

什麼 不是數學？

李武炎◎主編

史上三大數學家之一
向阿基米得致敬

談韓信點兵問題

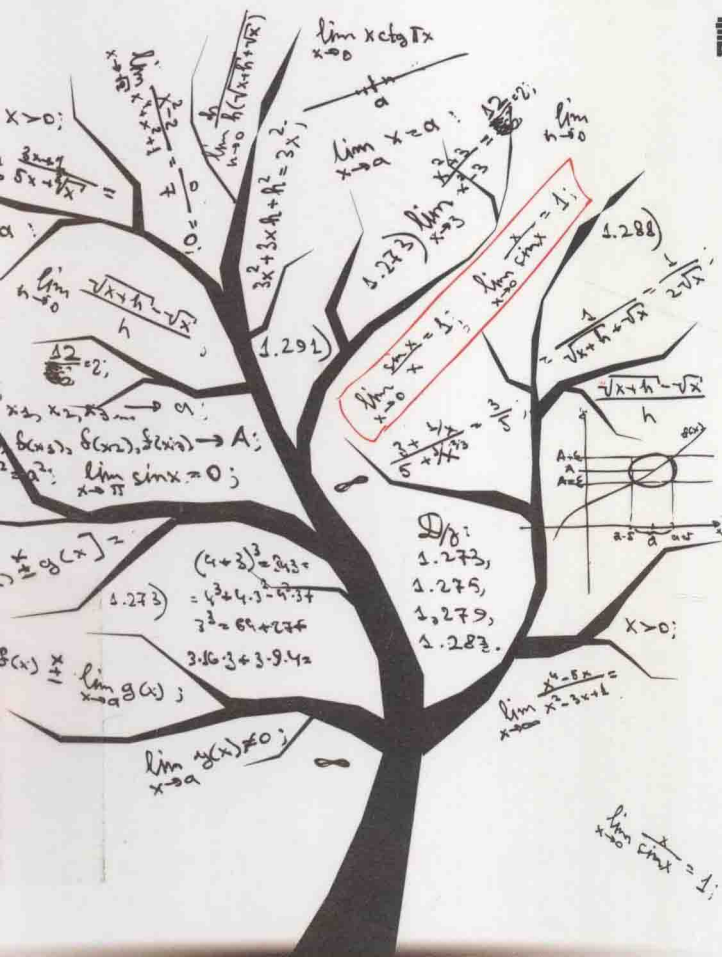
漫談魔方陣

漫談費布那齊數列

享受 π 的樂趣

破解費瑪最後定理

碎形的魅力



李武炎◎主編

什麼不是 數學？

臺灣商務印書館

什麼不是數學？／李武炎主編，--初版，--臺

北市：臺灣商務，2012.01

面：公分，--（商務科普館）

ISBN 978-957-05-2665-3(平裝)

1.數學 2.通俗作品

310

100022214

商務科普館

什麼不是數學？

作者◆李武炎主編

發行人◆施嘉明

總編輯◆方鵬程

主編◆葉韞英

責任編輯◆徐平

美術設計◆吳郁婷

出版發行：臺灣商務印書館股份有限公司

臺北市重慶南路一段三十七號

電話：(02)2371-3712

讀者服務專線：0800056196

郵撥：0000165-1

網路書店：www.cptw.com.tw

E-mail：ecptw@cptw.com.tw

局版北市業字第 993 號

初版一刷：2012 年 1 月

初版二刷：2012 年 7 月

定價：新台幣 300 元

ISBN 978-957-05-2665-3

版權所有・翻印必究

科學月刊叢書總序

◎—林基興

《科學月刊》社理事長

公益刊物《科學月刊》創辦於 1970 年 1 月，由海內外熱心促進我國科學發展的人士發起與支持，至今已經四十一年，總共即將出版五百期，總文章篇數則「不可勝數」；這些全是大家「智慧的結晶」。

《科學月刊》的讀者程度雖然設定在高一到大一，但大致上，愛好科技者均可從中領略不少知識；我們一直努力「白話說科學」，圖文並茂，希望達到普及科學的目標；相信讀者可從字裡行間領略到我們的努力。

早年，國內科技刊物稀少，《科學月刊》提供許多人「（科學）心靈的營養與慰藉」，鼓勵了不少人認識科學、以科學為志業。筆者這幾年邀稿時，三不五時遇到回音「我以前是貴刊讀者，受益良多，現在是我回饋的時候，當然樂意撰稿給貴刊」。唉呀，此際，筆者心中實在「暢快、叫好」！

《科學月刊》的文章通常經過細心審核與求證，圖表也力求搭配文章，另外又製作「小框框」解釋名詞。以前有雜誌標榜其文「歷久彌新」，我們不敢這麼說，但應該可說「提供正確科學知識、增進智性刺激思維」。其實，科學也只是人類文明之一，並非啥「特異功能」；科學求真、科學可否證（falsifiable）；科學家樂意認錯而努力改進——這是科學快速進步的主因。當然，科學要有自知之明，知所節制，畢竟科學不是萬能，而科學家不

可自以為高人一等，更不可誤用（abuse）知識。至於一些人將科學家描繪為「科學怪人」（Frankenstein）或將科學物品說成科學怪物，則顯示社會需要更多的知識溝通，不「醜化或美化」科學。科學是「中性」的知識，怎麼應用科學則足以導致善惡的結果。

科學是「垂直累積」的知識，亦即基礎很重要，一層一層地加增知識，逐漸地，很可能無法用「直覺、常識」理解。（二十世紀初，心理分析家弗洛伊德跟愛因斯坦抱怨，他的相對論在全世界只有十二人懂，但其心理分析則人人可插嘴。）因此，學習科學需要日積月累的功效，例如，需要先懂普通化學，才能懂有機化學，接著才懂生物化學等；這可能是漫長而「如倒吃甘蔗」的歷程，大家願意耐心地踏上科學之旅？

科學知識可能不像「八卦」那樣引人注目，但讀者當可體驗到「知識就是力量」，基礎的科學知識讓人瞭解周遭環境運作的原因，接著是怎麼應用器物，甚至改善環境。知識可讓人脫貧、脫困。學得正確科學知識，可避免迷信之害，也可看穿江湖術士的花招，更可增進民生福祉。

這也是我們推出本叢書（「商務科普館」）的主因：許多科學家貢獻其智慧的結晶，寫成「白話」科學，方便大家理解與欣賞，編輯則盡力讓文章賞心悅目。因此，這麼好的知識若沒多推廣多可惜！感謝臺灣商務印書館跟我們合作，推出這套叢書，讓社會大眾品賞這些智慧的寶庫。

《科學月刊》有時被人批評缺乏彩色，不夠「吸睛」（可憐的家長，為了孩子，使盡各種招數引誘孩子「向學」）。彩色印刷除了美觀，確實在一些說明上方便與清楚多多。我們實在抱歉，因為財力不足，無法增加彩色；還好不少讀者體諒我們，「將就」些。我們已經努力做到「正確」與「易懂」，在成本與環保方面算是「已盡心力」，就當我們「樸素與踏實」吧。

從五百期中選出傑作，編輯成冊，我們的編輯委員們費了不少心力，包

括微調與更新內容。他們均為「義工」，多年來默默奉獻於出點子、寫文章、審文章；感謝他們的熱心！

每一期刊物出版時，感覺「無中生有」，就像「生小孩」。現在本叢書要出版了，回顧所來徑，歷經多方「陣痛」與「催生」，終於生了這個「智慧的結晶」。

「商務科普館」 刊印科學月刊精選集序

◎—方鵬程

臺灣商務印書館總編輯

「科學月刊」是臺灣歷史最悠久的科普雜誌，四十年來對海內外的青少年提供了許多科學新知，導引許多青少年走向科學之路，為社會造就了許多有用的人才。「科學月刊」的貢獻，值得鼓掌。

在「科學月刊」慶祝成立四十週年之際，我們重新閱讀四十年來，「科學月刊」所發表的許多文章，仍然是值得青少年繼續閱讀的科學知識。雖然說，科學的發展日新月異，如果沒有過去學者們累積下來的知識與經驗，科學的發展不會那麼快速。何況經過「科學月刊」的主編們重新檢驗與排序，「科學月刊」編出的各類科學精選集，正好提供讀者們一個完整的知識體系。

臺灣商務印書館是臺灣歷史最悠久的出版社，自一九四七年成立以來，已經一甲子，對知識文化的傳承與提倡，一向是我們不能忘記的責任。近年來雖然也出版有教育意義的小說等大眾讀物，但是我們也沒有忘記大眾傳播的社會責任。

因此，當「科學月刊」決定挑選適當的文章編印精選集時，臺灣商務決定合作發行，參與這項有意義的活動，讓讀者們可以有系統的看到各類科學

發展的軌跡與成就，讓青少年有興趣走上科學之路。這就是臺灣商務刊印「商務科普館」的由來。

「商務科普館」代表臺灣商務印書館對校園讀者的重視，和對知識傳播與文化傳承的承諾。期望這套由「科學月刊」編選的叢書，能夠帶給您一個有意義的未來。

2011 年 7 月

主編序

◎—李武炎

「科學月刊」一本提倡科學教育的初衷，四十年來發表了許多膾炙人口的數學科普作品，對於充實教科書以外的數學知識，引發學生對數學學習的興趣，起了很大的作用，「科學月刊」一直都是最佳的課外讀物，這一次「科學月刊」與「臺灣商務印書館」合作，精選其中已經出版的文章再次集結印行，以饗喜愛數學的讀者。接下編輯的任務，不啻是一項艱難的任務，因為要在眾多的好文章中挑出十幾篇來打頭陣，實在是難以取捨，最後所定稿的十九篇文章當然跟我個人的品味有關，不過我也預先設立幾個原則：第一是文章的可讀性要很高，最好是有趣又能益智的題材，例如這一輯所選中的「韓信點兵」、「魔方陣」、「圓周率 π 」以及「費瑪最後定理」等都是為一般人比較熟知且深感興趣的，其中韓信點兵是古典的數論問題，是研究有關餘數的題目，其解法是中國人最早發現的，所以被稱為「中國剩餘定理」，「魔方陣」是中國民間流行的智力遊戲，也是古代中國數學家鑽研的題材，「圓周率 π 」則是為人們津津樂道的，是小學生數學學習第一個碰到的常數，它的故事充滿樂趣，而「費瑪最後定理」的證明成功堪稱二十世紀數學發展的里程碑；選材的第二原則是內容的多元化且具有啟發性，為了配合這個原則，我也挑了幾篇介紹數學家典故的文章，其中有史上三大數

學家之一的阿基米得，也有對代數學的發展具關鍵性的天才數學家伽羅瓦，他的典故與本專輯中的「代數的故事」有關，希望對喜好數學的學子有激勵啟發的作用。

我個人覺得這一次所編輯出版的文章都是精彩的，而且作者的書寫技巧也是一流的，這些作者有多位是長期替「科學月刊」撰稿的前輩，他們在「科學月刊」出版的作品很多，可惜限於篇幅，有一些也很棒的文章只好割愛，希望下一次「臺灣商務印書館」再出版續集時能加以收納。

這一版的文章中有很多是「科學月刊」前三十年所發表的，這些資料沒有 pdf 檔，只有網路版，所以圖檔的部分與部分的資料是用拷貝的方法呈現，可能不是很清晰，也有一部分的附錄採用重製的方式，如果有造成讀者閱讀上的不便，在此先向讀者致歉，請多多包涵。

「科學月刊」是本土的科普刊物，秉持啟迪民智培養科學態度的宗旨，四十載已建立一座藏量豐富的寶庫，藉由與「臺灣商務印書館」合作，我們將陸續推出精華版，請「科學月刊」的舊雨新知多多支持。

CONTENTS

目 錄

主編序

1 什麼不是數學？

楊維哲

12 阿林談微積分（上）

曹亮吉

31 阿林談微積分（中）

曹亮吉

46 阿林談微積分（下）

曹亮吉

56 漫談魔方陣

林克瀛

67 早夭的天才數學家伽羅瓦

薛昭雄

74 漫談費布那齊數列

黃敏晃

86 一個名為「拈」的遊戲

李宗元 黃敏晃

98 代數學的故事（上）

李白飛

117 代數學的故事（下）

李白飛

130 來自花刺子模的人

朱建正

140 數學界的諾貝爾獎

康明昌

156 數學與大自然的對話

陳錦輝

163 向阿基米得致敬

蔡聰明

179 享受 π 樂趣

洪萬生

186 談韓信點兵問題

蔡聰明

210 破解費瑪最後定理

林秋華

219 碎形的魅力

廖思善

229 數學中最美的等式

——數·生活與學習

單維彰

什麼不是數學？

◎—楊維哲

臺灣大學名譽教授，擔任大學聯考開場闡長多年。

呃，我的題目是「什麼不是數學？」當然你知道這樣的題目純粹是要噱頭，這個題目其實就是「什麼是數學？」這怎麼說呢？「什麼不是數學」＝「什麼是數學」，對我要演講來說，用這兩個題目其實是一樣的，在數學裡叫作等價。等價的情形很多，而且是數學上最重要的一個概念。大致說來是兩件事情：一個是說「這個東西是那個東西的充分必要條件」。這樣的事情在數學裡最多了，如高等微積分、高等代數裡所說的「這個性質其實就是那個性質，兩者完全一樣」、「這兩個命題（statement）等價」。等價有別種用法，譬如等價關係（equivalence relation）。例子有很多，你很清楚啦，星期一、星期二、……星期七、星期八……，對我們來說沒什麼要緊，因為星期七就是星期天，星期八就是星期一。這怎麼講呢？這就是所謂的modulo， $8 \equiv 1 \pmod{7}$ ——對7來說，8和1是等餘（餘數相等）——這也是等價。我用這個題目的理由是效果

完全一樣，而且可以耍噱頭。另外一個理由是：理論上說來，如果我們把「什麼是數學」說清楚，那麼「什麼不是數學」也就很清楚了，反過來說也一樣。這等於是數學裡的所謂「補集」（complement），有 $(A^C)^C = A$ ，所謂「負負得正」——補集合的補集合得到原集合。我打算在「什麼是數學」這欄講一些，在「什麼不是數學」那欄講一些，這樣一點一點講、積起來，情形就會變成「瞎子摸象」。「瞎子摸象」的道理本來是講人的偏執所見，有的人摸到的是這樣，有的人摸到的是那樣，就說象是怎麼樣的，其實這都不是嘛！不過，我們想清楚了，就知道瞎子摸象不應該這麼講，我們應該有比較正面、比較積極的說法。把我所摸到的各部分綜合起來，「象是什麼」也就更清楚了。我就打算這樣點點滴滴地講，這當然一點都不系統，不過沒有關係，你多少總會得到一點兒概念。

年老的數學家楊（L. Young）的數學史書上有這樣的故事：他是個英國佬，到屬地南非當教授。有一天接到一張請帖，他很高興，為了對得起胃，那天中午就不吃飯，照經驗這是對的。結果，到時候才發現，大家都是西裝筆挺，吃飽了飯來的，而且他竟是那天的演講者。而演講題目是什麼呢？——「什麼是數學？」他沒有演講的經驗又空著肚子，主人殷勤奉上的咖啡，使他越喝越苦澀。不得已，也只有開始講啦，小時候學過兩個蘋果加上三個蘋果等於五個

蘋果，這是不是數學呢？他自己就答 No，這當然不算數學；好了，那麼高深一點的，水流問題、雞兔同籠（即假設是「中國式」的來講）是不是數學呢？這當然也不是數學；再過來到初中時，解方程式有 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，是不是數學呢？這個也不是。好了，都不是數學——他不曉得如何度過那個晚上。

我認為，楊的「什麼是數學、什麼不是數學」這樣的說法，多少也說出了「什麼是數學」。

數學很注重所謂的本質（essence），我這裡講的 essence 不想作嚴格的定義——馬馬虎虎啦。……說到馬馬虎虎，這也很重要。數學很重要的一點就是「馬馬虎虎」，你要是懂得什麼是馬馬虎虎，就懂得什麼是無所謂；而懂得什麼是無所謂，就如同你懂得什麼是 essence 一樣。所以你要懂得什麼地方該馬虎，該不在乎；什麼地方才是要緊，你要在乎，這是數學最重要的一件事情。好了，那什麼不是數學？最少，什麼不是數學家呢？這兒我就記了一些東西，這樣兩邊（見表「什麼是數學」與「什麼不是數學」兩欄）慢慢就會越記越多。我在街上看過很大的豎招——「名數學家」，你知道那是算命的，這年頭比較少，現在都是寫「哲學家」，他們當然都不是真正的數學家，也不是真正的哲學家。這當然不是數學啦，是算

數 學	非數學
類 推 數學教育 數理哲學 抽象化、公理化、一般化	占 星 術 考試數學 新 數 學

命的。實際上我就真的考證過，譬如，《說唐》故事裡出現的欽天監李淳風，就是真的數學家，他曾對《九章算經》作注。古時候的欽天監就是數學家，那麼欽天監這官兒是幹什麼的呢？是替皇帝算命的。實際上，我們也知道像克卜勒（Kepler），是天文臺的頭子，可是他實際上也要替什麼王公貴族算命。事實上是有一段時期，這些天文學家、算命的都是數學家，數學家也都是算命的，實在是無可奈何的事。但無論如何，星象學（astrology）是一種「不是數學的數學」。

又有一個故事，是關於大數學家歐拉（Euler）。百科全書派的狄德洛（Diderot）是位典型的知識分子，絕對不信什麼牛鬼蛇神，什麼救主、得道。大家都辯不過他，於是想到找大數學家歐拉來對付他，歐拉就寫了一個公式 $e^{i\pi} = -1$ （譬如說），接著說「所以上帝存在」。故事裡說狄德洛沒辦法，只得「抱頭鼠竄」而去。我要講的是——這一點很重要——歐拉研究的是數學，但是他講的那句話

不是數學。

數學家真正用心去研究的是有一點數學。著名的色幻體（亦有所稱之魔術方塊），我的老師，我們系上（臺大數學系）的施拱星教授就曾以此為例演講過。他慢慢兒跟你講如何用變換群（transformation group）來看它，考慮它的軌道（orbit）。色幻體大家都玩過，多少有一些觀察，一些歸納，這當中也是有一些數學的，對不對？！譬如，轉來轉去，頂點仍然是頂點，中心仍是中心。當然，以我們的年紀很快就可以觀察出來了；可是事實上並不那麼簡單，這裡的數學主要是群論（或變換群論），而最初的一個問題是「對稱」。

在數學上會提到「對稱函數」，譬如 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 是 x 、 y 的對稱函數，因為 x 變 y ， y 變 x ，結果還是原式： $f(x,y)=f(y,x)$ 。你也知道什麼是交代式，就是 x 、 y 交換，使結果變個符號—— $f(x,y)=-f(y,x)$ 。另外還有奇函數、偶函數〔奇函數： $f(x)=-f(-x)$ ，偶函數： $f(x)=f(-x)$ 〕。

然後你注意到偶函數加偶函數得偶函數，奇函數加奇函數得奇函數；偶函數乘偶函數得偶函數，偶函數乘奇函數得奇函數，奇函數乘奇函數得偶函數，這有點像負負得正的情形，事實上是嘛！本來就是啊！在數學上叫做「同態」（homomorphic）就是「在某種意味上，它們的本質是一樣的」。