数学分析

难点精讲

主编　汪文珑　王建力

浙江科学技术出版社

数学分析

难点精讲

主编 汪文珑 王建力

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析难点精讲/汪文珑,王建力主编. —杭州:浙江科学技术出版社,2010.8

ISBN 978-7-5341-3505-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①汪…②王… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 012902 号

书　　名	**数学分析难点精讲**
主　　编	汪文珑　王建力
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码:310006 联系电话:0571-85152486 E-mail:cl@zkpress.com
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州印校印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	787×1092　1/16　　**印　张**　11
字　　数	270 000
版　　次	2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5341-3505-7　　**定　价**　20.00 元

策划组稿　张祝娟　陈　岚　　**封面设计**　孙　菁

责任校对　赵　艳　　**责任印务**　崔文红

前　　言

数学分析是近代数学的基础，是每个理工科大学生的必修课，是现代科学技术中应用最广泛的一门学科。对于数学专业和信息与计算科学专业的学生来说，学好这门课程，无论是后续课程的学习还是今后进一步深造或开展研究工作等，都具有重要的意义.

数学分析的内容大部分属于古典分析范畴，一方面，由于其内容丰富、概念深刻、方法严谨，使初学者难以掌握其本质；另一方面，随着现代数学的发展，其内容愈加广泛，观点愈加新颖.编写《数学分析难点精讲》这本书的目的就是要使学生进一步加深对数学分析基本概念、基本方法和重要原理的理解，进一步掌握数学分析的解题技巧，为今后的学习和工作打下更扎实的基础.

由于《数学分析难点精讲》是在学生完成了数学分析基础内容的学习之后进一步学习的用书，因此在编写本书时，我们注意了以下几点：

1. 体系上不受数学分析原有教学顺序的限制，使一元函数与多元函数、极限、连续、微分、积分、级数等内容互相渗透，以提高学生对数学分析的总体认识.

2. 着重处理了数学分析中的一些难点，例如“一致性”问题是学生在学习中普遍感到困难的内容，本书以较大篇幅予以论述；又如凸函数的内容也得到较大加强，因为它不仅对证明许多重要的不等式十分方便，同时在近代数学的许多分支中有着广泛的应用.

3. 注意加强基本技能的训练与培养，本书以较大的篇幅用于解剖例题，同时精选了几百道典型习题供读者选择使用.

本书是作者从事二十余年数学分析教学实践的结晶，曾作为多届数学专业、信息与计算科学专业的学生选修课教材使用，此次正式出版前又作了认真修改，但由于水平所限，错误与不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

汪文珑　王建力

二〇〇九年五月于绍兴文理学院

目 录

第一章　实数系与不等式

第一节　实数系连续性的基本定理

实数系连续性的八大基本定理：

(1) Weierstrass 单调有界定理

(2) Cauchy - Cantor 闭区间套定理

(3) Dedekind 分割定理

(4) 确界定理

(5) Heine - Borel 有限覆盖定理

(6) Weierstrass 聚点定理

(7) Bolzano - Weierstrass 致密性定理

(8) Cauchy 准则

是数学分析的基础，本节我们证明这八大基本定理的等价性，其顺序是：(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(7)⇒(8)⇒(1)

一、Weierstrass 单调有界定理

定理 1.1　设 $\{a_n\}$ 是单调递增的实数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有上界.

证明　必要性是显然的.

充分性　据 Cauchy 收敛准则，只需证：对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $\mathbf{N}$，当 $n,m\geqslant \mathbf{N}$ 时，恒有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

若不然，即存在 $\varepsilon_0>0$，对任意自然数 $\mathbf{N}$，存在 $n>m>\mathbf{N}$，使

$$a_n-a_m=|a_n-a_m|\geqslant \varepsilon_0.$$

取 $N_1=1$，则存在 $n_1>m_1>1$，使得 $a_{n_1}-a_{m_1}\geqslant\varepsilon_0$. 又取 $N_2=n_1$，则存在 $n_2>m_2>N_2$，使得 $a_{n_2}-a_{m_2}\geqslant\varepsilon_0$.

一般地，取 $N_k=n_{k-1}$，则存在 $n_k>m_k>N_k$，使得 $a_{n_k}-a_{m_k}\geqslant\varepsilon_0$. 将上述 k 个不等式相加，便得：

$$(a_{n_1}-a_{m_1})+(a_{n_2}-a_{m_2})+\cdots+(a_{n_k}-a_{m_k})\geqslant k\varepsilon_0. \tag{1-1}$$

由于 $m_1<n_1<m_2<n_2<\cdots<m_k<n_k$，以及 $\{a_n\}$ 的递增性，由(1-1)便得 $a_{n_k}\geqslant k\varepsilon_0+a_1$. 据实数 Archimedes 原理，对任意 $M>0$，存在 $k_0\in\mathbf{N}$，当 $k\geqslant k_0$ 时，$a_{n_k}\geqslant M$，这与 $\{a_n\}$ 有上界矛盾. 定理证毕.

类似地可以证明：

定理 1.2 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的实数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有下界.

【例 1-1】 设 $a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

证明 设 $x_n=\dfrac{n}{a^n}$，则 $x_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=a>1$，据极限的保号性，存在自然数 $\mathbf{N}$，$n\geqslant \mathbf{N}$ 时，有 $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}>1$，即数列 $x_N,x_{N+1},\cdots,x_n,\cdots$ 是单调递减的，且有下界（例如，零就是一个下界）. 依定理 1.2，设 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

注意到关系式 $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{na}x_n$，便得：$x=\dfrac{1}{a}x$，而 $0<\dfrac{1}{a}<1$，故必有 $x=0$，证毕.

定义 1.1 设 $\{a_n\}$ 为实数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于 $+\infty$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于 $-\infty$.

推论 单调递增的实数列 $\{a_n\}$ 发散于 $+\infty$ 的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 无上界；单调递减的实数列 $\{a_n\}$ 发散于 $-\infty$ 的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 无下界.

证明 仅证推论的前半部分，后半部分可完全类似地得到.

必要性 由极限的定义可得.

充分性 由条件，任意 $M>0$，M 不是 $\{a_n\}$ 的上界，因此存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使 $a_{n_0}>M$，从而当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $a_n\geqslant a_{n_0}>M$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，证毕.

二、Cauchy-Cantor 闭区间套定理

定理 1.3 设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有性质：

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则存在唯一的实数 α，使得 $\alpha\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$.

证明 由条件可知，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有上界的，据定理 1.1 可知 $\{a_n\}$ 收敛，设 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

对任意自然数 k，当 $n>k$ 时，有 $a_k\leqslant a_n<b_n\leqslant b_k$，由极限的不等式性质，便知 $a_k\leqslant\alpha\leqslant b_k$，$k=1,2,\cdots$，这就证明了存在性.

再设 β 也满足 $\beta\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，则由 $0\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant b_n-a_n$，以及条件(2)便知 $\alpha=\beta$，唯一性得证.

注 (1) 在定理 1.3 的条件下，还可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$.

(2) 定理 1.3 中的条件“闭区间”改为“开区间”或“半开半闭区间”，则结论不一定成立. 例如，开区间列 $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$，显然满足定理 1.3 的两个条件，但不存在一个点属于所有的区间.

由下面的例题可以看出应用区间套定理的特点.

【例 1-2】 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内连续，且对 (a,b) 内每一点 x，$\{f_n(x)\}$ 有界，

证明：$\{f_n(x)\}$ 必在 (a,b) 的某一子区间上一致有界.

证明　若不然，则存在 $x_1 \in (a,b)$ 以及 $f_{n_1}(x)$，使 $|f_{n_1}(x_1)| \geqslant 1$，据 $f_{n_1}(x)$ 的连续性，存在闭区间 $I_1 \in (a,b)$，$x_1 \in I_1$，使得 $|f_{n_1}(x)| \geqslant 1$，$x \in I_1$，且不妨设 I_1 的长度小于 $\frac{b-a}{2}$.

同样，$\{f_n(x)\}$ 在 I_1 上的任意一个子区间上非一致有界，故存在 $x_2 \in I_1$ 以及 $f_{n_2}(x)$，使得 $|f_{n_2}(x_2)| \geqslant 2$，根据连续函数的保号性，存在闭区间 $I_2 \subseteq I_1$，I_2 的长度小于 $\frac{b-a}{2^2}$，使得 $|f_{n_2}(x)| \geqslant 2$，$x \in I_2$.

一般来说，存在闭区间列 $I_{k+1} \subseteq I_k \subseteq (a,b)$，$k = 1,2,\cdots$，$I_k$ 的长度小于 $\frac{b-a}{2^k}$，以及函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $|f_{n_k}(x)| \geqslant k$，$x \in I_k$.

据闭区间套定理的证明可知，存在唯一的 $\xi \in I_k$，但 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 ξ 点无界，引出矛盾.

三、Dedekind 分割定理

定理 1.4　**设** $A \subset R$，$B \subset R$，**且满足条件**：(1) $A \neq \varnothing$，$B \neq \varnothing$；(2) $A \cup B = \mathbf{R}$；(3) **若** $a \in A$，$b \in B$，**则** $a < b$. **那么或者** A **中有最大数，或者** B **中有最小数.**

证明　首先由条件 (3) 可知 $A \cap B = \varnothing$，否则，若 $a \in A \cap B$，则由(3) 便得 $a < a$，引出矛盾.

由(1) 可知，存在 $a_1 \in A$，$b_1 \in B$，由(3) 可知 $a_1 < b_1$，取闭区间 $[a_1, b_1]$ 的中点 c_1，由(2) 知 $c_1 \in A$ 或 $c_1 \in B$，若 $c_1 \in A$，则记 $[c_1, b_1]$ 为 $[a_2, b_2]$，否则，记 $[a_1, c_1]$ 为 $[a_2, b_2]$.

将以上做法无限进行下去，使每一次得到的闭区间，其左端点在 A 中，右端点在 B 中，这样就得到满足如下条件的闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，对 $n \in \mathbf{N}$，有：

(a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$；

(b) $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$；

(c) $a_n \in A$，$b_n \in B$.

由(a)(b)，据定理 1.3，存在唯一的实数 c，使得 $c \in [a_n, b_n]$，$n = 1,2,\cdots$.

由 $A \cup B = \mathbf{R}$，$A \cap B = \varnothing$ 可知 $c \in A$ 或 $c \in B$，二者必居其一，且只居其一.

若 $c \in A$，则 c 必是 A 中的最大数.

若不然，设存在 $a' \in A$，使 $a' > c$，记 $d = a' - c > 0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$，及 $b_n \geqslant c$，$n \in \mathbf{N}$，因而存在自然数 n_0. 当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $b_n - c < \frac{d}{2}$，由 $b_n - (a' - d) = b_n - c$，得 $a' - b_n > \frac{d}{2} > 0$，但 $a' \in A$，$b_n \in B$，这与(3) 矛盾，所以 c 必是 A 的最大数.

同样可证，若 $c \in B$，则 c 是 B 的最小数. 定理证毕.

四、确界定理

定义 1.2　**设** $A \subset \mathbf{R}$，**若** $\alpha \in \mathbf{R}$，**满足**：

(1) **任意** $x \in A$，**有** $x \leqslant \alpha$；(2) **任意** $\varepsilon > 0$，**存在** $x_0 \in A$，$x_0 > \alpha - \varepsilon$，**则称** α **是** A **的上确**

界，记为 $\alpha = \sup A$.

类似地可以定义实数集合 A 的下确界 $\inf A$.

【例 1-3】 设 $A = \left\{\frac{n}{n+1}: n \in \mathbf{N}\right\}$，求数集 A 的上、下确界.

解 (1) 对任意 $n \in \mathbf{N}$，有 $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} < 1$，故 A 是有界集合.

任意 $\varepsilon > 0$，取 $n = 1$，则 $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$，于是 $\inf A = \frac{1}{2}$.

(2) 任意 $\varepsilon > 0$，不妨设 $0 < \varepsilon < 1$（否则对任意 $n \in \mathbf{N}$，$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$）.

取自然数 n_0，满足 $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$，因此 $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1}{1-\varepsilon} - 1$，即 $\frac{n_0}{n_0+1} > 1 - \varepsilon$，所以 $\sup A = 1$.

定理 1.5 设 $E \subset \mathbf{R}$，$E \neq \varnothing$，若 E 有上界，则必有上确界；若 E 有下界，则必有下确界.

证明 只证 E 有上界的情形，E 有下界的证明可类似地得到，引进集合

$$B = \{M: 任意\ x \in E, 有\ x \leqslant M\}, A = \mathbf{R} - B.$$

我们验证集合 A,B 满足定理 1.4 的三个条件.

E 有上界，故 $B \neq \varnothing$，又 $E \neq \varnothing$，必存在 $x_0 \in E$，易知 $\{x: x < x_0\} \subset A$，故 $A \neq \varnothing$，即定理 1.4 的条件(1) 成立. 由 A,B 的构造知定理 1.4 的条件(2) 成立.

任意 $x \in A$，x 不是 E 的上界，故存在 $x_0 \in E$，使得 $x < x_0$，对任意 $y \in B$，y 是 E 的上界，有 $x < x_0 \leqslant y$，说明定理 1.4 的条件(3) 成立.

依定理 1.4，存在 α 或是 A 的最大数，或是 B 的最小数. 我们证明 α 不可能是 A 的最大数.

否则，若 $\alpha \in A$，由 A 的规定，α 不是 E 的上界，从而存在 $x_0 \in E$，使 $\alpha < x_0$，依实数的稠密性，存在实数 $r \in (\alpha, x_0)$，由 $r < x_0$ 可知 r 不是 E 的上界，即 $r \in A$，但由 $\alpha < r$ 又得 α 不是 A 的最大数，引出矛盾. 因此 α 必是 B 的最小数.

最后证明 $\alpha = \sup E$.

α 是 B 的最小数，故 $\alpha \in B$，从而对任意 $x \in E$，有 $x \leqslant \alpha$，即定义 1.2 的(1) 成立.

对任意 $\varepsilon > 0$，由于 $\alpha - \varepsilon < \alpha$，$\alpha$ 是 B 的最小数，因此 $\alpha - \varepsilon \notin B$，即 $\alpha - \varepsilon \in A$，但 A 中的数都不是 E 的上界，故存在 $x_0 \in E$，使得 $x_0 > \alpha - \varepsilon$，说明定义 1.2 的(2) 成立. 定理证毕.

由下面的例题可以看出应用确界定理的特点.

【例 1-4】 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数（不必连续），且 $f(a) \geqslant a$，$f(b) \leqslant b$，证明：存在 $x_0 \in [a,b]$，使 $f(x_0) = x_0$.

证明 设 $E = \{x \in [a,b]: f(x) \geqslant x\}$，则 E 是非空有界集合，记 $x_0 = \sup E$，由于

(1) $\forall x \in E$，由 $x \leqslant x_0$ 得 $f(x) \leqslant f(x_0)$，又 $x \leqslant f(x)$，故 $x \leqslant f(x_0)$，于是 $x_0 \leqslant f(x_0)$；

(2) 由 $a \leqslant x_0 \leqslant f(x_0) \leqslant f(b) \leqslant b$ 及 $f(x)$ 的单调性，得 $f(x_0) \leqslant f[f(x_0)]$，这表明 $f(x_0) \in E$，所以 $f(x_0) \leqslant \sup E = x_0$.

综合(1)(2) 可知 $f(x_0) = x_0$.

在实数集中加上 $+\infty$ 和 $-\infty$，称为广义实数集，并规定如下性质：

(1) 对任意 $x \in \mathbf{R}$,有 $-\infty < x < +\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$;

(2) 对 $x > 0$,有 $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$;

(3) 对 $x < 0$,有 $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

运算 $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$ 没有定义. 当需要区别实数与符号 $+\infty$, $-\infty$ 时,则称前者是有限实数.

实数集扩充后,我们规定:

若非空集 E 没有上界,则 $+\infty$ 为其上确界,记为 $\sup E = +\infty$;

若非空集 E 没有下界,则 $-\infty$ 为其下确界,记为 $\inf E = -\infty$.

需要注意的是,$+\infty$ 与 $-\infty$ 不是数,只是一种符号.

五、Heine - Borel 有限覆盖定理

定义 1.3　设 $\sum = \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}$ 是由开区间组成的集合(即对任意 $\alpha \in I$, σ_α 是开区间), $E \subset \mathbf{R}$, 若 $E \subset \bigcup \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}$(即对任意 $x \in E$, 存在 $\sigma_\alpha \in \sum$, 使 $x \in \sigma_\alpha$), 则称 $\sum$ 是 E 的一个开覆盖.

若 $\sum$ 中开区间的个数是无限的,则称 $\sum$ 是 E 的无限开覆盖;若 $\sum$ 中开区间的个数是有限的,则称 $\sum$ 是 E 的有限开覆盖.

例如,开区间集 $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbf{Z}\}$ 是整个实数的一个开覆盖, $\{(2n-1, 2n+3) : n \in \mathbf{Z}\}$ 也是整个实数的一个开覆盖;又如开区间集 $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2}\right) : n \in \mathbf{N}\right\}$ 是 $(0,1)$ 的一个开覆盖,但不是 $[0,1]$ 的开覆盖.

定理 1.6　对闭区间 $[a,b]$ 的任意一个开覆盖 $\sum = \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}$, 必存在 $\sum$ 中有限个开区间 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, 使 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \sigma_i$.

证明　令 $E = \{x : x \in [a,b], [a,x]$ 被 $\sum$ 中有限个覆盖$\}$.

(1) E 非空且有上界. 事实上,由 $[a,b] \subset \bigcup \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}$, 因而必存在开区间 $\sigma_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, 使 $a \in \sigma_\alpha$, 任取 $x \in (a, b_\alpha)$, 则有 $[a,x] \subset (a_\alpha, b_\alpha)$, 说明 $E \neq \varnothing$, 又显然 E 以 b 为上界,据定理 1.5,设 $c = \sup E$, 自然有 $c \leqslant b$.

(2) $c \in E$. 事实上,由于 $c \leqslant b$, $\sum$ 覆盖了 $[a,b]$, 故必存在 $\sigma_\beta = (a_\beta, b_\beta) \in \sum$, 使 $c \in (a_\beta, b_\beta)$, c 是 E 的上确界,对 $\varepsilon = c - a_\beta > 0$, 存在 $x_0 \in E$, 使

$$a_\beta = c - \varepsilon < x_0 \leqslant c.$$

若 $x_0 = c$, 则自然有 $c \in E$; 若 $a_\beta < x_0 < c$, 而闭区间 $[a, x_0]$ 已被 $\sum$ 中有限个开区间所覆盖,在此基础上再加 σ_β, 便知 $[a,c]$ 也被 $\sum$ 中有限个开区间所覆盖,所以 $c \in E$.

(3) $c = b$. 事实上,若 $c < b$, 取 $x \in (c,b) \cap (c, b_\beta)$, 易知 $[a,x]$ 被 $\sum$ 中有限个开区间所覆盖(因为覆盖 $[a,c]$ 的有限个开区间也覆盖了 $[a,x]$), 而 $c < x$, 这与 c 是 E 的上确界矛盾.

综合(1)(2)(3),可知定理的结论为真,证毕.

注　(1) 定理 1.6 中的条件"闭区间"改为"开区间"或"半开半闭区间",结论都未必成立.例如:

开区间集 $\sum = \left\{\left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right): n \in \mathbf{N}\right\}$ 覆盖了开区间 (a,b),但 $\sum$ 中任意有限个开区间都不能覆盖 (a,b).

开区间集 $\sum = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2}\right): n \in \mathbf{N}\right\}$ 覆盖了区间 $(0,1]$,但 $\sum$ 中任意有限个开区间都不能覆盖 $(0,1]$.

(2) 定理 1.6 中的条件"开区间集 $\sum$"不能改为"闭区间集".

例如,闭区间集 $\sum = \left\{\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]: n \in \mathbf{N}\right\} \cup [1,2]$ 覆盖了区间 $[0,2]$,但 $\sum$ 中任意有限个闭区间都不能覆盖 $[0,2]$.

(3) 我们引入紧集概念如下:设 $E \subset \mathbf{R}$,若对 E 的任意一个开覆盖 $\sum = \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}$,总存在 $\sum$ 中有限个开区间 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 覆盖了 E(或者说,对 E 的任意一个开覆盖,总存在有限的子覆盖),则称 E 是 $\mathbf{R}$ 上的紧集.

定理 1.6 是说,有界闭区间是 $\mathbf{R}$ 上的紧集.

由下面的例题可以看出应用有限覆盖定理的特点.

【例 1-5】　设函数 $f(x,y)$ 的偏导数在凸区域 D 内有界,证明:$f(x,y)$ 在 D 内一致连续.

证明　设常数 $M>0$ 满足 $|f_x(x,y)| \leqslant M$,$|f_y(x,y)| \leqslant M$,$(x,y) \in D$,则只需证明:对任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$,有:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| + M|y_1 - y_2|.$$

设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 为点 A,B,以 A,B 为端点的线段上的点为 S,由已知,$S \subseteq D$,且对任意 $P \in S$,存在 $\zeta_P > 0$ 使 $\cup(P,\zeta_P) \subseteq D$,因而开集族

$$\sum = \{\cup(P,\zeta_P): P \in S\}$$

覆盖了有界闭集 S,据 Heine-Borel 有限覆盖定理,存在有限个开集

$$\cup(P_1,\zeta_{P_1}), \cup(P_2,\zeta_{P_2}), \cdots, \cup(P_m,\zeta_{P_m}),$$

使其覆盖了 S,且可使 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}[\cup(P_i,\zeta_{P_i})]$ 的边界 Γ 含于 D 内,以及

$$\rho(\Gamma,S) = \inf\{\rho(P,Q): P \in \Gamma, Q \in S\} > 0.$$

取 AB 上的 $n+1$ 个分点:$A = P_0, P_1, \cdots P_n = B$,使 $\rho(P_i,P_{i+1}) < \rho(\Gamma,S)$,记 P_i 的坐标为 (x_i', y_i'),则有 $Q(x_i', y_{i-1}') \in D$,$i = 1,2,\cdots,n$,即线段 P_iQ_i,Q_iP_{i-1} 均属于 D,于是

$$|f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i',y_i') - f(x_{i-1}',y_{i-1}')|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}[|f(x_i',y_i') - f(x_i',y_{i-1}')| + |f(x_i',y_{i-1}') - f(x_{i-1}',y_{i-1}')|]$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}[|y_i - y_{i-1}'| + |x_i' - x_{i-1}'|] = M[|y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|],$$

且对任意 $\varepsilon > 0$,取 $0 < \zeta \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$,则当 $|x_1 - x_2| < \zeta$, $|y_1 - y_2| < \zeta$ 时,

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

即 $f(x, y)$ 在 D 内一致连续.

六、Weierstrass 聚点定理

定义 1.4　设 $E \subset \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$,若对任意 $\delta > 0$, $U(\alpha, \delta) \cap E$ 是无穷点集,则称 α 是 E 的聚点.

注　α 是 E 的聚点当且仅当对任意 $\delta > 0$, $U^0(\alpha, \delta) \cap E \neq \varnothing$.

例如,点集 $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}$ 有聚点 -1 与 1;

点集 $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}$ 有 5 个聚点:-1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1;

点集 $E = \{x \in [0,1]: x$ 是有理数$\}$ 的聚点集是 $[0,1]$;

自然数集 $\mathbf{N}$ 与整数集 $\mathbf{Z}$ 都没有聚点.

定理 1.7　设 $E \subset \mathbf{R}$ 是有界无限点集,则 E 至少有一个聚点.

证明　设 $E \subset [a,b]$,如果 E 没有聚点,即对任意 $x \in [a,b]$,存在邻域 $U(x)$,使得或者 $U(x) \cap E = \varnothing$(当 $x \notin E$ 时),或者 $U(x) \cap E = \{x\}$(当 $x \in E$ 时),这样就得到了 $[a,b]$ 的一个开覆盖 $\sum = \{U(x): x \in [a,b]\}$,且任意 $U(x) \in \sum$, $U(x) \cap E$ 至多有一点.

据定理 1.6,存在 $\sum$ 中有限个元,即存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$,使

$$E \subset [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i),$$

且 $E \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)\right]$ 至多有 n 个点,从而 E 为有限集,与假设矛盾.定理证毕.

七、Bolzano - Weierstrass 致密性定理

定义 1.5　设数列 $\{x_n\}$,若 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是自然数的一个严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列,则数列 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的子数列,或子列.

注　数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 的下标是 k,而不是 n 或 n_k,所以 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a 是指:对任意 $\varepsilon > 0$,存在自然数 K,当 $k > K$ 时,恒有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$,记作

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

定理 1.8　任一有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$.

证明　数列 $\{x_n\}$ 可视为映射 $f: N \to R$, $f(n) = x_n$ 的值域为 E.

若 E 为有限集,则至少存在一点 $x \in E$, x 在 $\{x_n\}$ 中出现无限多次,即存在下标 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,使得 $x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x_{n_k} = \cdots = x$,易知 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列,且 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x.

若 E 为无限集,由 E 有界,据定理 1.7, E 至少有一个聚点 a.下面证明必有 $\{x_n\}$ 的子列收敛于 a.

因为 $U(a,1) \cap E$ 是无穷点集,取 $x_{n_1} \in U(a,1) \cap E$,而 $U\left(a, \frac{1}{2}\right) \cap E$ 仍是无穷点集,

必存在 $n_2 > n_1$，使得 $x_{n_2} \in U\left(a,\frac{1}{2}\right) \cap E$.

一般来说，如果已经选得 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}} \in E$，满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$，以及 $x_{n_i} \in U\left(a,\frac{1}{i}\right)$，$i=1,2,\cdots,k-1$，则必能选得 $x_{n_k} \in U\left(a,\frac{1}{k}\right) \cap E$，这样就得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$.

对任意自然数 k，有 $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$，故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a，定理证毕.

由下面的例题可以看出应用致密性定理的特点.

【例 1-6】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且有唯一的最小值点 x_0，若 $x_n \in [a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

证明 若 $\{x_n\}$ 不以 x_0 为极限，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$，使

$$|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0, k = 1,2,\cdots. \tag{1-2}$$

注意到 $\{x_{n_k}\} \subseteq [a,b]$，据致密性定理，存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列. 不妨设 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，由(1-2)可知 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x'$，$x' \neq x_0$，又由 $f(x)$ 的连续性，有：

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x').$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$，可得 $f(x') = f(x_0)$，这与 $f(x)$ 只有唯一的最小值点矛盾.

八、Cauchy 准则

定理 1.9 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，对任意 $n, m \geqslant N$，都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

证明 由数列收敛的定义便可得到必要性，下证充分性.

由于数列 $\{x_n\}$ 有界(同收敛数列的有界性证明可得)，据定理 1.8，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$，因而对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 K，对任意 $k \geqslant K$，有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

取 $k_0 > \max\{N, K\}$，有 $k_0 > k$ 且 $n_{k_0} > n_N \geqslant N$，对任意 $n > N$，有

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon,$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，定理证毕.

习　　题

1. 举例说明实数系的八大基本定理对于有理数系都不成立.

2. 求下列数集的上、下确界，并用定义验证：

(1) $E = \{x : x^2 < 2\}$；

(2) $E = \{x : x \in [0,1] \cap Q\}$，$Q$ 为有理数集；

(3) $E = \{x : x = 1 - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbf{N}\}$.

3. 证明有界数集 E 的上、下确界是唯一的.

4. 证明:对任意非空实数集 E,必有 $\sup E \geqslant \inf E$;当 $\sup E = \inf E$ 时,数集 E 有什么特点?

5. 设实数集 $\{-x\}$ 是由数集 $\{x\}$ 的相反数组成的,试证明:

(1) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$;

(2) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

6. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 的实数集,其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$,试证:

(1) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

7. 设 $A \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}$,证明:

(1) $\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(2) $\inf\{A \cup B\} = \min\{\inf A, \inf B\}$.

8. 证明:(1) 若 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$;

(2) 若 $\{y_n\}$ 单调递减且有下界,则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n : n \in \mathbf{N}\}$.

9. 证明:$\inf E \in E$ 的充分必要条件是 E 有最小值;$\sup E \in E$ 的充分必要条件是 E 有最大值.

10. 证明:单调数列收敛的充分必要条件是存在收敛的子列.

11. 设 $\alpha = \sup E$,证明:若 $\alpha \notin E$,则必存在 $\{x_n\} \subset E$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

12. 设 H 为点集 E 的聚点集合,若 x 为 H 的聚点,则 x 必为 E 的聚点.

13. 证明:有界无穷点列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 只有一个聚点.

14. $E = \left\{\left(\dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbf{N}\right\}$ 为开区间集,试问:

(1) E 是否为 $(0,1)$ 的开覆盖?

(2) E 是否有 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 的一个有限开覆盖?

(3) E 是否有 $\left(\dfrac{1}{100}, 1\right)$ 的一个有限开覆盖?

15. 设 $E = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$,证明:若 E 被无限多个开区间所覆盖,则定能从中选出有限个开区间也覆盖 E.

16. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且零点集 $G = \{x : f(x) = 0\} \neq \varnothing$,证明:$\sup G \in G, \inf G \in G$.

17. 利用致密性定理证明单调有界定理.

18. 利用区间套定理证明确界存在定理.

19. 利用确界存在定理证明聚点定理.

20. 利用有限覆盖定理证明 Cauchy 准则.

21. 利用有限覆盖定理证明致密性定理.

第二节 不等式

在我们观察各种现象和探讨事物的各种属性时，常常要对各种量加以比较，量的不等关系普遍存在于人类活动和物质世界之中，量的相等关系仅仅是不等关系的一个特殊表现形式. 数学研究的一个基本方向就是探讨各种不等关系以及如何从这些不等关系中获得相等的结果. 不等式是表示不等关系的主要形式，它是从事分析数学研究的重要工具. 运用不等式的知识对一些量的大小进行估计也是数学分析中的常用技巧. 可以说，不等式在高等数学中所起的作用要比在初等数学中大得多.

一、常用不等式举例

【例 1-7】 设 $b>0, d>0$，若 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \tag{1-3}$$

解 事实上，由条件得 $ad<bc$，于是 $ad+ab<bc+ab$，即

$$a(b+d)<b(a+c). \tag{1-4}$$

类似地有 $ad+cd<bc+cd$，即

$$d(a+c)<c(b+d). \tag{1-5}$$

结合(1-4)与(1-5)便得不等式(1-3).

【例 1-8】 设 $S=\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}$，$b_k>0, k=1,2,\cdots,n$，则

$$\min S\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\max S.$$

解 由例 1-7 使用数学归纳法即可得到.

【例 1-9】 (1) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

等号成立当且仅当 $n=1$；

(2) 设 $0<a_k<1, k=1,2,\cdots,n$，则

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\geqslant 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

等号成立当且仅当 $n=1$.

解 使用数学归纳法即可得到.

【例 1-10】 (Bernoulli 不等式) 设 $a>-1$，则 $(1+a)^n\geqslant 1+na$，等号成立当且仅当 $n=1$ 或 $a=0$.

解 由例 1-9 可得.