主编 曹旭东 副主编 李有文 张洪斌

数学建模原理与方法

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学建模原理与方法

Shuxue Jianmo Yuanli yu Fangfa

主　编　曹旭东
副主编　李有文　张洪斌

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书系统地介绍了数学建模的理论和方法，全书共9章，主要内容包括数学建模概论、初等模型、微分与微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型、图与网络模型、数据分析与预测模型、其他模型以及MATLAB软件介绍，重点介绍各种模型的建模原理和方法。每章配有习题供学生练习。

本书可作为高等学校各专业数学建模课程的教材，也可作为学生参加数学建模竞赛的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模原理与方法／曹旭东主编. -- 北京：高等教育出版社，2014.1
ISBN 978-7-04-038717-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第289453号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 张申申　版式设计 杜微言
插图绘制 尹 莉　责任校对 刘春萍　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25	版　　次	2014年1月第1版
字　　数	450千字	印　　次	2014年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	36.30元

物 料 号 38717-00

前言

大学生数学建模竞赛在我国已经开展了20多年，数学建模在培养学生创新意识和运用所学知识解决实际问题能力方面的作用已经得到社会的广泛认可。近年来，随着科学技术的发展，人类进入了大数据时代，科技和社会领域的大量问题都涉及大量数据的挖掘和运用，这必然影响到数学建模内容和方法的变化。从数学建模教学和竞赛来看，部分程式化的建模方法逐步被淘汰，数据分析和处理方法则显得越来越重要。为了适应这种形势的变化，我们编写了这本数学建模教材，以满足数学建模教学和竞赛培训之用。

全书共分9章，包括数学建模概论、初等模型、微分与微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型、图与网络模型、数据分析与预测模型、其他模型及MATLAB软件介绍等，各章附有案例和习题。

本书在编写上有以下特点：

一、突出对数学建模基本原理和主要方法的介绍，充分考虑学生的知识结构和知识水平。书中比较系统地介绍了各类常见的数学模型原理，对原理的介绍遵循“基本、必需、由浅入深”的原则，理论性较强、对数学建模实际作用不大的非典型方法则尽量少介绍或不介绍。

二、注重数学建模原理与实际问题的紧密结合，注重对学生实际建模能力的培养。书中除了介绍建模原理外，还因地制宜地引入一些典型的实际案例，让读者掌握有关原理的应用方法，获得使用有关原理解决实际问题的能力，充分体会数学建模的特殊魅力。

三、强调与计算机和数学软件的有机结合。计算机和数学软件是数学建模的主要工具，各类数学软件中都渗透着相关的数学理论。有些建模理论虽然很复杂，但不要求学生掌握，只要会用有关软件实现就可以。因此在书中除专门介绍常用数学软件MATLAB外，在数学规划模型、数据分析理论和方法中也因地制宜地穿插其他软件的简单应用，方便学生理解有关概念和阅读程序结果。

本书由曹旭东担任主编，并编写了第四、六章及第五章的5.3，5.4节，张洪斌编写了第一、二章并编写了前言，李有文编写了第三、八、九章及第五章的5.1，5.2，5.5，5.6节，孔慧华编写了第七章。曹旭东负责统稿并选编大部分习题。

在本书编写过程中，一直得到山西省工业与应用数学学会的大力支持。高等教育出版社对本书的出版花费了大量心血，并提出不少有益的建议，对此我们深表感谢。我们衷心希望本书能为推动数学建模教学和竞赛做出贡献。

由于编者能力有限，书中缺点和错误在所难免，希望得到广大师生的体谅，并予以批评指正。

编 者

2013.08

目录

第一章　数学建模概论

1.1　从现实对象到数学模型

在现实生活中，人们经常会遇到这样的问题，需要揭示某些数量的关系、模式或空间形式，以期使问题得到圆满解决。

例 1.1.1　包装饮料或啤酒的易拉罐为什么要设计成我们经常看到的那种形状。是为了好拿，还是节省材料，抑或还有别的什么原因。

例 1.1.2　价格竞争问题。两个加油站位于同一条公路旁，为在公路上行驶的汽车提供同样的汽油，彼此竞争激烈。一天甲加油站推出“降价销售”吸引顾客，结果造成乙加油站的顾客被拉走，影响了乙加油站的赢利。由于利润是受售价和销售量的影响和控制的，乙加油站为了挽回损失采取对策，决定也降低售价以争取顾客，问乙站如何决定汽油的价格，既可同甲站竞争，又可获得尽可能高的利润。

例 1.1.3　将温度为 $T(0)=150$ ℃的物体放在温度为 24 ℃的空气中冷却。经 10 min 后，物体温度降为 $T(1)=100$ ℃，问 $t=20$ min 时，物体的温度 $T(2)$是多少？

例 1.1.4　你必须为学校的游园会组织一个碰运气的游戏，参赛者付 10 元参加费，可摇动 3 个骰子。记录下点数，对高点数有现金奖赏。问题是要决定这些奖金是否足以刺激人们参与此游戏，而对学校来说，游戏收入起码要与付出的奖金相抵，学校不要赚很多钱。

例 1.1.5　你是一位家庭主妇，为了准备第二天的膳食，需要去市场买至少 5 样菜，当你确定了要买的 5 种菜以及它们的价格后，你准备各买多少才能满足你一天的营养而又花钱最少？

上述例子都是发生在我们身边的实际问题，由于它们或多或少都与数量有关，所以要想解决它们，就需要用数学语言将它们表达出来，然后分析其结果，最终得到结论。这一过程就是数学建模，而用数学语言所表达的问题，就是数学模型。

下面我们对例 1.1.2 做一分析，其他问题可作为习题来思考。

我们将站在乙加油站的立场上为其制定价格对策，就需要建立一个数学模

型来描述甲加油站汽油价格下调后乙加油站销售量的变化情况。为描述价格和汽油销售量之间的关系，引入如下一些指标：

P——汽油的正常销售价格(元/L)；

L——降价前乙加油站的销售量(L/日)；

w——汽油的成本价格(元/L)；

x——乙加油站的销售价格(元/L)；

y——甲加油站的销售价格(元/L)。

还需要分析影响乙加油站汽油销售量的因素。它受以下几个因素的影响：

(1) 甲加油站汽油降价的幅度；

(2) 乙加油站汽油降价的幅度；

(3) 两站之间汽油销售价格之差。

此外还假定汽油的销售价格保持不变，并且假定以上各因素对乙加油站汽油销售量的影响是线性的。于是，乙加油站的汽油销售量可由下式给出

$$L-a(P-y)+b(P-x)-c(x-y)$$

其中 a、b、c 是以上三个因素对乙加油站汽油销售量影响的比例常数，且均大于零。因此乙加油站的利润函数为

$$R(x,y)=(x-w)[L-a(P-y)+b(P-x)-c(x-y)]$$

如果 y 给定，可以求得 $R(x,y)$关于 x 的极大值点为

$$x^*=[L+y(a+c)-P(a-b)+w(b+c)]/2(b+c)$$

也就是说，当甲加油站把汽油价格降到 y 元时，乙站把它的汽油价格定为 x^* 时，可以使乙站获得最高的利润。

在数值模拟中，令 $L=2\ 000$，$P=4$，$w=3$，$y=3.7$，3.8，3.9，由于经济学的现象是难以通过试验来实现的，我们无法要求任何一个加油站频繁调整它的销售价格来计算不同价格下的销售量，因此参数 a，b，c 难以给出估计值，只能是虚拟数值：$a=b=1\ 000$，$c=4\ 000$。表 1－1 列出了甲加油站降价 0.1 元，0.2 元，0.3 元时乙站的最优销售价格。

表 1－1 乙加油站的最优售价及其利润

y	x	$R(x,y)$
3.9	3.65	2 112.5
3.8	3.60	1 800.0
3.7	3.55	1 512.5

请考虑：在这个模型的数值模拟中，为什么三个参数都取数量级 O

(1 000)？用其他数量级试一试。

从上例我们看到，数学模型实际上就是对于现实问题中的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制。

1.2 数学建模的过程与分类

1.2.1 什么是数学模型?

数学模型的含义很广，提法也不一。一般来说，按照广义的解释，凡是一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式(代数方程、函数方程、微分方程、差分方程、积分方程等)以及由公式系列构成的算法系统等都被称为数学模型。按照狭义的解释，凡是将具体现象、事物的特征和性质给以数学表达的数学结构，如各种等式、不等式、图、表或框图等，也叫数学模型。在本书中，数学模型一词作狭义的理解。即以解决某个现实问题为目的。从该问题中抽象、归结出来的数学问题就称为数学模型。更简洁地，也可以认为数学模型就是用数学术语对现实问题的具体描述。

既然数学模型是以解决现实问题而建立起来的。它必须反映现实，也就是反映现实问题的数量关系。但是由于能用数学表示的事物是有限的，因此在许多情况下，与现象完全吻合的数学表述是不可能的。数学模型作为一种模型，必须对现象做出一些必要的简化和假设，首先要忽略现实问题中许多与数量无关的因素，其次还要忽略一些次要的数量因素。正是由于这种原因，可以说数学模型是用数学关系式描述的一种对现实问题的近似。

1.2.2 数学模型的分类

建立数学模型的过程称为数学建模。用数学方法解决现实问题的第一步就是建立数学模型，然而建立数学模型决非易事，通常需要经过多次反复，即通过对现实问题的探求，经简化、抽象，建立初步的数学模型；再通过各种检验和评价，发现模型的不足之处，然后作出改进，得到新的模型。这样的过程通常要重复多次才能得到理想的数学模型。

在现实问题中，由于特定对象系统形形色色，千差万别，描述它们的模型，也就种类繁多。下面介绍几种常见的数学模型的分类方法。

(1) 按照模型所使用的数学方法可分为确定性模型、随机性模型和模糊

性模型。

确定性模型：模型相应的实际对象具有确定性和固定性，对象间又具有必然的联系，这类模型的表示形式可以是各种各样的方程式、关系式、网络图等，所使用的方法是经典的数学方法。

随机性模型：这类模型的实际对象具有随机性，数学模型的表示工具是概率论、数理统计及随机过程等。

模糊性模型：这类模型所相应的实际对象及其关系具有模糊性，数学模型的基本表示工具是模糊集合理论及模糊逻辑等。

(2) 按照对研究对象的了解程度，有所谓白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

这里白箱是指可以用像力学、电路理论等一些机理(指数量关系方面)清楚的学科来描述的现象，其中需要研究的主要是优化设计和控制方面的问题；灰箱主要是指化工、水文、地质、气象、交通、经济等领域中机理尚不清楚的现象，对这类问题，在建立和改善模型方面还有许多工作要做；至于黑箱，主要包括的可能是生态、生理、医学、社会等领域中一些机理更不清楚的现象。黑箱问题过去作定性研究较多，但研究逐渐往定量化方向发展。定性因素数量化一般采用模糊数学方法、优度法及比较矩阵法。

(3) 按照数学模型的结构可分为分析的、非分析的和图论的。分析的模型是以无穷小量概念为基础研究函数中变量之间的依赖关系，如常微分方程、偏微分方程、积分变换、无穷级数和积分方程等；非分析的模型是用符号系统来表示方程或表达式中变量和常数的运算关系(如代数)，或者研究他们的坐标关系(如几何)，集合论、群论、抽象几何均属此类型；图论的模型是以点和点的连线(有向的或无向的)组成的用来表示各种关系的图形，既能表达分析的问题，又能表达非分析的问题，具有独特的运算形式，如结构树图、决策树图、状态图等。

(4) 按照模型研究变量特性，可以分为离散模型和连续模型，或者线性模型和非线性模型，或者单变量模型和多变量模型，或者静态模型和动态模型，或者参数定常模型和参数时变模型，或者集中参数模型和分布参数模型等。

(5) 按照模型研究对象所属的实际领域有工程模型、人口模型、交通模型、生态模型、生理模型、经济模型、社会模型等。

最后还要指出，数学模型的方法与其他抽象方式是不同的。它除对现实问题中的事物、过程和现象进行抽象外，还必须要用某种文字、符号、图形、数学公式描述客观事物的特征及其内在联系，然后对它们进行研究、分析、检

验，并导出结论。数学模型方法与实验方法也不同，它不要求对事物过程或现象本身进行科学实验，只通过模拟这些事物过程和现象的模型进行验证。正因为如此，这种数学建模方法在解决实际问题中得到了广泛的应用。

1.2.3　怎样建立一个完整的数学模型

我们已经看到数学建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段。那么，什么是一个好的数学模型呢？一般说来，好的数学模型应具备以下特点：

(1) 对所给问题有较全面的考虑。在一个实际问题中，往往有很多因素同时对所研究的对象发生作用，进行数学描述时，应全面地对这些因素加以考虑。这项工作可分为三步进行：

① 列举各种因素；

② 选取主要因素计入模型；

③ 考虑其他因素的影响，对模型进行修正。

(2) 对已有模型进行创造性的改造。数学模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象所属领域所独有，可以转移到另外的领域。在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型，能否对已有的模型作出创造性的改进，是考虑一个数学模型优劣的重要标志。

(3) 善于抓住问题的本质，简化变量之间关系。数学模型应当是针对实际问题的本质刻画，模型过于复杂，则无法求解或求解困难，就不能反映客观实际。因此建模的原则是：模型尽可能简单明了，思路清晰，尽量不用高深的数学知识，不追求模型技术的完善，而侧重于实际应用。

(4) 注重结果分析，考虑其在实际中的合理性。数学建模是一个从实际到数学，再从数学到实际的过程。由于现有的模型仅依赖于所给数据，则如果从模型得出的结果与实际吻合，模型是成功的，如果差别较大，模型是失败的。

(5) 具有较好的稳定性。数学模型是依据已有的数据和其他信息建立的，它的价值在于能够从已知的信息预测未知的东西。因此，一个好的数学模型的结果对原始数据应有较好的依赖性，即原始数据或参数的微小变动不会引起结果的很大变化，这是模型适用性和有效性的保证。

在了解了数学模型的特点之后，下面我们给出建立数学模型的方法和步骤：

(1) 明确问题

要建立现实问题的数学模型，第一步是对要解决的问题有一个明确清晰的提法。通常我们碰到的某个实际问题，在开始阶段是含糊不清的，又带有实际