普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

线性代数

XIANXING DAISHU

李书刚 陈生安
李发来 戴阔斌 ◎主编

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)$$

華中師範大學出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

线性代数

主　编:李书刚　陈生安　李发来　戴阔斌
副主编:代晋军　曾梅兰　周　芳　任全玉　陈国华

华中师范大学出版社

内容提要

线性代数是高等院校理工、生化、经管类等专业的重要基础课，其学习目的是使学生掌握线性代数最基本的概念、理论和方法，并能解决日常生活、生产技术及经济管理中的实际问题。

全书共五章：矩阵与行列式、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型以及数学实验，其中数学实验这章主要介绍了线性代数在 Matlab 中的实现，应用性强。

本书力求结构严谨、逻辑清晰、例题典型、习题丰富。可作为高等院校有关专业的教学用书，也可供部分研究生、自学者参考之用。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李书刚　陈生安　李发来　戴阔斌主编. —武汉：华中师范大学出版社，2013.8
(普通高等教育“十二五”规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6087-5

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①李…　②陈…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 099044 号

线性代数

©李书刚　陈生安　李发来　戴阔斌　主编

责任编辑：田小容　袁正科　　**责任校对**：易　雯　　**封面设计**：胡　灿
编辑室：第二编辑室　　**电话**：027—67867362
出版发行：华中师范大学出版社
社址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号
电话：027—67863426/67863280(发行部)　027—67861321(邮购)
传真：027—67863291
网址：http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印刷：武汉理工大印刷厂　　**督印**：章光琼
字数：220 千字
开本：787 mm×1092 mm　1/16　　**印张**：9.75
版次：2013 年 8 月第 1 版　　**印次**：2013 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000　　**定价**：18.00 元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育"十二五"规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少

讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是内容精选、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江

于武昌桂子山

2013 年 7 月

前　言

线性代数是高等院校理工、生化、经管类等专业的重要基础课。随着计算机及其应用技术的飞速发展，很多实际问题得以离散化并得到定量的解决。作为离散化和数值计算理论基础的线性代数课程，为解决实际问题提供了强有用的数学工具。通过对线性代数课程的学习，学生们不仅可以掌握该课程的基本知识理论，更重要的是可以培养学生的抽象思维和逻辑推理能力以及利用矩阵等工具解决专业中遇到的实际问题的能力。

传统的线性代数教材存在不适应计算机时代大学生能力提升的诸多不利方面，因此，改革线性代数教材的编写理念，融入数学建模与数学实验的思想与内容，切合时代节拍成为本书编写的一个良好动机。

在线性代数教学内容中，矩阵、线性方程组、向量组及其线性相关性三者之间的关系是十分密切的。如何让学生多层次、有机地理解并掌握这些内容，灵活运用它们解决问题是我们始终关注的。教材编写力图多层次、多角度地让学生领会这一内容。其次，调整了教学内容的次序，突出了矩阵的重要性。把传统教材中视为十分重要，而在计算机时代相对简单的行列式及其计算这一内容进行了适当压缩，作为矩阵的一个部分来引入和讲授。再次，重视对线性空间、线性变换等相关知识的介绍，从而改变过去部分学过线性代数的学生认为线性代数就是求解线性方程组的错误认知。最后，用少量篇幅介绍了计算机软件 Matlab，学生可以通过这个软件来提高自己的数学建模、数值计算以及解决实际问题的能力。

本教材的编写得到了华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社领导的亲切指导与大力支持，兄弟院校的诸多同仁也积极参与了本教材的编写工作。具体执笔情况为：黄冈师范学院数计学院任全玉、戴阔斌老师：第 1 章 矩阵与行列式；湖北工程学院数统学院曾梅兰老师：第 2 章 线性方程组；湖北科技学院

数统学院陈生安、周芳老师：第 3 章 向量组的线性相关性；华中师范大学数统学院代晋军老师：第 4 章 相似矩阵与二次型，李书刚老师：第 5 章 数学实验。全书由李书刚合成并统稿。编写工作还得到了湖北工程学院数统学院李发来老师、湖南人文科技学院数学系陈国华老师的热情参与和诸多帮助，在此对他们一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在诸多不足之处，欢迎广大师生批评指正。

编者

2013 年 5 月

目　录

第 1 章　矩阵与行列式 …… 1

1.1　矩阵的概念 …… 1

习题 1.1 …… 5

1.2　矩阵的运算 …… 5

1.2.1　矩阵的线性运算 …… 5

1.2.2　矩阵的乘法 …… 6

1.2.3　矩阵的转置 …… 9

习题 1.2 …… 11

1.3　矩阵的初等变换 …… 12

1.3.1　引例 …… 12

1.3.2　矩阵的等价 …… 15

习题 1.3 …… 18

1.4　方阵的行列式 …… 18

1.4.1　行列式的定义 …… 18

1.4.2　行列式的性质 …… 22

1.4.3　行列式按行(列)展开 …… 27

习题 1.4 …… 31

1.5　矩阵的秩与方阵的逆 …… 32

1.5.1　矩阵的秩及其求法 …… 32

1.5.2　方阵的逆 …… 34

1.5.3　克莱姆(Cramer)法则 …… 39

习题 1.5 …… 42

1.6　分块矩阵 …… 42

1.6.1　矩阵的分块与运算 …… 42

1.6.2　分块矩阵的应用 …… 44

习题 1.6 …… 47

复习题 1 ………… 47
第 2 章 线性方程组 ………… 52
2.1 线性方程组的求解 ………… 52
2.1.1 消元法 ………… 52
2.1.2 初等变换法 ………… 53
习题 2.1 ………… 54
2.2 线性方程组有解判别定理 ………… 55
习题 2.2 ………… 61
复习题 2 ………… 61
第 3 章 向量组的线性相关性 ………… 63
3.1 向量组及其线性组合 ………… 63
3.1.1 向量组及其线性表示 ………… 63
3.1.2 线性方程组的向量表示 ………… 65
3.1.3 线性相关性及其判别法 ………… 66
3.1.4 向量组的极大线性无关组与向量组的秩 ………… 71
习题 3.1 ………… 75
3.2 向量空间 ………… 75
3.2.1 向量空间的定义 ………… 75
3.2.2 基变换与坐标变换 ………… 77
习题 3.2 ………… 80
3.3 向量的内积与正交性 ………… 80
3.3.1 向量的内积、长度与正交性 ………… 80
3.3.2 正交向量组 ………… 84
习题 3.3 ………… 88
3.4 线性方程组的解的结构 ………… 88
3.4.1 齐次线性方程组的解的结构 ………… 88
3.4.2 非齐次线性方程组的解的结构 ………… 92
习题 3.4 ………… 96
复习题 3 ………… 96
第 4 章 相似矩阵与二次型 ………… 101
4.1 方阵的特征值与特征向量 ………… 101
4.1.1 引例 ………… 101
4.1.2 特征值与特征向量 ………… 102
习题 4.1 ………… 108

4.2 相似矩阵与方阵的对角化 …… 108
4.2.1 相似矩阵及其性质 …… 108
4.2.2 n 阶矩阵与对角矩阵相似的条件 …… 111
习题 4.2 …… 115
4.3 实对称矩阵的对角化 …… 115
习题 4.3 …… 120
4.4 二次型及其标准形 …… 120
习题 4.4 …… 129
4.5 二次型的分类 …… 130
习题 4.5 …… 133
复习题 4 …… 133
第 5 章 数学实验 …… 137
5.1 Matlab 概述 …… 137
5.2 Matlab 在线性代数中的应用 …… 140
5.2.1 矩阵的运算 …… 140
5.2.2 线性方程组的求解 …… 142
5.2.3 矩阵的特征值与特征向量 …… 143
5.2.4 向量组的施密特正交化 …… 144

第 1 章

矩阵与行列式

矩阵是线性代数的一个主要研究对象，也是线性代数中最重要的内容之一，它的应用极其广泛。线性代数中的很多问题，最后都可以归结为某一类型矩阵问题的求解。行列式是线性代数的一个重要概念，其广泛地应用于数学、物理、工程技术等方面。本章矩阵部分主要介绍矩阵的概念、矩阵的几种运算、矩阵的初等变换、矩阵的秩与方阵的逆以及分块矩阵；行列式部分主要介绍其定义、性质与按行(列)展开的相关计算。

1.1 矩阵的概念

定义 1 **含 n 个未知量 m 个方程的线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

称为 n 元线性方程组，其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是未知量，m 是方程的个数，$a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 称为方程组的系数，$b_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 称为常数项。

方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 m 不一定是相等的。系数 a_{ij} 中的第一个指标 i 表示其在第 i 个方程，第二个指标 j 表示其是 x_j 的系数。

当常数项 $b_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 不全为 0 时，称式(1) 为**非齐次线性方程组**；当常数项 $b_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 全为 0 时，称式(1) 为**齐次线性方程组**。

定义 2 **我们将方程组(1) 左边的系数依次拿出来，排成一个 m 行 n 列的数表**

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵。为表示它是一个整体，总是加一个小括号或者中括号，并用大写英文字母表示它，记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或者} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}。$$

a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元。i 称为行指标，简称为行标；j 称为列指标，简称为列标。为了表示方便，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$。$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$。

设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{C}$ 为复数集。当所有元素 $a_{ij} \in \mathbf{R}$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵；当所有元素 $a_{ij} \in \mathbf{C}$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为复矩阵。本书中的矩阵除特殊说明外，一律指的是实矩阵。

矩阵的应用非常广泛，下面举两个实例来加以说明。

例 1　某供应商向三个大型超市配送 5 种商品的数量可列成矩阵，形成一个配送方案：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 为供应商向第 i 个超市配送第 j 种商品的数量。

同时，此供货商也可以通过矩阵的形式将此 5 种商品的单价和单件商品的重量表示出来：

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix},$$

其中矩阵的元素 b_{i1} 表示第 i 种商品的单价，b_{i2} 表示第 i 种商品的单件重量。

例 2　某医学工作者研究肥胖症与血压的联系，在一次调查中得到一组数据，如表 1-1 所示：

表 1-1

体型 \ 人数 \ 血压	低	正常	高
肥胖	55 人	55 人	111 人
正常	180 人	38 人	100 人
体瘦	390 人	26 人	100 人

以上的调查结果可以列成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} 55 & 55 & 111 \\ 180 & 38 & 100 \\ 390 & 26 & 100 \end{pmatrix},$$

此矩阵是将体型分为三类，依次为肥胖、正常和体瘦，分别用矩阵中的 (i,j) 元 a_{ij} 中的行

标 1,2,3 来表示;将血压分为三类:依次为低、正常、高,分别用矩阵中的(i,j)元a_{ij}中的列标 1,2,3 来表示。

若两个矩阵的行数相等且列数也相等,则称它们是**同型矩阵**。

两个同型矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,若它们的对应元素都相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n),$$

则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**,记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

把行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 **n 阶矩阵**或者 **n 阶方阵**,可记为$\boldsymbol{A}_n$。

只有一行的矩阵称为**行矩阵**或者**行向量**,为避免混淆,元素间也可以用逗号分隔开,即

$$\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)\text{ 或者 }\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)。$$

只有一列的矩阵称为**列矩阵**或者**列向量**,即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}。$$

行向量和列向量也可用小写希腊字母$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\gamma}$或者小写英文字母$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$等表示。

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**,记作$\boldsymbol{O}$。

定义 2 中的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

我们称为方程组(1) 的**系数矩阵**,若在此矩阵的基础之上将常数列添加进去,就成了如下的矩阵:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix},$$

此矩阵称为**增广矩阵**,记为$\bar{\boldsymbol{A}}$或者$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$,这里

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}。$$

定义 3 若 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

则称这种关系式为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的一个线性变换，其中 a_{ij} 为常数。称线性变换的系数 a_{ij} 构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为线性变换的系数矩阵。

线性变换和线性变换的系数矩阵之间存在着一一对应的关系。如，称线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 为**恒等变换**，称与其对应的一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 为 n **阶单位矩阵**。单位矩阵有时也简记为 $\boldsymbol{E}$。

再如，称线性变换 $\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$ 为**正比例变换**，称与其对应的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 为 n 阶**对角形矩阵**，当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，此对角矩阵称为**数量矩阵**。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中的元素满足 $a_{ij}=0(i>j)$，即主对角线下方元素全部为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中的元素满足 $a_{ij}=0(i<j)$，即主对角线上方元素全部为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角形矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

习题 1.1

1. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0, \end{cases}$ 写出相应的系数矩阵。

2. 已知线性变换 $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 - y_2 + 5y_3, \end{cases}$ 写出相应的系数矩阵。

3. 写出第 1 题中的增广矩阵。

1.2　矩阵的运算

1.2.1　矩阵的线性运算

定义 1　**设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，则将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 定义为**

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n},$$

即

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}。$$

定义 2　**数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{A}$ 定义为**

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}。$$

由矩阵的定义易知，矩阵的加法与数乘满足下列运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$。

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$。

(3) $(-1)\boldsymbol{A}$ 叫作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，简记为 $-\boldsymbol{A}$。显然 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，由此可以定义矩阵的减法：$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$。

(4) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A}) = \mu(\lambda\boldsymbol{A})$。

(5) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$，$\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$。

这里 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵，λ, μ 是数。

矩阵的加法与数乘运算统称为矩阵的线性运算。

例 1 设有矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&4\\2&0&5\\-1&0&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&5&8\\3&7&7\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

解 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-5&-3\\-4&-7&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{5}{3}\\0&-\frac{5}{3}&-1\\-\frac{4}{3}&-\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

1.2.2 矩阵的乘法

我们先看下面的一个例子。

设有两个线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}x_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2,\\x_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2,\\x_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2。\end{cases}\tag{2}$$

将式(2) 代入到式(1) 中，经整理可得

$$\begin{cases}y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2,\\y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2。\end{cases}$$

该线性变换对应的矩阵可以看成是式(1) 与式(2) 对应的矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}。$$

通过观察可以看出，等式左边第一个矩阵即左矩阵的列数等于第二个矩阵即右矩阵的行数；等式右边第 i 行 j 列交叉处的元素是左边第一个矩阵的第 i 行元素与第二个矩阵的第 j 列的对应元素的乘积之和，如等式右边的矩阵的(1,1)元为等式左边的左矩阵的第一行与右矩阵的第一列对应元素相乘再相加得到的。

定义 3 **设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，则定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\quad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)。$$

并把此乘积记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}。$$

注 (1) 只有当左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，矩阵的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义，