空的介电系数和磁导率）。而实验肯定无疑地证明（包括现代的激光技术测量，经历前后约80年的的实验）真空中的光速是个常数——可见，伽利略变换遇到了困难。

例如，即使假定伽利略变换对电磁规律也是正确的，即真空中的光速不是常数，即 ε_0 和 μ_0 例如说 ε_0 在 O 系中和在 O′ 系中应有不同的数值，因而：由库仑定律确定的电场力、由电场定义的电场强度、电通量 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$、高斯定理以及电容器的电容等，在 O 系中和 O′ 系中^{S} 都有不同的数值。于是伽利略变换对电磁规律在 O 系和 O′ 系中便不等价，这又与前面伽利略变换是正确的假定发生矛盾——伽利略变换又遇到了困难。

例如，我们已经知道，对相对于电荷静止的观察者，该电荷只产生电场；而对相对于该电荷运动的观察者，它还要产生磁场。但如用伽利略变换，当把静系中的电场强度关系变换到动系中时，无论如何也"变"不出个磁场来——伽利略变换遇到了困难。

此外，对高速运动的电子的研究，出现了一系列新结果：

例如，按照牛顿力学，电子的动能为 $E_K = \frac{1}{2} m v^2$，因此 v^2 与 E_K 呈线性关系。但实验证明，却是一条曲线（图 9.1）图中，"o"为实验结果，当电子的能量大于 10^5 [eV] 时，$v^2 \sim E_K$ 关系开始偏离直线。

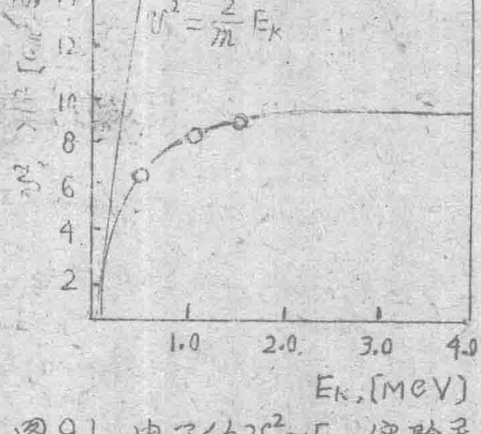

图 9.1 电子的 $v^2 \sim E_K$ 实验关系

例如，按照牛顿力学，电子的动量值与其速度值也是线性关系。但实验证明，却是一条曲线（图 9.2）。图中："•"、"κ"、"o"是不同测量者的结果；横坐标 P/P_0 是电子在动系中的动量 P 与静系

中的动量P_0之比值；横坐标 v/c 是电子的速度v值与光速C之比值。

例如，实验证明，电子的质量还随它的速度值而改变。电子对静系的质量与电子对动系的质量居然不同！

那么，又如何解释牛顿力学与这样一些新结果的矛盾呢？

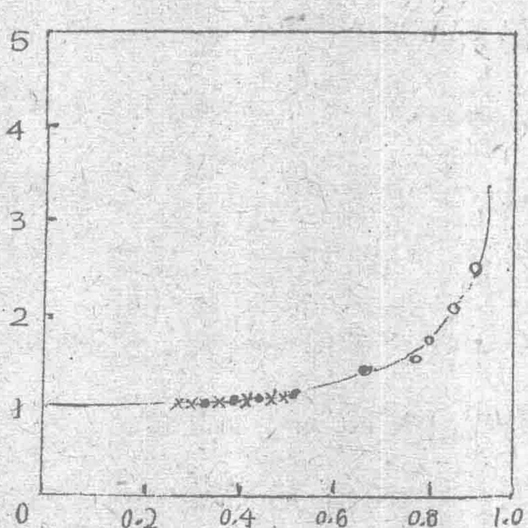

图9.2 电子的动量与速度的实验关系

我们知道，牛顿力学规律是服从伽利略变换的，现在牛顿力学的结果与新实验结果有矛盾，电子的质量、动量和动能在动系中与静系中都不同，说明伽利略变换对高速运动的力学规律也不成立——伽利略变换遇到了困难。

但是，如何解决这个困难呢？

修改一下行吗？不行！因为要承认“真空中的光速是常数”，就不能承认伽利略变换，这二者不能同时成立——解决的前提之一，就是承认“真空中的光速是常数”。

另外，“伽利略相对性原理”，只是对力学规律而言的，那里的力学规律也只是宏观的低速的力学规律，而现在遇到的还要包括微观的高速的力学规律和电磁学规律——解决的前提之二，就是把“伽利略相对性原理”加以发展。

经过一九世纪末和二十世纪初物理学界空前热烈的讨论和空前

艰峻的思索，只有爱因斯坦（Einstein. Albert，1879—1956；德国—瑞士—美国人，1921年获诺贝尔奖金）才抓住了问题的核心即"时空观"而把问题解决了。

3. 1905年，爱因斯坦提出了两条原理

狭义相对性原理：一切惯性系对描写运动的一切规律都是等价的。

光速不变原理：在一切惯性系中，真空中的光速是相等的。

这是狭义相对论的两条基本原理。

按照这两条原理，伽利略变换就不能再成立。

按照这两条原理，就可导出一个新的时空变换关系，它可适用于高速运动规律，而当低速时就变成伽利略变换。

第二节
洛仑兹变换

1. 新的时空变换、叫洛仑兹（Lorentz，1853—1928，荷兰理论物理学家）变换。

设有二坐标系O系（Oxyz）和O′系（O′x′y′z′），各坐标轴两相平行，彼此相对作匀速直线运动，O′系相对于O系的速度在x轴方向为v，如图1.11。以二原点重合的时刻作为计算时间的起点，二坐标系中时空关系的洛仑兹变换表达式为

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (9.2)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad (9.3)$$

上两式中，$\beta = \frac{v}{c}$。

把O′系中的时空坐标用O系中的时空坐标表示，用（9.2）式。通常称这种变换为正变换。

把O系中的时空坐标用O′系中的时空坐标表示，用（9.3）式。通常称这种变换为逆变换。

由于一切物理学公式都是作为时间（时刻，时间，同时性），空间（位置，距离，长度）和物质（质量，电荷，电流）的函数关系出现的，因此一切物理学公式都可进行时空坐标变换，问题是进行什么坐标变换。

β值具有非常重要的意义。在（9.2）式和（9.3）式中，当β值很小很小（也就是$v \ll c$）时，洛伦兹变换式就变成伽利略变换式。因此，伽利略变换式仅是洛伦兹变换式的一个特例。而当β值很大（也就是v很大甚至接近光速c）时，非用洛伦兹变换不可。因此，β值是一个非常重要的判据。

9.6

但当$v>c$时，洛伦兹变换就失去意义。因此，物体运动的速度不能超过真空中的光速。

2. 下面证明洛伦兹变换式，关键是证明$x\sim x'$和$t\sim t'$的变换式。而要证明这两个变换式，就要根据狭义相对论的两条基本原理。

设有一光信号在O系与O'系原点重合的瞬时（$t=t'=0$）从重合点发出沿Ox轴前进，现在求任一瞬时光信号的到达点在两个坐标系中的坐标$x=?$和$x'=?$

根据光速不变原理，光信号在两个坐标系中的传播速度都是c。问题是该瞬时在两个坐标系中是否相同？在伽利略变换中是$t=t$的，但相对论空前地认定$t\neq t'$，于是有

$$x=ct \quad 和 \quad x'=ct' \qquad (9.4)$$

要使这两个式子同时成立，$x\sim x'$和$t\sim t'$间的关系式绝不是伽利略变换式，而是一种新的变换式，但这个新的变换式在低速时还要能变成伽利略变换式。

根据狭义相对性原理，O系和O'系中的物理公式应有相同的形式，现在既不是$x'=(x-vt)$和$x=(x'+vt)$，且$t\neq t'$，那就设

$$x'=k(x-vt) \quad 和 \quad x=k(x'+vt') \qquad (9.5)$$

显然，$k\neq 1$，而应是一个与物体运动速度v有关的函数。如求得k的表达式，则新的$x\sim x'$变换便可得到。

下面，求$k=?$

为此，将（19.4）式代入（9.5）式，得

$$ct' = k(ct - vt) \quad 和 \quad ct = k(ct' + vt')$$

再将上两式等号两边分别相乘，得

$$c^2 t' t = k^2 (c^2 - v^2) t t'$$

由此解得
$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{9.6}$$

将 k 值代回（9.5）式，并记 $\beta = \frac{v}{c}$，得

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad 和 \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9.7}$$

消去上两式中的 x 或 x'，得

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad 和 \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9.8}$$

至于 $y \sim y'$ 和 $z \sim z'$ 的关系，在本节开头的假设下，仍有 $y = y'$，$z = z'$。将它们（9.7）式和（9.8）式合起来，就证明了洛伦兹变换（9.2）式和（9.3）式。

第三节
狭义相对论的时空观

事实上，洛伦兹变换是狭义相对论创立前，洛伦兹在研究电子理论时得到的，但他并没有认识到它在建立相对论时空观上的重大意义。在相对论里：

1. 物体的长度变短了——“长度收缩”。

意思是：同一物体的长度，在对该物体运动的坐标系中沿运动方向所量得的长度，比对该物体静止的坐标系中所量得的长度要短。

设一标尺静止在O系上。它在x轴的长度，已知由O系在时刻t"同时"量得为$l=x_2-x_1$，那么由动系O'来量$l'=$？在O'系中，设在时刻t'"同时"量得为$l'=x_2'-x_1'$，用洛仑兹变换(9.3)式有

$$l=x_2-x_1=\frac{x_2'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x_1'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{x_2'-x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

即 $$l'=l\sqrt{1-\beta^2} \tag{9.9}$$

反之，设该标尺静止在O'系上。它在x'轴的长度，已知由O'系在时刻t'量得为$l'=x_2'-x_1'$，则在动系O中在时刻t量得的长度$l=x_2-x_1$由洛仑兹变换（9.2）式有

$$l'=x_2'-x_1'=\frac{x_2-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x_1-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

仍有 $$l=l'\sqrt{1-\beta^2} \tag{9.9'}$$

显然，$l<l'$。

这说明，一切惯性系是等价的。

仅当$v\ll C$时，才有$l=l'$，这就回到了伽利略变换的结果。

要注意的是，物体的长度仅在运动方向上变短了，而在与运动方向垂直的方向上并不变。例如，一米长的E行物在与其长度平行的方向上以0.5C的速率运动时，地球上的观察者看来其长度为

$\therefore l'=l\sqrt{1-\beta^2}=(1.000\,m)\sqrt{1-0.25}=0.866\,[m]$

2. 一事件所经历的时间变长了——"时间膨胀"

意思是：同一事件所经历的时间，由对发生该事件的地点作相对运动的坐标系中所量得的数值，比由相对静止的坐标系中所量得的数值要大。

设在O系上的x点发生了一个事件，由O系量度时，该事件始于t_1，终于t_2，经历了一段时间$\Delta t=t_2-t_1$．而在O'系上量度时，认为经历一段时间$\Delta t'=t_2'-t_1'$。用洛仑兹变换（9.2）式

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\frac{t_2-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{t_1-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

即 $$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (9.10)$$

显然， $\Delta t'>\Delta t$。

反之，设在O'系上的x'点发生了一个事件，由O'系量度时，该事件始于t_1'，终于t_2'，经历了一段时间$\Delta t'=t_2'-t_1'$；而在O系上量度时，认为经历一段时间$\Delta t=t_2-t_1$。用洛仑兹变换（9.3）式

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{t_2'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{t_1'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

仍有 $$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (9.10')$$

显然， $\Delta t>\Delta t'$。

这说明，一切惯性系是等价的。

9.10

仅当$v \ll c$时，才有$\Delta t = \Delta t'$，这就回到了伽利略变换的结果。

"时间膨胀"的相对论结果，已为许多实验所证明。例如，在被阻留在乳胶片中的"静止"介子的寿命约为1.5×10^{-6}[秒]，而在宇宙射线（速度接近于光速）中的介子的寿命近于7×10^{-5}[秒]，约为"静止"介子寿命的50倍。

3."同时性是相对的。

意思是：在静系中看来是同时发生的二事件，在动系中看来却不是同时发生的。

设二事件在O系中同时发生的时空坐标分别为$(x_1, y_1, z_1; t)$和$(x_2, y_2, z_2; t)$，用洛仑兹变换(9.2)式，在O'系中看到该二事件发生的时刻分别为

$$t_1' = \frac{t - \frac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad 和 \quad t_2' \frac{t - \frac{v x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

由于$x_1 \neq x_2$，于是有时间差

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (9.11)$$

反之，设二事件在O'系中同时发生的时空坐标分别为$(x_1', y_1', z_1'; t')$和$(x_2, y_2, z_2; t')$，用洛仑兹变换(9.3)式，在O系中看到该二事件发生的时间差为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1' - x_2')}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (9.11')$$

9.11

利用（9.9）式和（9.9′）式，（9.11）式和（9.11′）式也可写成

$$\Delta t'=\frac{\beta}{c}(x_1'-x_2') \quad 和 \quad \Delta t=\frac{\beta}{c}(x_1-x_2)$$

记住，$\beta=\frac{v}{c}$。

因此，在"长度收缩"问题中，所谓在O或O′系中的"同时"测量，在O′（或O）系看来并不是同时的。

这说明，一切惯性系是等价的。

仅当$v\ll c$时，$\Delta t=\Delta t'=0$，这就回到了伽利略变换的结果。

4. 速度的相对性服从新的变换法则。

设在O′系中有个质点沿着O X′轴方向以速度u_x'匀速运动，那么，该质点对O系的速度u_x，按照伽利略速度变换法则便是$u_x=u_x'+v$，但按照洛伦兹变换，却有

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{dx'}{dt}+v\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}(u_x'+v)\cdot\left(1-\frac{1}{c^2}v\,u_x\right)$$

解出u_x，结果为

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{u_x'v}{c^2}} \qquad (9.12)$$

9.12

如质点还有沿$O'Y'$和$O'Z'$轴的速度u'_y和u'_z，用类似方法可得

$$u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}},\qquad u_z=\frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \quad (9.12)$$

（9.12）式和（9.12'）式，便是狭义相对论的速度变换法则。

仅当$v\ll c$时，$u_x=u'_x+v$，$u_y=u'_y$，$u_z=u'_z$，这就回到了伽利略速度变换法则。

按照狭义相对论速度变换法则，如质点在O'系中沿$O'X'$轴以速度c运动，则在O系中看来仍为c，因为

$$u_x=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=c$$

这是光速不变原理的必然结果。

5. 上述由洛仑兹变换所得到的结果，说明了狭义相对论的空观。

在狭义相对论里，时间和空间仍是均匀的和各向同性的，但却是相对的。

所谓“均匀的和各向同性的”是说：只要沿运动方向来量度长度，物体在动系中的长度一定收缩，不论在该运动方向上的何处位置，也不论该运动方向在空间的方位；只要在对发生事件的地点作相对运动的坐标系中来量度时间，该时间一定膨胀，而不管该动系在空间何处，也不管在何方位。

所谓"相对的"，是说：空间时间的量度与坐标系是否运动有关，与坐标系运动的速度大小也有关。在不同运动速度的坐标系中，所量度的空间和时间是不同的。这就是，空间时间与坐标系的选择有关。

显然，由洛仑兹变换所得到的"时间空间是相对的"的看法，与由伽利略变换所得到的"时间空间是绝对的"的看法，是完全不同的。仅当 $\beta \to 0$ 时，洛仑兹变换才退回伽利略变换，相对时空观才退回绝对时空观。伽利略变换是低速时洛仑兹变换的特例。

洛仑兹变换是一种普遍正确的变换。该变换已成为检验某种物理规律是否普遍正确的根据。一切普遍正确的物理规律对洛仑兹变换应该是不变的。牛顿力学规律对伽利略变换是不变的，但对洛仑兹变换是可变的，因此牛顿力学规律不是普遍遵守的规律。

对洛仑兹变换保持不变的力学规律，是相对论力学。

第四节
狭义相对论力学介绍

1. 在相对论里，物体的质量也是相对的。

相对论认为，同一物体的质量，在静系中与动系中量度的结果是不同的。

设物体在静系中的质量为 m_0（称为静止质量），在动系中的质量为 m（称为运动质量，或相对论质量），它们之间有关系

9.14

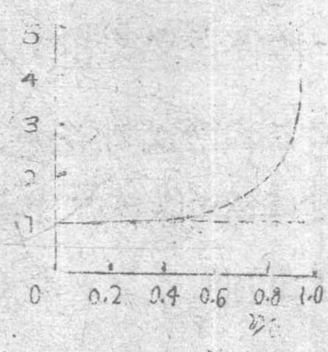

图9.2 质量与速度的关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (9.13)$$

即，物体的运动质量随物体运动速度的增加而增加。如图9.3所示，图中是比值 $\frac{m}{m}$ 与 β 的关系。

因地球上宏观物体的运动速度很小，质量的相对论效应显示不出来。但对微观粒子，例如电子，当它的运动速度达到 2.7×10^8〔米/秒〕时，其质增加为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{2.7\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0.81}}=2.3\,m_0$$

即为静止质量的2.3倍。

因此，当物体的运动速度很大以至接近光速时，必须用相对论质量。

2. 在相对论里，运动物体的动量仍定义为 $\vec{p}=m\vec{v}$，但式中的质量要用相对论质量（9.13）式，于是

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v} \qquad (9.14)$$

由上式，就可解释图9.2中的实验结果。

3. 在相对论里，作用在物体上的力仍定义为 $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$，但式中的动量要用相对论动量（9.14）式，于是

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (9.15)$$

这就是相对论力学的基本方程式。

由上列各式知，仅当$v \ll C$时，才就回到了经典质量、经典动量，也才回到了牛顿第二定律的表达式。

将(9.15)式中对时间的微商进行下去，有

$$\vec{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{m_0\left(\frac{v}{c^2}\right)\vec{v}}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\frac{dv}{dt} \qquad (9.15)$$

上式中，因$\frac{d\vec{v}}{dt}$为加速度$\vec{a}$，所以在相对论里，物体的加速度$\vec{a}$不一定与作用力$\vec{F}$同向；因力$\vec{F}$是两部分矢量之和。不过，这一现象只有在高能粒子中才会出现。在匀速圆周运动的情况下$\left(\frac{dv}{dt}=0\right)$，$\vec{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}$ 此时的$\vec{F}$（就是力的法向分量F_N）才与$\vec{a}$同向。

4. 在相对论里，物体的能量也是相对的。

设外力$\vec{F}$作用在一个自由粒子（无势能的粒子）上，该粒子动能E_K的增量为

$$E_K=\int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^v \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot d\vec{r}=\int_0^v \vec{v}\cdot d\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

用分部积分法，注意到$\vec{v}\cdot d\vec{v}=v\,dv$，有

$$E_K=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\int_0^v\frac{m_0 v\,dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}+m_0 c^2\sqrt{1-\beta^2}-m_0 c^2$$

整理，得

$$E_K=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-m_0 c^2 \qquad (9.16)$$