



全国各类成人高等学校招生考试教材

数学

(文史财经类)

高中起点升本、专科

总主编 杨干忠

原中国人民大学成人教育学院院长

中国成人教育协会副会长

北京高等院校成人教育研究会理事长

购小智囊新版英语成考教材

免费 www.xznbook.com 赠送

英语词汇速记手册一本

中国出版社

全国各类成人高等学校招生考试教材

QUANGUOGELEICHENGRENGAODENGXUEXIAO
ZHAOSHENGKAOSHIJIAOCAI

数 学

(文史财经类)

高中起点升本、专科

主编 叶富章
编者 张润华

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学·文史财经类/杨干忠总主编. —北京: 中国社会出版社, 2003. 11

全国各类成人高等学校招生考试教材·高中起点升本、专科

ISBN 7-80146-866-X

I. 数... II. 杨... III. 数学—成人教育: 高等教育—入学考试—自学参考资料
IV. G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 101170 号

丛 书 名: 全国各类成人高等学校招生考试教材

书 名: 高中起点升本、专科: 数学(文史财经类)

总 主 编: 杨干忠

责任编辑: 尤永弘 薛丽仙

出版发行: 中国社会出版社 邮政编码: 100032

通联方法: 北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦

电话: 66026804 电传: 66030951

欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息

经 销: 各地新华书店

印刷装订: 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 18.875

字 数: 412 千字

版 次: 2005 年 1 月第 2 版

印 次: 2005 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-80146-866-X/G·66

总 定 价: 148.00 元(全五册)

(凡中国社会版图书有缺漏页、残破等质量问题, 本社负责调换)

前 言

为了帮助参加全国各类成人高等学校招生考试(含高职)的广大考生全面、系统、快速、高效地复习各门应考课程,我们严格按照教育部颁布的《2005年全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》精心修订了本套“小智囊”系列丛书。

编者充分考虑成人高考特点,旨在提高考生灵活运用基础知识的能力,掌握解答各类习题的思路、方法、规律、技巧,重在提高应试效率。书中每章复习内容都设有五个栏目。其中“考试要点”:针对《大纲》所列知识要求进行简析。“复习内容”:以《大纲》为基础,对《大纲》中所要求的考试要点进行系统阐述、讲解。“例题解析”:以《大纲》为基础,精选有代表性的习题进行详尽分析,并归纳总结。“自我测试”:兼顾题型、重点、考点进行测试、练习。“自我测试参考答案”:为“自我测试”中所列题目提供准确答案。

本书具有以下特点:

一、体例科学,各科的内容选择既体现新大纲要求,又突出重点,分配合理,科学规范了适合成人学习特点的体系结构。

二、内容翔实,按新大纲要求注重吸收新知识、新成果,避免材料老化、陈旧,使考生适应成人高考的新变化,在应试中做到举一反三。

三、结构优化,本书严格依照新大纲的考点划分章节,保证了内容基本的区分度,力求做到有层次、有梯度、由浅入深、由低到高、相互补充、有机统一。

四、选题精当,内容选择和编写紧扣大纲,适合成人学习的特点,注重从知识立意向能力立意转变。注重学科基础、学科综合能力、学科实验能力的训练,以提高考生综合运用知识的应试能力。

本书由中国人民大学成人高等教育学院前院长杨干忠教授主编。编者来自各大重点院校和重点中学长期从事成人教育并具有丰富教学经验的教授、专家。因此,具有较高的权威性和首选性。我们相信,只要考生能够认真使用,真正掌握其宗旨,一定会达到满意的效果!

由于编写时间紧迫,疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评、指正。

编 者

2005年1月

目 录

第一部分 代数

第〇章 数、式、方程和方程组	(1)
考试要点.....	(1)
复习内容.....	(2)
例题解析.....	(7)
自我测试.....	(9)
自我测试参考答案	(11)
第一章 集合和简易逻辑	(14)
考试要点	(14)
复习内容	(15)
例题解析	(18)
自我测试	(22)
自我测试参考答案	(24)
第二章 函数	(27)
考试要点	(27)
复习内容	(28)
例题解析	(39)
自我测试	(56)
自我测试参考答案	(61)
第三章 不等式和不等式组	(66)
考试要点	(66)
复习内容	(66)
例题解析	(69)
自我测试	(73)
自我测试参考答案	(76)
第四章 数列	(81)
考试要点	(81)



复习内容	(82)
例题解析	(86)
自我测试	(97)
自我测试参考答案	(99)
第五章 导数	(106)
考试要点	(106)
复习内容	(106)
例题解析	(108)
自我测试	(111)
自我测试参考答案	(112)
 第二部分 三角 	
第六章 三角函数及其有关概念	(114)
考试要点	(114)
复习内容	(114)
例题解析	(119)
自我测试	(125)
自我测试参考答案	(126)
第七章 三角函数式的变换	(129)
考试要点	(129)
复习内容	(129)
例题解析	(133)
自我测试	(142)
自我测试参考答案	(145)
第八章 三角函数的图象和性质	(150)
考试要点	(150)
复习内容	(150)
例题解析	(154)
自我测试	(161)
自我测试参考答案	(163)
第九章 解三角形	(166)
考试要点	(166)
复习内容	(166)
例题解析	(168)

自我测试·····	(177)
自我测试参考答案·····	(178)

第三部分 平面解析几何

第十章 平面向量·····	(181)
考试要点·····	(181)
复习内容·····	(181)
例题解析·····	(185)
自我测试·····	(188)
自我测试参考答案·····	(189)
第十一章 直线·····	(191)
考试要点·····	(191)
复习内容·····	(191)
例题解析·····	(195)
自我测试·····	(201)
自我测试参考答案·····	(205)
第十二章 圆锥曲线·····	(210)
考试要点·····	(210)
复习内容·····	(210)
例题解析·····	(217)
自我测试·····	(231)
自我测试参考答案·····	(235)

第四部分 概率与统计初步

第十三章 排列、组合·····	(239)
考试要点·····	(239)
复习内容·····	(239)
例题解析·····	(243)
自我测试·····	(248)
自我测试参考答案·····	(250)
第十四章 概率与统计初步·····	(253)
考试要点·····	(253)
复习内容·····	(253)



例题解析.....	(257)
自我测试.....	(265)
自我测试参考答案.....	(267)
附录一: 2003 年全国各类成人高等学校招生统一考试数学(文史财经类)试卷及参考答案	(269)
附录二: 2004 年全国各类成人高等学校招生统一考试数学(文史财经类)试卷及参考答案	(277)
附录三: 全国各类成人高等学校招生数学(文史财经类)复习考试大纲	(285)

第一部分 代数

第〇章 数、式、方程和方程组

【考试要点】

一、理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算。

图象 1. 理解什么叫有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根。知道有理数、实数之间的关系；会进行实数大小的比较；会求一个数的相反数；会求一个数的绝对值；会求一个数的倒数。知道算术平方根一定是非负数。

2. 会熟练地进行实数的加、减、乘、除、乘方的运算。会进行非负实数的开方运算。

二、理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则。

1. 理解什么叫单项式、多项式、整式、分式。对给定的有理式会判断它是整式还是分式。

2. 能熟练地进行整式的四则运算，灵活运用幂的运算法则及乘法公式。

3. 掌握常用的多项式因式分解的方法。

4. 能熟练运用分式的基本性质，对分式进行四则运算。

5. 理解二次根式的定义，在运算时能灵活运用有关的性质。

6. 在对根式进行化简与运算时，会将一个二次根式化成最简根式；会对二次根式进行四则运算；会利用分母有理化进行除法运算。

三、掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题。

1. 会用方程的同解原理，熟练地解一元一次方程。

2. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的求根公式，并会用因式分解法和配方法求一元二次方程的解。会根据判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，判断方程实根的个数；会灵活运用根与系数的关系解有关问题。

四、会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组。

1. 掌握代入消元法和加减消元法，通过“消元”来求二元一次方程组、三元一次方程组的唯一解。



2. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解某几种特殊类型的由两个二元二次方程组成的方程组（用加减消元法可以消去某个未知数的，可以消去二次项的，以及至少有一个方程可以分解成两个一次方程的）。

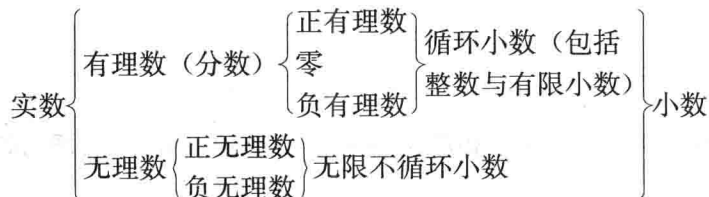
【复习内容】

一、有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念和有关计算

（一）实数集

1. 实数的概念

整数与分数统称有理数，有理数与无理数统称实数。如果把整数看成是分母为1的分数，那么有理数集实际上就是分数集，如果把整数、有限小数都看成循环节为0的循环小数，那么有理数集实际上就是循环小数的集合。这样，实数可以作如下分类：



2. 实数的某些性质

①若 $a \in \mathbf{R}$ ，那么 $a^2 \geq 0$ 。

②相反数：设 $a \in \mathbf{R}$ ，则 a 与 $-a$ 互为相反数。 a 与 b 互为相反数的充要条件是 $a+b=0$ 。

（二）平方根与算术平方根

1. 平方根：如果 $x^2=a$ ($a>0$)，那么 x 就叫做 a 的平方根。

正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，记作 $\pm\sqrt{a}$ 。

2. 算术平方根：正数 a 的正的平方根 $\sqrt{a}$ ，也叫做算术平方根（简称算术根），我们规定零的算术根是零，即 $\sqrt{0}=0$ 。

注意 ①若 $a \geq 0$ ，则 $\sqrt{a} \geq 0$ ，即 $\sqrt{a}$ 是非负数。

②对于任意实数 a ，有 $\sqrt{a^2} = |a|$ 。

③在实数范围内，负数没有平方根。

二、整式、分式、二次根式的概念及它们的一些性质和运算法则

（一）有理式

1. 有理式的分类



2. 整式的概念及运算法则

①概念

（I）整式：单项式和多项式统称为整式。

（II）同类项：在多项式的各项中，如果一些项所含字母相同，并且相同字母的指数也



分别相同, 这些项叫同类项.

(Ⅲ) 合并同类项: 把多项式中的同类项系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变, 叫做合并同类项.

②运算法则:

(I) 加减运算: 即合并同类项.

(II) 乘法运算: 包括单项式乘多项式、多项式乘多项式, 具体运算过程为: 先用一个多项式(或单项式)乘以另一个多项式的每项, 再把所得的积相加. 要熟练掌握以下五个乘法公式:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

3. 分式的概念及其运算:

①分式的概念

形如 $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) 的式子叫做分式.

②分式的运算及其法则

(I) 约分: $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \quad (m \neq 0)$

(II) 分式的加减法: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

(III) 分式的乘法、除法: $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}; \quad \frac{a}{b} \div \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(IV) 分式的乘方: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (n \text{ 为正整数})$

(V) 繁分式的化简:

繁分式实际上是分式除法的另一种形式, 所以可以利用除法法则或约分来化简,

例如: $\frac{\frac{b+d}{a} - \frac{c}{a}}{\frac{b-d}{a} - \frac{c}{a}} = (\frac{b+d}{a} - \frac{c}{a}) \div (\frac{b-d}{a} - \frac{c}{a})$

$$= \frac{bc+ad}{ac} \div \frac{bc-ad}{ac}$$

$$= \frac{bc+ad}{bc-ad}$$

或者 $\frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{d}{a}} = \frac{(\frac{b}{a} + \frac{d}{a}) \cdot ac}{(\frac{b}{a} - \frac{d}{a}) \cdot ac}$

$$= \frac{bc+ad}{bc-ad}$$



(二) 二次根式

1. 概念

①二次根式：式子 $\sqrt{a}$ 叫做二次根式，其中 a 叫被开方数，且 $a \geq 0$ ，根指数为2.

②最简二次根式：符合以下三个条件的根式叫最简二次根式.

(I) 根指数为2.

(II) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数2.

(III) 被开方数不含分母.

③同类二次根式：几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式就叫同类二次根式.

2. 性质：

$$① (\sqrt{a})^2 = a$$

$$② \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$③ \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b & (a \geq b) \\ b-a & (a < b) \end{cases}$$

$$④ \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$⑤ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

3. 二次根式的运算

①二次根式的加减法运算

二次根式的加减法运算，首先是把各根式化成最简二次根式，再合并同类二次根式.

②二次根式的乘法运算：

二次根式的乘法运算是：被开方数相乘，根指数不变，即 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

③二次根式的除法运算：

二次根式的除法运算是：被开方数相除，根指数不变，即： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

$$④ \text{分母有理化：} \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b} \quad (a \geq 0, b \geq 0 \text{ 且 } a \neq b)$$

注意 分母有理化通常要记住以下几种基本的互为有理化因式的形式： $\sqrt{a}$ 与 $-\sqrt{a}$ ； $a \pm \sqrt{b}$ 与 $a \mp \sqrt{b}$ ； $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$ 与 $a\sqrt{x} \mp b\sqrt{y}$ 等.

三、方程一元一次方程的定义及解法；一元二次方程根的判别式和根与系数的关系及有关的计算问题

(一) 方程的有关概念

1. 方程

含有未知数的等式叫做方程.

2. 方程的解

能使方程左右两边相等的未知数的值,叫做方程的解.

3. 解方程

求方程的解或说明方程无解的过程,叫做解方程.

4. 同解方程

如果两个方程的解完全相同,则这两个方程叫做同解方程.

5. 同解原理

①方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式,所得方程与原方程是同解方程;

②方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数,所得方程与原方程是同解方程.

(二) 一元一次方程

1. 一元一次方程

①定义:方程 $ax+b=0$ (其中 x 是未知数, a 、 b 是已知数,并且 $a \neq 0$) 叫做一元一次方程.这里 a 是未知数的系数, b 是常数项.

②解一元一次方程的步骤:

(I) 去分母:方程两边同乘以各分母的最小公倍数.

(II) 去括号:先去小括号,再去中括号,最后去大括号.

(III) 移项:把含有未知数的项都移到方程的一边,其它项移到方程的另一边(记住移项要变号).

(IV) 合并同类项,化为最简方程 $ax=b$ ($a \neq 0$) 的形式.

(V) 系数化为1:方程两边都除以未知数的系数,得出方程的解 $x=\frac{b}{a}$.

2. 一元二次方程

①定义:方程 $ax^2+bx+c=0$ (其中 x 是未知数, a 、 b 、 c 是已知数,并且 $a \neq 0$), 叫做一元二次方程.

②一元二次方程的解法:

(I) 直接开平方法;

(II) 配方法;

(III) 公式法;

(IV) 因式分解法.

③一元二次方程的求根公式

一元二次方程: $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的求根公式为 $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ($b^2-4ac \geq 0$)

(三) 一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式为: b^2-4ac , 一般用符号“ Δ ”表示, 即 $\Delta=b^2-4ac$.

1. 当 $\Delta > 0$ 时, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有两个不相等的实数根.

2. 当 $\Delta = 0$ 时, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有两个相等的实数根.



3. 当 $\Delta < 0$ 时, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 没有实数根.

(四) 一元二次方程根与系数的关系

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根为 x_1, x_2 , 则:

$$1. x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2. x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

四、方程组有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组; 由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组; 简单的由两个二元二次方程组成的方程组

(一) 方程组的有关概念

由几个方程联立起来组成的一组方程叫做方程组; 方程组里各个方程的公共解叫做方程组的解; 求方程组的全部解或判断方程组有没有解的过程叫做解方程组.

(二) 二元一次方程组

1. 二元一次方程: 含有两个未知数, 且未知数的次数是 1 的方程, 叫做二元一次方程, 它的一般形式为: $ax + by = c$ (其中 a, b 不为 0).

2. 二元一次方程组: 两个二元一次方程组合在一起, 就组成了一个二元一次方程组, 它的一般形式为:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

3. 二元一次方程组的解法:

①代入(消元)法.

②加减(消元)法.

(三) 三元一次方程组

1. 三元一次方程组的定义: 如果方程组中有三个未知数, 而且每个方程中的未知数的次数都是 1, 并且一共有三个方程, 这样的方程组叫做三元一次方程组. 它的一般形式为:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

2. 三元一次方程组的解法: “消元”, 即化三元一次方程组为二元一次方程组, 然后再求解.

(四) 二元二次方程组

1. 由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组, 其解法是采用代入消元的方法, 即由二元一次方程中表示出一个未知元代入二元二次方程中, 把它化为一个一元二次方程, 然后再求解.

2. 由两个二元二次方程组成的方程组, 其类型有:

①用加减消元法可消去某个未知数.

②用加减消元法可消去二次项, 从而把原方程组转化为由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组.

③至少有一个方程可分解成一次方程的.

注意: 解二元二次方程组的基本思想是消元和降次.

【例题解析】

例1 $-|-\frac{1}{2}|$ 的倒数是

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

解析 $-|-\frac{1}{2}| = -\frac{1}{2}$, 而 $-\frac{1}{2}$ 的倒数为 $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, 所以 $-|-\frac{1}{2}|$ 的倒数是 -2,

故应选 B.

说明 这道题目, 综合了倒数, 绝对值的有关知识, 并且所给的数中, 符号较多, 因此需要把所给出数先化简后, 再求其倒数, 才不易出现符号上的错误.

例2 已知实数 a, b 在数轴上表示的点如图 0-1 所示, 化简 $|a+b| - \sqrt{(a-b+1)^2}$ 的结果是

- A. $2b-1$ B. $2a+1$ C. $-2a-1$ D. $-2b-1$

解析 由图可知 $-1 < a < 0, b > 1$ 得 $a+b > 0$, 又 $a < 0, -b < -1$, 得 $a-b+1 < 0$

$$\begin{aligned} \therefore |a+b| - \sqrt{(a-b+1)^2} \\ &= a+b - |a-b+1| \\ &= a+b - (b-a-1) \\ &= 2a+1 \end{aligned}$$

故应选 B.

说明 这是一道数形结合的题目, 解题的关键在于观察图形, 要能从数轴上准确地找出所给点表示的实数的取值范围以及各数之间的大小关系, 才能正确地去掉绝对值符号和根号从而得到正确的答案, 本题还可以运用特殊值法, 取 $a = -\frac{1}{4}, b = 1\frac{1}{4}$.

例3 下列计算正确的是

- A. $(x+y)(x^2+xy+y^2) = x^3+y^3$ B. $(x+y)(x^2-2xy+y^2) = x^3+y^3$
C. $(2x+y)(4x^2-4xy+y^2) = 8x^3+y^3$ D. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2) = 8a^3-b^3$

解析 应用立方和与立方差公式进行计算, 要特别注意三项式因式中间项的系数与符号, A 中三项式因式中间项为负, 才能用立方和公式; B、C 中三项式因式的中间项系数分别应为 $-xy, -2xy$, 所以应选 D.

例4 两根是 $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$ 的一元二次方程是_____.

解析 由根与系数的关系可知: 两根为 α, β 的一元二次方程为:

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$, 由题得知:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\beta=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$\therefore$ 满足条件的一元二次方程为:



$$x^2 - x - \frac{5}{4} = 0 \text{ 或 } 4x^2 - 4x - 5 = 0$$

故本题答案为: $x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$ 或 $4x^2 - 4x - 5 = 0$.

例 5 若方程 $5x^2 + kx - 6 = 0$ 的一个根是 2, 则它的另一个根是 _____, k 的值是 _____.

解析 设方程 $5x^2 + kx - 6 = 0$ 的另一个根为 x_1 , 那么: $2 \cdot x_1 = -\frac{6}{5}$, 即: $x_1 = -\frac{3}{5}$,

$$\text{又 } (-\frac{3}{5} + 2) = -\frac{k}{5} \quad \text{解得 } k = -7.$$

例 6 计算: $(\sqrt{18} - 2\sqrt{12}) - (2\sqrt{3} - 2) \times (3\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \sqrt{6} \div (\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$

解 原式 $= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) + \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$$= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 18\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 6\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$= -13\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 6 \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= -13\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$$

$$= -19\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$$

例 7 先化简, 再求值

$$x + 2y + \frac{4y^2}{x-2y} + \frac{4x^2y}{4y^2-x^2} \quad \text{其中: } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$$

解 原式 $= \frac{x^2 - 4y^2 + 4y^2}{x-2y} - \frac{4x^2y}{-4y^2+x^2}$

$$= \frac{x^2}{x-2y} - \frac{4x^2y}{(x+2y)(x-2y)}$$

$$= \frac{x^2}{x-2y} (1 - \frac{4y}{x+2y})$$

$$= \frac{x^2}{x-2y} \cdot \frac{x-2y}{x+2y}$$

$$= \frac{x^2}{x+2y}$$

当 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ 时

$$\text{原式} = \frac{(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

例8 解方程组

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 & \text{①} \\ 3x + 2y - 1 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

解法 由①得 $y = 2x - 3$ ③

把③代入②得: $3x + 2(2x - 3) - 1 = 0$

$$3x + 4x - 6 - 1 = 0$$

即: $x = 1$

把 $x = 1$ 代入③得 $y = 2 \times 1 - 3 = -1$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

例9 方程 $2x^2 - kx + x + 8 = 0$ 有两个相等的实根, 求 k 的值和这个根.

解 由于一元二次方程有等根时必须且只须判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\text{由 } \Delta = (1-k)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$$

$$\text{即: } k^2 - 2k - 63 = 0$$

$$(k-9)(k+7) = 0$$

$$\therefore k = 9 \text{ 或 } k = -7$$

当 $k = 9$ 时, 方程 $2x^2 - 8x + 8 = 0$ 的等根为 $x = 2$.

当 $k = -7$ 时, 方程 $2x^2 + 8x + 8 = 0$ 的等根为 $x = -2$.

例10 方程 $x(2kx+1) = -8k(x+1)$ 有两个不相等的实数根时, 求 k 的取值范围.

解 将原方程整理: 得 $2kx^2 + (8k+1)x + 8k = 0$

当 $k \neq 0$ 时, 它是一个一元二次方程, 必须且只须 $\Delta = (8k+1)^2 - 4 \times 2k \times 8k > 0$ 时, 有两个不相等的实数根.

$$\text{即: } 64k^2 + 16k + 1 - 64k^2 > 0$$

$$\text{得: } k > -\frac{1}{16}$$

当 $k = 0$ 时, 原方程变为 $x = 0$, 不符合题意, 所以使方程有不相等的两实数根的条件是:

$$-\frac{1}{16} < k < 0 \text{ 或 } k > 0.$$

说明 本题对 $k \neq 0$ 和 $k = 0$ 分别进行讨论是必要的, 若不限定 $k \neq 0$, 则方程不是一元二次方程, 判别式将无从谈起; 若不讨论 $k = 0$, 可能使 k 的取值范围不完备.

【自我测试】

一、选择题

- 下列说法中, 正确的是 ()
 - 相反数等于它本身的只有实数零
 - 倒数等于它本身的只有 1
 - 绝对值等于它本身的只有实数零
 - 算术平方根等于它本身的数只有 1