

◎ 高等学校统计学类系列教材

数理统计教程

王兆军 邹长亮 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校统计学类系列教材

数理统计教程

Shuli Tongji Jiaocheng

王兆军 邹长亮 编著



0212-83
47



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

数理统计是一门主要研究如何有效地收集、整理和分析受随机影响的数据,并对所考虑的问题作出科学推断的一门学科,它具有很强的应用性,并且在许多学科中都得到了广泛的应用,且取得了良好的社会和经济效益。本书主要讲述数理统计的一些基本概念与方法,如几个常用的抽样分布,矩估计、最小方差无偏估计、极大似然估计、最小二乘估计等点估计方法和基于枢轴量法的区间估计,单样本与两样本的显著性检验、最大功效检验、似然比检验、序贯概率比检验及一些拟合优度检验方法。另外,本书还简单介绍了某些统计模拟方法以及现在非常流行的 Bootstrap 和经验似然方法。

本书可作为数学类专业和统计学专业本科生数理统计教材,也可供其他专业、工程技术人员和应用工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理统计教程 / 王亚军, 邹平亮编著. — 北京: 高等教育出版社, 2014.2

ISBN 978-7-04-039054-1

I. ①数… II. ①王…②邹… III. ①数理统计-教材 IV. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 301128 号

策划编辑 胡颖
插图绘制 于博

责任编辑 胡颖
责任校对 胡晓琪

封面设计 于文燕
责任印制 张福涛

版式设计 于婕

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京七色印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 20
字 数 360 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014 年 2 月第 1 版
印 次 2014 年 2 月第 1 次印刷
定 价 31.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 39054-00

作 者 序

数理统计是一门应用性非常强的学科,它的历史已有三百多年,即使从 K. Pearson(1857—1936) 和 R. A. Fisher(1890—1962) 的工作算起,数理统计的发展也已有一百多年的历史,并且取得了良好的社会和经济效益。

按《不列颠百科全书》上的说法,统计学 (statistics) 是“收集和分析数据的科学与艺术”,且该书中没有标出“mathematical statistics”一词,因为西方的“mathematical statistics”是特指统计方法的理论基础那一部分。我们所说的数理统计 (mathematical statistics) 即为西方所说的“statistics”,以示和视为社会科学的经济统计学加以区别。

数理统计是一门研究如何有效地收集和分析受到随机影响的数据的学科,经过多年的发展和完善,其研究内容已非常丰富,且形成了多个学科分支,如抽样调查、试验设计、回归分析、多元统计分析、时间序列分析、非参数统计、Bayes 推断等。而且,数理统计也在多个领域有所应用,可以说,只要一个实际问题有大量或少量数据,我们就可以利用数理统计方法去分析它、解决它。

本书用较严格的语言,较详细地介绍数理统计学中的一些基础知识,以期为进一步的理论研究打下较坚实的基础。另外,也对当前统计学的某些热点研究方向,如经验似然、Bootstrap 等基本概念和知识进行了简单的介绍,希望开拓学生的视野。

全书共分 8 章。第 1 章介绍了统计学中的一些基本概念,如样本、总体、样本分布族、统计量、充分统计量及几个常用抽样分布。第 2 章给出了矩估计、极大似然估计、无偏估计等点估计方法,并且在此基础上,简单介绍了 Bayes 估计和最小二乘估计。第 3 章介绍了区间估计的基本概念,基于枢轴量法的区间估计和 Fisher 信念推断方法。第 4 章介绍了关于单样本及两样本正态总体的 Fisher 显著性检验,以及单参数指数型分布族的显著性检验和似然比检验问题。第 5 章讲述了基于 Neyman-Pearson 引理的一致最大功效检验,多参数指数型分布族的最大功效检验和序贯概率比检验。第 6 章介绍了 Pearson χ^2 拟合优度检验, Kolmogorov 检验以及某些正态性检验。第 7 章介绍了产生随机数的几种常用方法和随机模拟计算。第 8 章简单介绍了 Bootstrap 和经验似然初步。附录给出了一些常用分布的分位数表(均是利用 FORTRAN 程序计算得到)。

在本书的编写过程中,我们选择了一些常用的典型统计方法来叙述前人积累起来的统计思想和概念,并注重统计的应用性。本书是为南开大学数学科学学院统计学专业本科生的“数理统计”必修课编写的,且在南开大学数学科学学院讲授多年。期间,许多学生对本书提出了许多宝贵的修改意见。

多位审稿者对本书初稿提出了许多非常好的修改意见,我们在此表示衷心的感谢。

在编写本书的过程中,我们参阅了多本书籍,如陈希孺院士的《数理统计学简史》,Lehmann教授的《点估计理论》,茆诗松、王静龙教授的《数理统计》,茆诗松、王静龙、濮晓龙教授的《高等数理统计》,韦博成教授的《参数统计教程》及复旦大学编写的《概率论:第二册》等。这些书籍为本书的编写提供了许多宝贵的材料,在此表示衷心的感谢。

由于我们无论是中文水平还是统计学专业知识都有限,编写之中难免会有不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

作者

2013年10月于南开园

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 基本概念	1
§1.1 引言	1
§1.1.1 几个例子	1
§1.1.2 什么是数理统计	3
§1.2 几个基本概念	3
§1.2.1 样本和样本分布	3
§1.2.2 总体与总体分布	5
§1.2.3 样本分布族, 参数和参数空间	6
§1.2.4 统计量	7
§1.2.5 经验分布函数	9
§1.2.6 抽样分布	10
§1.3 统计中常用的抽样分布	12
§1.3.1 χ^2 分布	12
§1.3.2 t 分布	19
§1.3.3 F 分布	22
§1.3.4 几个常用的分布族	25
§1.4 充分统计量	29
§1.5 数据初步分析	36
§1.5.1 直方图	37
§1.5.2 茎叶图	38
§1.5.3 五数概括	39
§1.5.4 盒子图	39
习题一	40
第 2 章 点估计	45
§2.1 引言	45
§2.2 矩估计	45
§2.3 极大似然估计与 EM 算法	48

§2.3.1	极大似然估计	48
§2.3.2	EM 算法	53
§2.4	无偏估计与一致最小方差无偏估计	59
§2.4.1	无偏估计	59
§2.4.2	一致最小均方误差准则	61
§2.4.3	一致最小方差无偏估计	62
§2.5	完备统计量	68
§2.5.1	完备性的定义	68
§2.5.2	完备统计量的应用	70
§2.5.3	指数型分布族的充分完备性	72
§2.5.4	次序统计量的完备性	74
§2.6	信息不等式及有效估计	75
§2.6.1	正则分布族与 Fisher 信息量	75
§2.6.2	信息不等式	79
§2.6.3	有效估计	85
§2.6.4	Bhattacharya 下界	86
§2.7	相合估计	88
§2.7.1	相合估计	88
§2.7.2	样本分位数的相合性	90
§2.7.3	极大似然估计的相合性	90
§2.7.4	相合渐近正态估计	92
§2.8	Bayes 估计	95
§2.9	最小二乘估计	99
§2.9.1	最小二乘估计	99
§2.9.2	最优线性无偏估计	101
§2.9.3	加权最小二乘估计	102
§2.9.4	线性模型的诊断	103
§2.9.5	一个故事	105
习题二		105
第 3 章	区间估计	112
§3.1	区间估计中的几个基本概念	112
§3.2	枢轴量法	115

§3.2.1 小样本情况	116
§3.2.2 大样本情况	120
§3.3 两个正态总体的置信区间	122
§3.3.1 Behrens-Fisher 问题	122
§3.3.2 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间	125
§3.4 信念推断方法	126
§3.4.1 信念分布	126
§3.4.2 函数模型方法	128
习题三	129
第 4 章 假设检验——显著性检验	132
§4.1 Fisher 的显著性检验思想和基本概念	132
§4.1.1 Fisher 显著性检验思想	132
§4.1.2 基本概念	133
§4.2 单样本正态总体参数的显著性检验	137
§4.2.1 单样本正态总体均值的检验	138
§4.2.2 单样本正态总体方差的检验	142
§4.3 两样本正态总体参数的显著性检验	147
§4.3.1 两样本正态总体均值的显著性检验	148
§4.3.2 两样本正态总体方差的显著性检验	153
§4.4 单参数指数型分布族的显著性检验	156
§4.4.1 单参数指数型分布族的性质	156
§4.4.2 单参数指数型分布族的假设检验	158
§4.4.3 Bernoulli 分布的假设检验	158
§4.5 似然比检验	161
§4.6 p 值	167
§4.7 一个故事	170
习题四	171
第 5 章 假设检验——最大功效检验	176
§5.1 引言	176
§5.2 Neyman-Pearson 引理	178
§5.3 一致最大功效检验	187

§5.3.1	定义及某些有用的结论	187
§5.3.2	单调似然比分布族	189
§5.3.3	单侧假设的一致最大功效检验	191
§5.3.4	双侧假设的一致最大功效检验	198
§5.4	无偏检验和一致最大功效无偏检验	201
§5.4.1	定义	202
§5.4.2	一致最大功效无偏检验	202
§5.5	多参数指数型分布族的最大功效检验	208
§5.5.1	多参数指数型分布族的一致最大功效无偏检验	209
§5.5.2	单样本正态总体参数的最大功效检验	210
§5.5.3	两样本正态总体参数的最大功效检验	215
§5.6	序贯概率比检验	215
	习题五	218
第 6 章	几个常用的分布检验方法	223
§6.1	正态概率纸检验法	223
§6.1.1	正态概率纸的构造	224
§6.1.2	正态概率纸的应用	226
§6.2	Pearson χ^2 拟合优度检验	227
§6.2.1	分类数据的 χ^2 拟合优度检验	227
§6.2.2	带有未知参数的 χ^2 拟合优度检验	232
§6.3	列联表的独立性检验	234
§6.4	Kolmogorov 检验	238
§6.5	正态性检验	240
§6.5.1	W 检验	240
§6.5.2	D 检验	242
	习题六	243
第 7 章	统计模拟	246
§7.1	随机数的产生	246
§7.1.1	逆变换法	247
§7.1.2	筛选抽样法	249
§7.1.3	复合抽样法	251

§7.1.4 随机向量的抽样法	252
§7.2 随机模拟计算	254
§7.2.1 样本均值法	257
§7.2.2 重要抽样法	259
§7.2.3 Rao-Blackwell 方法	261
§7.2.4 分层抽样法	263
§7.2.5 关联抽样法	265
习题七	266
第 8 章 Bootstrap 和经验似然	268
§8.1 Bootstrap	268
§8.1.1 非参数和参数化 Bootstrap	269
§8.1.2 几个常见的应用	270
§8.1.3 基于回归模型的 Bootstrap 方法	272
§8.2 经验似然简介	274
§8.3 阅读知识: 多元情形下经验似然的计算	281
习题八	283
附录 某些常用分布的分位数表	284
附表 1 标准正态分布累积分布函数值表	285
附表 2 t 分布的分位数表	287
附表 3 χ^2 分布的分位数表	288
附表 4 F 分布的分位数表	289
附表 5 Kolmogorov 检验分位数表	294
附表 6 W 检验统计量的系数表	295
附表 7 W 检验的下侧分位数表	297
附表 8 D 检验的分位数表	298
附表 9 二项分布表	299
索引	301
符号说明	305
参考文献	307

第1章 基本概念

在本课程中用到的一些基本概念将在本章给出,如样本、总体、抽样分布、参数及统计量、充分统计量、次序统计量等.另外,某些基本的数据分析方法,如直方图、茎叶图、盒子图等也将在 §1.5 介绍.

§1.1 引言

在本节,我们将通过几个例子来说明数理统计的几个研究方向,之后再介绍数理统计的几个特点.

§1.1.1 几个例子

在讲解基本概念之前,我们先看几个例子.

例 1.1.1 (抽样调查 (sampling survey)) 随着高校的扩招和自主招生的推广,每所院校及院系都越来越重视自己的生源情况,也都想出了各种各样的方法以吸引各地优秀的中学生报考自己的学校.导致这种现象的根本原因就是各个学校都认识到学生质量对学校声誉的重要性.如果仅从考试成绩来看,大学成绩是否真的与中学成绩存在着很大的相关性?要想回答此问题,我们有必要考虑如下问题:

- 选取哪几所大学进行研究?在选定的大学中选取多少名什么样的大学生?
- 用什么成绩来反映大学和中学的成绩?
- 有了数据后如何进行分析?
- 这种情况对于重点大学与一般大学是否一样?

上面的几个问题中既有如何选取学校和学生的问題,也有如何进行数据分析的问题.有关学校及学生的选取问题,其中有关抽样内容我们将在抽样调查课程中学习.

例 1.1.2 (估计 (estimation)) 如何综合评价一个大学生的学习成绩?这是一个估计的问题,我们将在本门课程中加以介绍.

例 1.1.3 (假设检验 (hypothesis testing)) 在许多体育比赛中,裁判

均是通过掷硬币的方法让一方先进行选择,大家之所以接受这种方法是由于我们相信硬币是均匀的,即掷一次硬币出现正面与反面的概率是相同的.现要验证某硬币的均匀性,我们将这枚硬币投掷 495 次后,正、反面分别出现 220 次和 275 次,请问:我们能说这枚硬币均匀吗?

这个问题的解决方法,就是本课程将要介绍的假设检验中的内容.

例 1.1.4 (试验设计 (design of experiment)) 农民在种地之前,会选择适当的种子.假如一个农业试验站共有五种小麦可供选择,请问此试验站应向农民提供哪种种子以备来年的播种?

此问题属于试验设计的研究范畴.试验设计这一学科的产生、发展与 R. A. Fisher 密不可分.他 1909 年入剑桥大学攻读数学和物理,期间受 K. Pearson 的影响,兴趣主要集中在生物学和统计学上.1914 年第一次世界大战爆发后, Fisher 也打算投笔从戎,但因视力不好未果.在此后的 5 年里他的职业是中学教师,期间他认为农业对于一个国家是非常重要的,于是他曾在短时间内经营过一个小型农场,并于 1919 年进入 Rothamsted 试验站工作.在此试验站工作期间(1919—1933),他提出并发展了试验设计这一方向.

例 1.1.5 (质量控制 (quality control)) 在一个工业产品的设计和生产过程中如何控制其产品质量?如何验证其质量是否合格?又如何改进其产品质量?

此问题就是质量控制的研究内容,它可分为线外(off-line)和线内(on-line)质量控制.

例 1.1.6 (时间序列 (time series)) 股票是大家常用的投资工具之一,如把每天的收盘价记录下来,以 $\{X_t\}_{t=1}^n$ 表示过去 n 天的收盘价,则人们关心的问题就是如何利用这些数据预测未来?

由于这样的数据是依时间顺次排列的,故它们的研究方法将在时间序列分析这一课程或方向中加以介绍.当然,类似的与时间有关的数据还有很多,且多与经济、金融等行业有关.

例 1.1.7(回归 (regression)) 从遗传学的角度看,遗传会把一种性状(如身高)的优势传递给下一代.如果真是这样的话,我们会看到一代一代的人中,个子很高和很矮的人的比例会日渐升高,而中间部分的比例会日渐下降,但实际上,一代代人的身高却稳定在正态分布,请问如何解释这种情况?

为解决此问题, F. Galton(1822—1911) 花费了十几年的时间,最终此问题得到了圆满的解决. Galton 是 Darwin(1809—1882) 的近亲表弟,他受 Darwin 的影响,对遗传学很有兴趣,概率论中讲述的 Galton 钉板即是他发明的一种产生正态分布的装置(他称这个装置为 quincunx).在上述亲子身高问题中,

Galton 发现了亲子代间性状遗传中, 性状有向中心回归的现象, 简言之, 高个子的后代平均来说也高些, 但不如其父代那么高, 要向平均身高的方向“回归”一些. 其具体验证方法请见陈希孺 (2000).

§1.1.2 什么是数理统计

对于数理统计的各种各样的定义, 虽无原则性的分歧, 但是也很难找到一种说法是完全无懈可击的. 现就这些定义中的一些共性进行分析和说明.

1. 必须是受到随机影响的数据, 才能成为数理统计学的研究内容.

数理统计与其他学科的一个重要区别点即在于随机性. 随机性的第一个来源就是试验误差 (不是系统误差), 第二个来源就是由于研究问题所涉及的对象太多, 故我们只能随机地抽取部分来进行研究所造成的.

2. 如何“有效”地收集数据.

“有效”有两个方面的含义: 一是可以建立一个模型来描述所得数据, 二是数据中要尽可能多地包含与研究问题有关的信息, 例如想调查某地区共 10000 户农户的经济状况, 由于条件的限制, 我们不可能逐户地去调查, 现决定从中随机地抽取 100 户作实际调查, 那问题是:

100 户是否合适 (如何权衡精度与费用)?

这 100 户如何去选 (如何抽样以得到更有代表性的数据)?

3. 如何“有效”地利用数据.

获取数据的目的在于提供所研究问题的相关信息, 这种信息有时并不是一目了然的, 而需要用“有效”的方法去提取或提炼, 之后再对所研究的问题作出一个结论, 这种“结论”在统计上被称为推断 (inference).

为有效地使用数据进行统计推断, 就要涉及统计中的一些准则, 以评价推断的优劣.

§1.2 几个基本概念

§1.2.1 样本和样本分布

(一) 样本 (sample)

通过观测或试验而得到的数据就称为**样本**, 又称样品或子样. 如将一物体放在天平上称 n 次, 记录到的数据为 x_1, \dots, x_n , 则它的全体, 即 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, 就称为一个样本, n 称为**样本容量** (sample size) 或**样本大小**.

样本分定量 (variable) 与定性 (attribute) 两种, 也有一维与多维之分. 样本可能取值的全体就称为**样本空间**(sample space), 一般记为 \mathcal{X} .

(二) 样本分布 (sample distribution)

如果仅从应用的角度看, 样本就是一组已知的数字, 但我们必须注意到, 样本是一组受到随机影响的数. 如从概率论的角度看, 样本就是随机变量, 而我们收集到的具体样本则是这个随机变量的实现或观测值, 这即是样本的二重性.

既然样本是随机变量, 就有概率分布, 于是, 这个概率分布就称为**样本分布**.

例 1.2.1 假设一批产品共有 N 个, 其中有次品 M 个, 但未知. 现从 N 个产品中不放回地随机抽取 n 个产品加以检验, 用以估计 $M/N = p$ 的值. 试求样本分布.

解 对于本问题, 假设我们有一个属性指标 X , 如 $X = 1$ 对应着次品, $X = 0$ 对应着合格品. 于是, 我们抽取的 n 个样本可以记为 X_1, \dots, X_n , 其中每一个样本的观测值都只能取 0 或 1. 显然, X_i 是一随机变量, 且容易验证此时的样本分布为

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \frac{M(M-1)\cdots(M-a+1)}{N(N-1)\cdots(N-a+1)} \cdot \frac{(N-M)\cdots(N-M-n+a+1)}{(N-a)\cdots(N-n+1)}, \quad (1.2.1)$$

其中 $\sum_{i=1}^n x_i = a$, x_1, \dots, x_n 为样本 X_1, \dots, X_n 的观测值. □

我们回忆一下概率论所学的超几何分布 (hypergeometric distribution), 知 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布即为超几何分布, 即

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = a\right\} = \frac{\binom{M}{a} \binom{N-M}{n-a}}{\binom{N}{n}}.$$

例 1.2.2 对于上一例子, 如果我们考虑有放回抽样, 且仍以 x_1, \dots, x_n 记 n 次抽样得到的结果, 则样本分布如何?

解 对于此问题, 由于样本之间是独立的, 故样本分布为

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \left(\frac{M}{N}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}. \quad (1.2.2)$$

□

从例 1.2.1 和例 1.2.2 可以看出, 由于有放回抽样得到的样本是独立同分布的, 而不放回抽样得到的样本则不是, 故不放回抽样比有放回抽样的样本分布要复杂许多. 但是, 当 N/n 很大时, (1.2.1) 与 (1.2.2) 相差并不太大, 故我们可以近似地把不放回抽样当作有放回抽样来处理.

例 1.2.3 为估计一物体质量 μ , 现用一架天平将它独立重复测量 n 次, 结果记为 x_1, \dots, x_n , 试确定样本分布.

解 对于此问题, 为求样本分布, 可以假设每次测量都是独立的且是在“相同条件下”进行的, 于是, 由中心极限定理可知, 这 n 次测量的结果是独立的且近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 故样本分布为

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.2.3)$$

□

§1.2.2 总体与总体分布

总体(population) 又称母体, 我们常把它理解为“研究问题所涉及的全体对象的集合”. 总体中的每个元素称为“个体”或“单元”, 从总体中按一定规则抽出一些个体, 称为**抽样**, 所抽得的个体称为**样本**.

对于例 1.2.1 和例 1.2.2 而言, 由于我们感兴趣的是估计这批产品的次品率, 故总体就是这批产品, 抽出的 n 个产品即为样本. 但对于例 1.2.3, 由于我们感兴趣的是估计一物体的质量, 故总体不是现实存在的对象的集合, 而只是我们头脑中的抽象: 我们把总体理解为“一切可能出现的称量结果的集合”. 当然, 不同人可能会给出不同的称量结果的集合, 即总体, 如区间 $[a, b]$, $[0, \infty)$ 等. 由于此时的总体已失去了其原来的特性, 故我们就仅从样本分布出发研究感兴趣的问题, 而不管总体如何.

在有些情况下, 从总体出发比从样本出发具有其更方便之处, 于是, 我们定义**总体分布**为当样本容量为 1 时的样本分布. 之所以定义总体分布, 是由于: 当

有 n 个独立同分布的样本时, 如以 F 记总体分布, 故样本 X_1, \dots, X_n 的分布为 $F(x_1) \cdots F(x_n)$, 其写法非常麻烦, 此时就不如仅说总体分布为 F .

当总体分布为 F , 而 X_1, \dots, X_n 为独立同分布的样本时, 我们常称 X_1, \dots, X_n 是从总体 F 中抽出的简单随机样本或独立同分布的 (independent identically distributed, 简记为 IID) 样本, 并记

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{IID}}{\sim} F(x). \quad (1.2.4)$$

若分布 F 有概率密度函数 $f(x)$, 则也常记为

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{IID}}{\sim} f(x). \quad (1.2.5)$$

有时, 我们也以一个抽象的记号 X 来表示所考察的指标, 它不是一个样本, 而只是一个记号. 我们常把 X 看成一个随机变量, 其分布就是总体分布 F . 于是, 样本 X_1, \dots, X_n 是 X 的观测值, 且以

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{IID}}{\sim} X \quad (1.2.6)$$

表示 X_1, \dots, X_n 为来自总体 X 的 IID 样本.

§1.2.3 样本分布族, 参数和参数空间

在统计上, 把出现在样本分布中的未知常数称为**参数**(parameter), 它可能是一维的, 也可能是多维的. 对于例 1.2.3, μ 就是一个参数, 至于 σ 是否为参数, 则取决于实际情况如何.

在某些具体问题中, 样本分布中的参数虽然未知, 但根据实际情况和该参数的意义, 我们可以给出参数所在的大概范围, 这个范围就称为**参数空间**. 对于例 1.2.3, 如 σ 未知, 则根据它的实际意义, 应有 $\mu > 0, \sigma > 0$, 故此时的参数空间可取为

$$\Theta = \{(\mu, \sigma) : \mu > 0, \sigma > 0\}.$$

如果根据以往的经验, 我们知道 $0 < a \leq \mu \leq b < \infty$, 则也可取参数空间为

$$\Theta = \{(\mu, \sigma) : 0 < a \leq \mu \leq b < \infty, \sigma > 0\}.$$

由于样本分布中包含的未知参数在参数空间中取值, 则可能的样本分布就不止一个, 而应是一个分布族, 于是, 我们称之为**样本分布族**. 样本分布族反映了我们对所研究问题以及抽样方式的认知. 所谓统计推断就是指利用样本推断样本分布族中的未知参数.

在某些实际问题中, 其中一些参数可能不是我们感兴趣的, 我们称这些参数为**讨厌参数**.