YUNCHOUXUE JIANMING JIAOCHENG

运筹学
简明教程

杨晓光　主编
刘　巍　主审

大连海事大学出版社

运筹学简明教程

杨晓光　主编

刘　巍　主审

大连海事大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学简明教程 / 杨晓光主编. —大连：大连海事大学出版社，2012. 9
ISBN 978-7-5632-2787-7

I. ①运… II. ①杨… III. ①运筹学—高等学校—教材 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 234286 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌海路 1 号 邮编：116026 电话：0411-84728394 传真：0411-84727996

http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com

大连力佳印务有限公司印装 大连海事大学出版社发行

2012 年 9 月第 1 版 2012 年 9 月第 1 次印刷

幅面尺寸：185 mm×260 mm 印数：1～400 册

字数：285 千 印张：11

责任编辑：苏炳魁 宋彩霞 版式设计：荆 然

封面设计：王 艳 责任校对：孙雅获

ISBN 978-7-5632-2787-7 定价：25.00 元

编者的话

运筹学是一门以人机系统的组织和管理为对象、运用应用数学以及计算机等工具来研究各类有限资源的合理规划使用并提供优化决策的科学。

本书从未来应用数学、统计学、经管类人才应具备的运筹学知识和能力出发，系统地介绍了运筹学中的线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、图与网络分析、动态规划和决策论的基础理论及方法。内容上力求阐明概念和方法的经济和物理含义，并结合相应的例子演练各类模型的建立及其在经济管理中的应用，每章后均有练习题供复习和消化课本知识使用。

本书自2007年7月开始以自编讲义“运筹学基础”的形式作为数学类本科生和非数学类本科生任选运筹学课程的教材使用。这次作为校内资助教材，命名为《运筹学简明教程》，在“运筹学基础”的基础上做了较大篇幅的修改，除了尽力保持内容全面、深入浅出、突出建模技巧和应用以及叙述简练等特点外，还着重吸收了近年来国内外出版的运筹学图书中的长处和精华。由于篇幅所限，还有相当多的应用案例和习题不能选入本书中，很是遗憾。

本书内容适用于应用数学、统计学、经管类和某些工科类等专业本科生学习。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2012年7月

目　录

1 绪 论

1.1 运筹学的起源

术语"运筹学"是在第二次世界大战期间创立的，当时英国军界领导者要求科学家和工程师分析几个军事问题，如雷达的布置以及护航舰队、轰炸、反潜和布雷行动的管理。

运筹学一词的英文原名，美国英语称为 Operations Research，英国英语称为 Operational Research（简记为 O.R.），可直译为"运用研究"或"作业研究"。1957 年我国从"夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外"这句古语中摘取"运筹"二字，将 O.R.正式译作运筹学，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。由于运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并且比较多地运用各种数学工具，从这点出发，曾有人将运筹学称为"管理数学"。

1.1.1 运筹学的军事起源

军事是运筹学的第一个起源。运筹学思想方法的起源可追溯到古代。此外，"田忌赛马"、"围魏救赵"、"丁渭修宫"等历史记载，也充分说明了我国很早就有了朴素的运筹学思想，而且在生产实践中实际运用了运筹学方法。

1935 年，英国科学家沃森·瓦特（R.Watson Wart）发明了雷达。当时任英国海军大臣的丘吉尔敏锐地认识到雷达的重要意义，下令在英国东海岸的鲍得西（Bawdsey）建立了一个秘密的雷达站。此时的德国已经拥有一支强大的空军。在未来的对德作战中如何预警并做好拦截，就成为一个亟需解决的难题。当时的雷达技术可以探测到 160 公里之外的飞机，但在一次防空演习中发现，由这些雷达送来的信息常常是互相矛盾的，需要加以协调和关联，才能改进作战效能。1938 年 7 月，鲍得西雷达站的负责人罗伊（A.P.Rowe）提出应立即进行对整个防空作战系统运行的研究。1939 年，由英国曼彻斯特大学物理学家、英国战斗机司令部科学顾问、战后获得诺贝尔奖的布莱凯特（P. M. S. Blackett，1897-1974）为首，组建了一个代号为"Blackett 马戏团"的研究小组，专门就改进防空系统进行研究。这个小组的成员包括三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官、一名陆军军官和一名测量人员。这个小组的特点是跨学科性，他们运用自然科学和工程技术的方法，对雷达信息传递、作战指挥、战斗机与防空火力的协调做了系统的研究并获得了成功，大大提高了英国本土的防空能力，在后来对抗德国纳粹的空袭战斗中发挥了极大作用。此外，对反潜、港口利用、商船护航、水雷布设等问题的研究，也取得了良好的应用效果。"Blackett 马戏团"是世界上第一个运筹学小组。在学术思想上，他们的研究蕴含着整体性的概念和系统分析的思想。在他们就此项研究所写的报告中使用了"Operational Research"一词，意指"作战研究"，也就是我们所说的运筹学。

第二次世界大战中，运筹学被广泛应用于军事系统工程中。除英国外，美国和加拿大等国也相继成立了军事运筹研究小组，解决战争中提出的运筹学课题，其中最著名的工作之一是改进深水炸弹的起爆深度。

当时德国的潜水艇严重威胁盟军的运输船，于是研究如何用飞机投掷深水炸弹，有效摧毁敌军潜艇就成为当务之急。1942 年，美国大西洋舰队主持反潜战的官员贝克（W. D. Baker）请求成立反潜战运筹组，麻省理工学院的物理学家莫尔斯（P. W. Morse）被请来担任计划与监督。莫尔斯最出色的工作之一是协助英国打破了德国对英吉利海峡的海上封锁。莫尔斯领导的小组经过多方实地调查，提出两条重要建议：

（1）将反潜攻击由反潜舰艇投掷水雷改为由飞机投掷深水炸弹；仅当潜艇浮出水面或刚下潜时，方投掷深水炸弹；深水炸弹的定深（指起爆深度）由 100 ~ 200 英尺修正为 20 ~ 50 英尺。

（2）改进运送物资的船队及护航舰艇编队的方式，由小规模多批次，改进为大规模少批次，可使损失减少。

军方采用了上述建议，重创德国潜艇舰队，最终成功地打破了德国的海上封锁。

此外，在对潜艇的有效搜索、合理安排飞机维修和提高飞机的利用率等许多问题的解决上，运筹学发挥了重要作用。

这些运筹学成果对盟军大西洋海战的胜利起了十分重要的作用，对许多战斗的胜利也起了积极的作用。战争结束时，在英美及加拿大军队中工作的运筹学工作者已超过了 700 人。正是由于战争需要的促进，以及大批著名科学家的参与，运筹学得到迅速发展。

第二次世界大战期间的军事运筹问题及其解决方法，具有如下的特点：

（1）数据是实践中的真实数据。

（2）解决问题的人员组成是多学科的。

（3）处理问题的方法渗透着物理学的思想。

1.1.2 运筹学的管理起源

运筹学的第二个起源是管理。第一次世界大战前就已经发展成熟的古典管理学派，对运筹学的产生和发展影响很大。1911 年，泰勒（F.W.Taylor，美国人，科学管理之父）出版了著名的《科学管理原理》一书。在这本书中，泰勒的管理思想和理论，概括起来主要有以下三个观点：

（1）科学管理的根本目的是谋求最高工作效率。泰勒认为：管理的主要目的应该是使雇主实现最大的富裕，同时也使每个雇员实现最大限度的富裕。提高劳动生产率是泰勒创立科学管理理论的出发点和基础。

（2）达到最高工作效率的重要手段是科学的管理方法。泰勒认为管理是一门科学，为了提高工作效率必须制定明确的规定、条例和标准，必须用科学化和制度化的管理代替旧的经验管理。

（3）实施科学管理要求精神上的彻底变革。泰勒认为科学管理是一场重大的精神变革，他要求工人要树立对工作、对同事和对雇主负责的观念，要求管理人员改变对同事和对工人的态度，增强责任观念。通过这种变革，可以使管理者和工人双方都把注意力从盈利的分派上转移到增加盈利数量上来。

甘特曾是泰勒的亲密合作者，科学管理的先驱之一。1902 年至 1919 年期间，他以咨询师的身份独立开业进行工作，并在哈佛大学、耶鲁大学和哥伦比亚大学等著名高校任教。

甘特的主要贡献有以下几点：

（1）提出了一种“工资任务加奖金”的工资制度。首先规定一个基本的日工资，即使工人由于技术的原因没有完成工作任务，也能得到基本工资；然后对于超过任务的部分以奖金的形式发放。

（2）发明了“甘特图”（也称黑道图）。1903 年，甘特设计了一种“生产计划进度图”，该图在对某项具体工作进行任务分解的基础上，用线条表示进度的计划图表，简单明了地反映各项任务的计划以及任务完成的情况，以有效地监督和管理作业的整个过程。甘特提出的黑道图至今还在实践中使用，并发展为运筹学的统筹方法。

（3）强调管理民主和重视人的领导方式。甘特提出了企业管理中机会均等的建议，强调在科学管理的基础上雇主与雇员利益的一致性，号召人们重视管理中人的因素。他认为，金钱刺激只能影响到人们许多动机中的一个动机，而在人们的行为中，能够激发动机的因素很多，其中的许多动机是金钱刺激所解决不了的。

美国的亨利·福特（Henry Ford，1863-1947）在泰勒的单工序动作研究的基础上，为了提高企业的竞争能力，对如何提高整个生产过程的生产效率进行了研究。他充分考虑了大量生产的优点，规定了各个工序的标准时间，使整个生产过程在时间上协调起来，创造了第一条流水生产线——汽车流水线，从而提高整个企业的生产效率，使成本明显降低。福特为了推动企业向大量生产发展，进行了多方面的标准化工作，包括：产品系列化、零件规范化、工厂专业化和作业专门化等。

人们把以泰勒为代表的这些学者所形成的学派称为科学管理学派。其管理实践和管理科学的许多问题，至今仍然是运筹学家关注的课题。

1.1.3 运筹学的经济起源

运筹学的第三个起源是经济。经济学理论对运筹学的影响是和数理经济学学派紧密联系的。数理经济学对运筹学，特别是对线性规划的影响可以从魁奈（Qusnay）1758 年发表的《经济表》算起，当时最著名的经济学家沃尔拉斯（Walras）研究了经济平衡问题，后来的经济学家对其数学形式继续研究并得到深入发展。1928 年，冯·诺伊曼（Von Neumann，John，1903-1957）以研究二人零和对策的一系列论文为“对策论”奠定了基础，1932 年，又提出了广义经济平衡模型。1939 年，苏联的康托洛维奇发表了《生产组织和计划中的数学方法》。这些工作都可以看做是运筹学的先驱工作。

运筹学起源于军事、管理和经济，离开了这三个领域，运筹学就会成为无源之水，就会走向歧途，这是很多人用实践证明的事实。

1.2 运筹学的发展

二战后，运筹学的发展大致可分为三个阶段：

（1）从 1945 年到 20 世纪 50 年代初期，被认为运筹学创建时期。

（2）20 世纪 50 年代初期到 20 世纪 50 年代末期，被认为是运筹学的成长时期。

（3）自 20 世纪 60 年代以来，被认为是运筹学迅速发展和开始普及的时期。

国际上著名的运筹学刊物有：*Management Science*，*Operations Research*，*Journal of Operational Research Society*，*European Journal of Operations Research* 等，国内运筹学的刊物或较多刊登运筹

学理论和应用的刊物主要有：《运筹学学报》、《运筹与管理》、《系统工程学报》、《系统工程理论与实践》、《系统工程理论方法应用》、《数量经济技术研究》、《预测》、《系统工程》、《系统科学与数学》等等。

我国运筹学的研究开始于20世纪50年代，推广粮食调运中的图上作业法。同时，也引进苏、美和欧洲线性规划的理论与方法、对策论、排队论方法以及数理经济等方面较系统的基本理论，已开始在社会进步、生产发展、经济繁荣和科学与技术的创新等方面起积极作用。我国对运筹学的研究和应用也作出了自己的贡献，主要有优选法、运输问题图上作业法和中国邮递员问题等。除中国运筹学学会外，中国系统工程学学会以及与国民经济各部门有关的其他学会，也都把运筹学应用作为重要的研究领域。我国各高等院校，特别是在各经济管理类专业中已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程列入教学计划之中。我国的第一个运筹学研究小组是在钱学森先生和许国志先生的推动下于1956年在中国科学院力学研究所成立的。其应用是在1957年始于建筑业和纺织业，从1958年开始在交通运输、工业、农业、水利建设和邮电等方面皆有应用。尤其是在运输方面，在物资调运、装卸到调度等各环节均有所应用。1958年，建立了专门的运筹学研究室，但由于在应用单纯形法解决粮食合理运输问题时遇到了困难，我国运筹学工作者于是创立了运输问题的“图上作业法”；而管梅谷教授则提出了“中国邮递员问题”模型的解法。由此可知，运筹学从一开始就被认为是与工程有着密切联系的学科。1959年，第二个运筹学部门在中国科学院数学研究所成立，这是大跃进中数学家们投身于国家建设的一个产物。力学研究所小组与数学研究所小组于1960年合并为数学研究所的一个研究室，当时，其主要研究方向为排队论、非线性规划和图论。自20世纪60年代以来，被认为是运筹学迅速发展和开始普及的时期，此阶段的特点是运筹学进一步细分为各个分支，专业学术团体的迅速增多，创办更多期刊，运筹学书籍大量出版以及更多学校将运筹学课程纳入教学计划之中。第三代电子计算机的出现，促使运筹学得以用来研究一些大型复杂系统，例如城市交通、环境污染和国民经济计划等。运筹学被广泛应用于政府机构、国有部门和企业界。到1963年，应用运筹学的应用行业又扩大到制造业、工矿业、运输业及部分第三产业等。很多大型企业都设有自己的专业运筹学研究队伍和小组。中国运筹学学会还负责组织及管理亚太地区运筹学研究中心的日常学术活动。近年来，中国运筹学工作者继续坚持把运筹学研究与经济建设等重大问题紧密结合起来，取得了一系列突破。

1.3 运筹学的定义和特点

运筹学一词起源于20世纪30年代。据《大英百科全书》释义，“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”，“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。我国《辞海》中有关运筹学条目的释义为：“运筹学主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达有关运用、筹划与管理方面的问题。它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，做出综合性的合理安排，以达到较经济较有效地使用人力物力的目的。”

运筹学采用定量的方法为管理决策提供科学依据，其涉及的主要领域是管理问题，采用的研究方法是应用数学语言来描述实际系统，再建立相应的数学模型，然后用数学方法进行定量研究和分析，据此求得模型的最优解，以供管理人员和决策人员作参考。

运筹学研究的特点可以简单地归纳如下：

（1）科学性和综合性。运筹学研究是在科学方法论的指导下通过一系列规范化步骤进行的，它是广泛利用多种学科的科学技术知识进行的研究。运筹学研究是一种综合性的研究，它涉及问题的方方面面，应用多种学科的知识，体现出其跨学科性。

（2）实践性。运筹学是一门实践的科学。运筹学以实际问题为分析对象，通过鉴别问题的性质、系统的目标以及系统内主要变量之间的关系，利用数学方法达到对系统进行优化的目的。更为重要的是分析获得的结果要能被实践检验，并被用来指导实际系统的运行。

（3）系统性。运筹学研究问题是从系统的观点出发，研究全局性的问题，研究综合优化的规律，是系统工程的基础。系统的整体优化是运筹学系统性的一个重要标志。它也可看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法。

运筹学研究的基本特点是：系统的整体优化、多学科的配合以及模型方法的应用。

系统的整体优化。所谓系统可以理解为是由相互关联、相互制约和相互作用的一些部分组成的具有某种功能的有机整体。运筹学不是对每一个决策行为孤立地进行评价，而是把它同系统内所有其他重要的相互作用的部分结合起来作出评价，把相互影响的各方面作为一个统一体，从总体利益的观点出发，寻找出一个优化协调的方案。

多学科的配合。一个企业的有效管理涉及很多方面，运筹学研究中采纳来自不同领域、具有不同经验和技能的专家的意见。这种多学科的协调配合在研究的初期，在分析和确定问题的主要方面，在选定和探索解决问题的途径时显得特别重要。

模型方法的应用。运筹学研究的系统方法是建立这个问题的数学和模拟的模型。如果说辅助决策是运筹学应用的核心，那么建立模型则是运筹学方法的精髓。

2 线性规划及单纯形法

2.1 一般线性规划问题的数学模型

2.1.1 问题的提出

生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是所谓规划问题。

【例 2-1】用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个容器，应如何裁剪，使做成的容器的容积为最大，如图 2-1 所示。

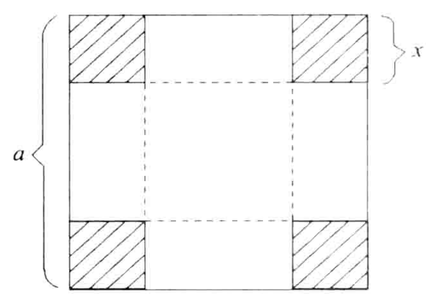

图 2-1

【例 2-2】常山机器厂生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。这两种产品都要分别在 A、B、C 三种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品Ⅰ需占用各设备的时间分别为 2 h，4 h，0 h，生产每件产品Ⅱ需占用各设备的时间分别为 2 h，0 h，5 h。已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力分别为 12 h，16 h，15 h，又知每生产一件产品Ⅰ企业能获得 2 元利润，每生产一件产品Ⅱ企业能获得 3 元利润，问该企业应安排生产两种产品各多少件，使总的利润收入为最大。

对例 2-1 中提出的问题，一般只要在铁皮四个角上剪去四个边长各为 x 的正方形，折叠起来就做成一个容器。容积为 $V=(a-2x)^2\cdot x$。要使容积最大，就是要求 x 的值，使 V 达到最大。

例 2-2 中提出的问题要更复杂一些。假定用 x_1 和 x_2 分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品在计划期内的产量。因设备 A 在计划期的可用时间为 12 h，不允许超过，于是有 $2x_1+2x_2\le 12$。对设备 B、C 也可列出类似的不等式：$4x_1\le 16;5x_2\le 15$。企业的目标是在各种设备能力允许的条件下，使总的利润收入 $z=2x_1+3x_2$ 为最大。因此例 2-2 可归结为：

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+2x_2\le 12\\4x_1\qquad\quad\le 16\\\qquad\quad 5x_2\le 15\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

使 $z=2x_1+3x_2\to\max$ 。式中，约束于（subject to），或简写为s.t.。

比较上述两个例子，从数学角度讲，都是极值的问题，但例 2-1 中除变量取值要求非负外而无其他更多限制，这类问题可以用微积分中已学过的求极值的古典方法解决；而例 2-2 中变量的取值要受一系列条件的限制，求解这类带附加限制条件的极值问题是运筹学中规划论部分研究的内容。

2.1.2 线性规划问题的数学模型

从上述例子看到规划问题的数学模型包含三个组成要素：（1）决策变量，指决策者为实现规划目标采取的方案、措施，是问题中要确定的未知量。（2）目标函数，指问题要达到的目的要求，表示为决策变量的函数。（3）约束条件，指决策变量取值时受到的各种可用资源的限制，表示为含决策变量的等式或不等式。如果在规划问题的数学模型中，决策变量为可控的连续变量，目标函数和约束条件都是线性的，这类模型称为线性规划问题的数学模型。

一般线性规划问题的数学模型可表示为以下几种形式

$$\max(\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le(=,\ge)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x\le(=,\ge)b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n\le(=,\ge)b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0\end{cases}\tag{2-1}$$

以上模型的简写形式为

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i\,(i=1,\cdots,m)\\x_j\ge 0\,(j=1,\cdots,n)\end{cases}\tag{2-2}$$

用向量形式表达时，上述模型可写为

$$\max(\min)\ z=\boldsymbol{CX}\qquad[2\text{-}3(a)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j\le(=,\ge)\boldsymbol{B} & [2\text{-}3(b)]\\\mathrm{X}\ge 0 & [2\text{-}3(c)]\end{cases}\tag{2-3}$$

式中，$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$； $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}$

$$P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{mj}\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{bmatrix}$$

用矩阵形式来表示可写为

$$\max(\min)\ z=CX$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}AX\le(=,\ge)b\\X\ge0\end{cases}\tag{2-4}$$

式中，

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

A 称为约束方程组变量的系数矩阵，或简称约束变量的系数矩阵。

2.1.3 线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件在内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种形式。为了便于讨论，规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad [2\text{-}5(a)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i\,(i=1,\cdots,m) & [2\text{-}5(b)]\\ x_j\ge0(j=1,\cdots,n) & [2\text{-}5(c)]\end{cases}\tag{2-5}$$

标准形式的线性规划模型中，目标函数为求极大值（有些书上规定是求极小值），约束条件为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 的取值为非负。对不符合标准形式（或称非标准形式）的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

（1）目标函数为极小值，即为

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$，令 $z'=-z$，即化为

$$\max z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$$

（2）约束条件为不等式。当约束条件为"≤"时，如 $2x_1+2x_2\le12$，可令 $x_3=12-2x_1-2x_2$ 或 $2x_1+2x_2+x_3=12$，显然 $x_3\ge0$。当约束条件为"≥"时，如 $10x_1+12x_2\ge18$，可令 $x_4=10x_1+12x_2-18$ 或 $10x_1+12x_2-x_4=18, x_4\ge0$。$x_3$ 和 x_4 是新加上的变量，取值均为非负，加到原约束条件中去的目的是使不等式转化为等式，式中 x_3 称为松弛变量，x_4 一般称为剩余变量，

其实质与 x_3 相同，故也可统称为松弛变量。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超用的资源数，均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为零。

（3）取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年计划数与上一年的计划数之差，显然 x 的取值可能是正也可能是负，这时可令 $x = x' - x''$，其中 $x' \geq 0, x'' \geq 0$，将其带入线性规划模型即可。

（4）变量 $x_j \leq 0$。可令 $x_j' = -x_j$，显然 $x_j' \geq 0$。

【例 2-3】将下述线性规划模型化为标准形式：

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

【解】令 $z' = -z$，$x_3 = x_3' - x_3''(x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0)$，$x_1' = -x_1$，并按上述规则将问题转化为

$$\max\ z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 3x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.4　线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad [2\text{-}6(a)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, \cdots, m) & [2\text{-}6(b)] \\ x_j \geq 0 (j = 1, \cdots, n) & [2\text{-}6(c)] \end{cases} \qquad (2\text{-}6)$$

从约束条件式[2-6(b)]、[2-6(c)]的方程组中找出一个解，使目标函数[2-6(a)]达到最大值。

可行解　满足上述约束条件[2-6(b)]、[2-6(c)]的解 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解　使目标函数[2-6(a)]达到最大值的可行解称为最优解。

基　设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组[2-6(b)]的 $m \times n$ 阶系数矩阵（设 $n > m$），其秩为 m。$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每一个列向量 $B_j\,(j=1,\cdots,m)$ 称为基向量，与基向量 $\boldsymbol{B}_j$ 对应的变换 x_j 称为基变量，线性规划中除基变量以外的其他变量称为非基变量。

基解 在约束方程[2-6(b)]中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因为有 $|B|\neq 0$，根据克拉默法则，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的惟一解 $\boldsymbol{X}_B=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$。将这个解加上非基变量取0的值有 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基解。显然基解中变量取非零值的个数不大于方程数 m，故基解的总数不超过 C_n^m 个。

基可行解 满足变量非负约束条件[2-6(c)]的基解称为基可行解

可行解 对应于基可行解的基称为可行基

【例 2-4】在下述线性规划问题中，列出全部基、基解、基可行解，并指出其最优解。

$$\max z = 2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 = 12 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_j\geq 0(j=1,\cdots,5) \end{cases}$$

【解】写出约束方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4 & \boldsymbol{P}_5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 ≤ 3。所以只要找出 3 个列向量组成的矩阵满秩，这 3 个向量就是线性规划问题的一个基。令与基对应的变量为基变量，其余变量为非基变量，令非基变量等于零，求解方程组就可找出基解。表 2-1 列出了本例线性规划问题的全部基、基解，指出哪些是基可行解，表中用 * 标注的为最优解。

表 2-1

基	基解					是否为基可行解	目标函数值
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
P_1 P_2 P_3	4	3	−2	0	0	否	17
P_1 P_2 P_4	3	3	0	4	0	是	15 *
P_1 P_2 P_5	4	2	0	0	5	是	14
P_1 P_3 P_5	4	0	4	0	15	是	8
P_1 P_4 P_5	6	0	0	−8	15	否	12
P_2 P_3 P_4	0	3	6	16	0	是	9
P_2 P_4 P_5	0	6	0	16	−15	否	18
P_3 P_4 P_5	0	0	12	16	15	是	0

2.2 线性规划问题的几何意义

2.2.1 图解法

为了便于建立 n 维空间中线性规划问题的概念及理解求解一般线性规划问题的单纯形法的思路，先介绍图解法。这种方法的优点是直观性强、计算方便，但缺点是只适用于问题中有两个变量的情况。

图解法的步骤是：建立坐标系，将约束条件在图上表示；确立满足约束条件的解的范围；绘制出目标函数的图形；确定最优解。用本章例 2-2 来具体说明图解法的原理步骤。例 2-2 的数学模型如下：

$$
\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad [2\text{-}7(a)]
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & [2\text{-}7(b)] \\ 4x_1 \le 16 & [2\text{-}7(c)] \\ 5x_2 \le 15 & [2\text{-}7(d)] \\ x_1, x_2 \ge 0 & [2\text{-}7(e)] \end{cases} \qquad (2\text{-}7)
$$

（1）约束条件的图示。本例子只有两个变量 x_1 和 x_2。以 x_1 和 x_2 为坐标轴作直角坐标系，因 $x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$，所以只有在第一象限内的点才满足约束方程[2-7(e)]要求。

约束条件 $2x_1 + 2x_2 \le 12$ 是一个不等式，先取 $2x_1 + 2x_2 = 12$，这是一条直线，在坐标系中画出这条直线。这条直线把第一象限的平面分为两部分，凡落在该直线右上方平面内的点均满足 $2x_1 + 2x_2 > 12$，落在该直线左下方平面内的点均有 $2x_1 + 2x_2 < 12$。所以 $2x_1 + 2x_2 \le 12$ 表示落在直线 $2x_1 + 2x_2 = 12$ 上的和这条直线左下方半平面内的所有点。于是可用△ OAB 及其边界上的所有点表示对 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ 及 $2x_1 + 2x_2 \le 12$ 这三个约束条件的满足，如图 2-2 所示。

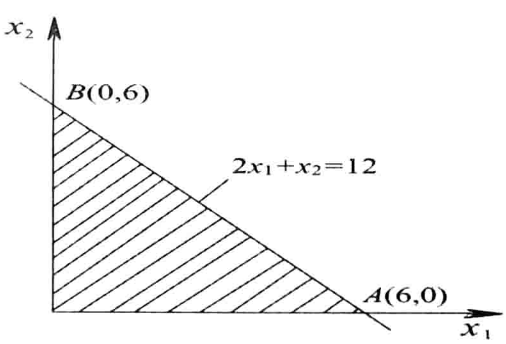

图 2-2

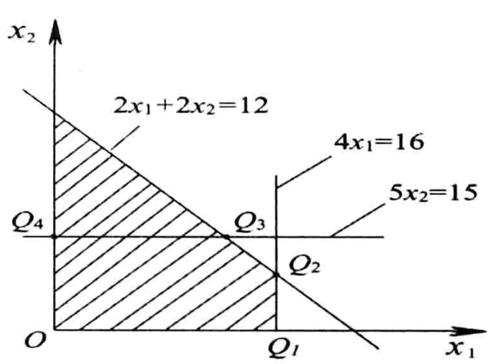

图 2-3

（2）满足约束条件点的分布。满足约束条件 $4x_1 \le 16$ 的所有点是位于 $4x_1 = 16$ 这条直线上及这条直线左半边平面内；满足 $5x_2 \le 15$ 的所有点位于 $5x_2 = 15$ 这条直线上及这条直线下方的半平面内。

同时满足这些约束条件的点必然落在由 x_1, x_2 两个左边轴与上述四条直线所围成的多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 内及该多边形的边界上，如图 2-3 所示。