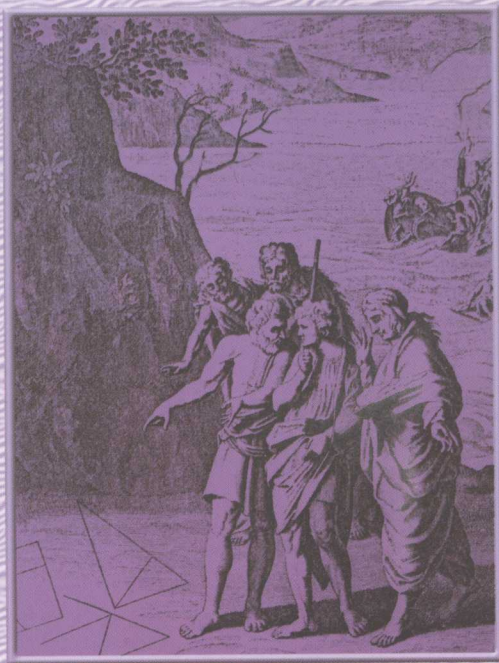


《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

拉克斯定理和阿廷定理

——从一道IMO试题的解法谈起

戴执中 佩捷 编著



◎ 拉克斯定理

◎ 希尔伯特第十七问题

◎ 阿廷-朗定理

◎ 与定量问题有关的二次型理论

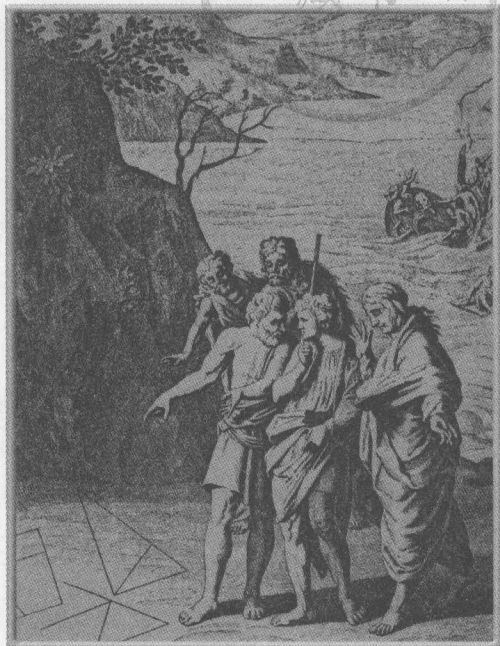
◎ 希尔伯特第十七问题的历史及概况简介



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

014012803

0177.1
08



《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

拉克斯定理和阿廷定理

——从一道IMO试题的解法谈起

戴执中 佩捷 编著

◎ 拉克斯定理

◎ 希尔伯特第十七问题

◎ 阿廷—朗定理

◎ 与定量问题有关的二次型理论

◎ 希尔伯特第十七问题的历史及概况简介



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1699702

0177.1
08

内容简介

本书是“数学中的小问题大定理”之一,通过一道 IMO 试题研究讨论拉克斯定理和阿廷定理,并着重介绍了希尔伯特第十七问题.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

拉克斯定理和阿廷定理:从一道 IMO 试题的解法谈起/戴执中,佩捷编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

(数学中的小问题大定理系列丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 4015 - 9

I. ①拉… II. ①戴…②佩… III. ①希尔伯特问题—研究 IV. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 029840 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 徐 丽

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 11.5 字数 124 千字

版 次 2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 4015 - 9

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61
新编中学数学解题方法全书(自主招生卷)	2013-08	88.00	261

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28
数学思维技术	2013-09	38.00	260

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
三角形中的角格点问题	2013-01	88.00	207
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出版 时间	定 价	编 号
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
平面几何天天练上卷·基础篇(直线型)	2013-01	58.00	208
平面几何天天练中卷·基础篇(涉及圆)	2013-01	28.00	234
平面几何天天练下卷·提高篇	2013-01	58.00	237
平面几何专题研究	2013-07	98.00	258
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名解析几何经典著作钩沉——平面解析几何卷	即将出版		
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
几何瑰宝——平面几何 500 名题暨 1000 条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
解三角形	2014-01	28.00	265
圆锥曲线习题集(上)	2013-06	68.00	255



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
俄罗斯平面几何问题集	2009—08	88.00	55
俄罗斯几何大师——沙雷金论数学及其他	2014—01	48.00	271
来自俄罗斯的 5000 道几何习题及解答	2011—03	58.00	89
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
俄罗斯初等数学万题选——三角卷	2012—11	38.00	222
俄罗斯初等数学万题选——代数卷	2013—08	68.00	225
俄罗斯初等数学万题选——几何卷	2014—01	68.00	226
463 个俄罗斯几何老问题	2012—01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012—03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012—07	28.00	188

超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009—01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论(第二版)	2013—08	58.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
解析数论基础	2012—08	28.00	216
数论入门	2011—03	38.00	99
数论开篇	2012—07	28.00	194
解析数论引论	2011—03	48.00	100
复变函数引论	2013—10	68.00	269
无穷分析引论(上)	2013—04	88.00	247
无穷分析引论(下)	2013—04	98.00	245
数学分析中的一个新方法及其应用	2013—01	38.00	231
数学分析例选:通过范例学技巧	2013—01	88.00	243
三角级数论(上册)(陈建功)	2013—01	38.00	232
三角级数论(下册)(陈建功)	2013—01	48.00	233



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
三角级数论(哈代)	2013-06	48.00	254
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
随机过程(Ⅰ)	2014-01	78.00	224
随机过程(Ⅱ)	2014-01	68.00	235
整数的性质	2012-11	38.00	192
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172
平面几何与数论中未解决的新老问题	2013-01	68.00	229

历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(上编)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(下编)	2012-04	38.00	170
历届美国数学邀请赛试题集	2014-01	48.00	270

整函数	2012-08	18.00	161
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
模糊分析与特殊泛函空间	2013-01	68.00	241
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012-07	48.00	190
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
不等式的秘密(第二卷)	2014-01	38.00	268
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克问题集	2014-01	38.00	267
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135
近代拓扑学研究	2013-04	38.00	239

新编 640 个世界著名数学智力趣题	2014-01	88.00	242
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
数学史概论(精装)	2013-03	158.00	272
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

王连笑教你怎样学数学——高考选择题解题策略与客观题实用训练	2014-01	48.00	262
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
我怎样解题	2013-01	48.00	227
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
全国中考数学压轴题审题要津与解法研究	2013-04	78.00	248
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167

格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	2014-01	18.00	228
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	2012-10	18.00	221
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2014-01	28.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	2013—04	38.00	238
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	2013—03	38.00	236
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	2013—06	18.00	256
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012—08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012—08	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012—08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	2012—10	28.00	218
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012—07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012—07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	2013—04	38.00	244
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012—08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理(第二版)——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013—08	38.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012—04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	即将出版	18.00	199
置换多项式及其应用	2012—10	18.00	220
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考题谈起	2012—10	38.00	219
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012—08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	2013—01	38.00	240
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2014-01	58.00	246
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道日本数学奥林匹克试题谈起	2013-04	48.00	249
李天岩-约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克隆耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特-莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	176
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
非光滑优化及其变分分析	2014-01	48.00	230
疏散的马尔科夫链	2014-01	58.00	266
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
古典数学难题与伽罗瓦理论	2012-11	58.00	223
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187
矩阵论(上)	2013-06	58.00	250
矩阵论(下)	2013-06	48.00	251
抽象代数:方法导引	2013-06	38.00	257

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
高等数学解题全攻略(上卷)	2013-06	58.00	252
高等数学解题全攻略(下卷)	2013-06	58.00	253
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@163.com

◎ 目 录

第1章 一道IMO试题与希尔伯特问题 //1

- 1.1 试题及证明 //1
- 1.2 $n=3,5$ 的确定 //3
- 1.3 试题的推广与加强 //7
- 1.4 拉克斯定理 //11
- 1.5 希尔伯特第十七问题 //14

第2章 希尔伯特第十七问题 //19

- 2.1 实域、序域和亚序域 //19
- 2.2 序扩张、实扩张 //27
- 2.3 实闭域 //32
- 2.4 实闭包的唯一性 //40
- 2.5 实赋值环与实位 //44
- 2.6 阿廷-朗理论 //53
- 2.7 希尔伯特第十七问题 //59
- 2.8 半代数零点定理、非负点定理以及正点定理 //67
- 2.9 有希尔伯特性质的域 //76
- 2.10 有弱希尔伯特性质的亚序域 //82
- 2.11 亚序域的局部稠密性与弱希尔伯特性质 //87
- 2.12 与定量问题有关的二次型理论 //97
- 2.13 $P(R(X_1, \dots, X_n))$ 的一个下界 //106

2.14	$P(R(X_1, \dots, X_n))$ 的一个上界	//110
附录一	Dubois 反例的一个证明	//121
附录二	希尔伯特第十七问题的历史及概况简介	//124
附录三	希尔伯特	//132
参考文献		//160
编辑手记		//165

目
录

一道 IMO 试题与希尔伯特问题

第 1 章

1.1 试题及证明

1971 年在捷克斯洛伐克举行的第 13 届 IMO 中,第一题是匈牙利提供的.

试题 设 $n (>2)$ 是自然数,证明下述论断仅对 $n=3$ 和 $n=5$ 时成立;对任意实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都有

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n) + \\ & (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n) + \cdots + \\ & (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

许多题解都给出了以下的解答.

解 当 $n=3$ 时,由于

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + \\ & (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ &= \frac{1}{2} \{ [(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + \\ & (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)] [(a_2 - a_1) \cdot \\ & (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)] + \\ & [(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) + (a_1 - a_3)(a_1 - a_2)] \} \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

拉克斯定理和阿廷定理

因而论断成立.

当 $n=5$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + \\ & (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + \\ & (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + \\ & (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ & (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

是关于 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的对称式, 故不妨假设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$, 于是

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= -(a_2 - a_1) \geq 0 \\ a_1 - a_3 &\geq a_2 - a_3 \geq 0 \\ a_1 - a_4 &\geq a_2 - a_4 \geq 0 \\ a_1 - a_5 &\geq a_2 - a_5 \geq 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + \\ & (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} & (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ & (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

又因为

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &\leq 0, a_3 - a_2 \leq 0 \\ a_3 - a_4 &\geq 0, a_3 - a_5 \geq 0 \end{aligned}$$

所以

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geq 0 \quad (1.1.4)$$

将(1.1.2)、(1.1.3)、(1.1.4)相加便可知(1.1.1)非负,即对 $n=5$ 论断成立.

当 $n=4$ 时,取 $a_1 = -1, a_2 = a_3 = a_4 = 0$,则有

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) + \\ & (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) + \\ & (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4) + \\ & (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) = -1 < 0 \end{aligned}$$

即对 $n=4$ 论断不成立.

当 $n>5$ 时,取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{i-1} = 0; a_i = 1; a_{i+1} = \cdots = a_n = 2$. 其中 $3 \leq i \leq n-2$,则有

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n) + \cdots + \\ & (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n) + \\ & (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) = (-1)^{n-i} \end{aligned}$$

于是,当 $n(>5)$ 为奇数时,取 $i = n-3$,有

$$(-1)^{n-i} = (-1)^3 = -1 < 0$$

当 $n(>5)$ 为偶数时,取 $i=3$,有

$$(-1)^{n-i} = (-1)^{n-3} = -1 < 0$$

因此,当 $n>5$ 时,论断不成立.

1.2 $n=3,5$ 的确定

如果我们将试题换一种提法,改为: