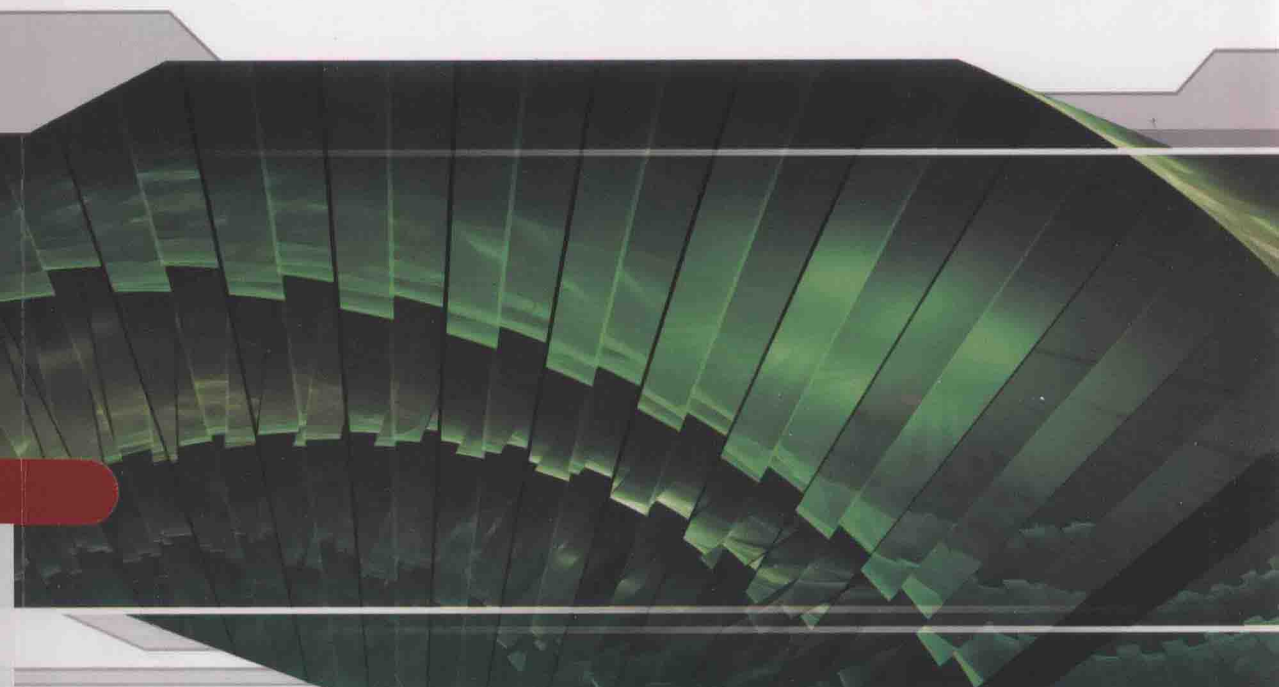




“十二五”应用型本科系列规划教材

线性代数

Linear Algebra



陈丙振 主 编
施久玉 主 审

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十二五”应用型本科系列规划教材

线 性 代 数

主 编 陈丙振
参 编 翟文娟 张兰云 温晓楠
主 审 施久玉



机械工业出版社

本书是普通高等本科院校线性代数类课程教材,按照教育部教学指导委员会教学基本要求并结合应用型本科院校教学实际编写而成。

全书由矩阵及初等行变换、线性方程组及向量组的线性相关性、方阵的行列式、相似矩阵与二次型共4章内容组成。书中各节(除每章的“应用”部分之外)均配有习题,每章后配有总习题,书后有参考答案。

本书主要特色是以线性方程组为主线逐步介绍线性代数的基本概念,对于比较难证明的定理大多采用例证的方法,希望能够借此启发和培养学生的自学能力。

本书适合作为应用型本科院校各专业教材,也可作为大专院校和成人教育学院的教学参考书,还可供参加自考的广大读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈丙振主编. —北京:机械工业出版社, 2014. 1

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-45232-4

I. ①线… II. ①陈… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第307167号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 陈崇昱

版式设计:常天培 责任校对:任秀丽

责任印制:张楠

北京京丰印刷厂印刷

2014年1月第1版·第1次印刷

184mm×240mm·7.5印张·128千字

标准书号:ISBN 978-7-111-45232-4

定价:19.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010) 68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010) 88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

线性代数是研究线性方程组解的一门数学学科，它是各院校诸多专业的一门重要基础课。该课程对培养学生应用数学知识解决实际问题的能力有着十分重要的作用。

为了不断适应应用型本科学生的学习水平和教学要求，通过对几年来教学实践的总结，积极借鉴各类优秀教材的优点，我们编写了本书。本书内容符合教育部对本科数学教学的基本要求，同时也根据我院教学的实际情况，对一些内容进行适当精简。在选材和叙述上力求简明、扼要、够用。

本教材坚持“主线统一，弱化理论，注重应用，循序渐进”的原则。

“主线统一”指全书以线性方程组为主线，逐步介绍线性代数的基本概念。

“弱化理论”指对于比较难证明或抽象的定理均采用例证的方法，以淡化理论，使学生更容易理解和接受。

“注重应用”体现在每章最后一节都介绍了本章相关内容在实际中的应用，解决了学生在学习过程中容易产生的“线性代数有什么用”的困惑。

“循序渐进”体现在本书正文中的例题计算都比较简单，一些稍微有难度的题目都放在课后习题中，避免在一开始就伤害学生学习的积极性。

全书由矩阵及初等行变换、线性方程组及向量组的线性相关性、方阵的行列式、相似矩阵与二次型共4章内容组成。书中每章节后的习题供基本练习用。建议教学时数为32学时。教师可根据本校学时情况决定每章最后一节是否要讲。

参加本书编写工作的有翟文娟（第1章），陈丙振（第2章），张兰云（第3章），温晓楠（第4章），最后由陈丙振统稿。施久玉教授审阅了全书。

北京交通大学海滨学院的领导对本书的编写始终给予关心和帮助，谨此致谢。同时感谢海滨学院数学教研室的其他教师给予的建议和帮助。

由于编者水平有限，书中可能存在不当和错误之处，恳请读者批评指正。

编 者

目 录

前言	
第 1 章 矩阵及初等行变换	1
1.1 矩阵	1
习题 1.1	5
1.2 矩阵的运算	5
习题 1.2	13
1.3 矩阵的初等变换与线性方程组	13
习题 1.3	19
1.4 初等矩阵与方阵的逆	19
习题 1.4	25
1.5 应用	26
总习题 1	29
第 2 章 线性方程组及向量组的 线性相关性	31
2.1 n 维向量及其运算	31
习题 2.1	32
2.2 向量组的线性相关性	33
习题 2.2	36
2.3 线性方程组的解的结构	36
习题 2.3	42
2.4 矩阵的秩	43
习题 2.4	48
2.5 向量空间	49
习题 2.5	49
2.6 应用	49
总习题 2	51
第 3 章 方阵的行列式	53
3.1 n 阶行列式的定义	53
习题 3.1	60
3.2 行列式的性质及计算	60
习题 3.2	64
3.3 行列式按行(列)展开及计算	64
习题 3.3	68
3.4 行列式的应用	68
习题 3.4	78
总习题 3	78
第 4 章 相似矩阵与二次型	82
4.1 向量的内积、长度及正交性	82
习题 4.1	85
4.2 方阵的特征值与特征向量	86
习题 4.2	90
4.3 相似矩阵	90
习题 4.3	95
4.4 二次型及其标准形	95
习题 4.4	100
4.5 应用	100
总习题 4	102
附录	104
附录 A 连加号、连乘号及其性质	104
附录 B 习题参考答案	105
参考文献	116

第 1 章

矩阵及初等行变换

矩阵是线性代数中的重要概念,在许多实际问题中都会用到矩阵.用矩阵来表示一些问题会大大地简化问题的复杂性,使得问题的表述更加清晰.本课程的中心内容——线性方程组,用矩阵的形式来表示形式上更加简洁,计算上更简便.本章首先由实际问题出发引入矩阵的概念,定义矩阵的运算,然后重点介绍矩阵的初等变换并利用初等行变换求解线性方程组和方阵的逆矩阵.

1.1 矩阵

1.1.1 引例

例 1.1.1 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases} \quad (1-1)$$

的系数和右端常数项按照在方程组中的位置次序拿出来形成一个数表

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 10 & 4 & 1 \end{array}$$

则方程组(1-1)可以用这个数表来代替.实际上,不同的方程组只是系数和右端项不同,至于使用哪些符号来表示未知变量则是无关紧要的.

例 1.1.2 某航空公司在 A, B, C, D 4 座城市之间开辟了若干航



线, 4 座城市之间的航班图如图 1-1 所示, 箭头从始发地指向目的地.

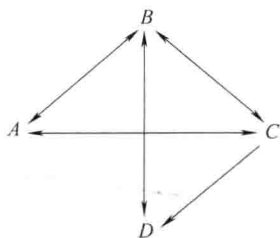


图 1-1

显然, 4 座城市之间的航班情况可用下面的表 1-1 来表示:

表 1-1

		目的地			
		A	B	C	D
始发地	A		✓	✓	
	B	✓		✓	✓
	C	✓	✓		✓
	D		✓		

其中 ✓ 表示有航班. 一般情况下, 为了便于研究, 把表 1-1 中的 ✓ 用 1 代替, 空白的地方用 0 代替, 得到一个由 0 和 1 组成的数表 1-2, 用此数表来反映各城市之间的航班情况.

表 1-2

0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	0	0

像例 1.1.1 和例 1.1.2 中得到的由数字形成的表格就是本章要讨论的矩阵. 由此看来, 矩阵的实质就是一个数表.

1.1.2 矩阵的概念

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 为了表示此数表是一个整体, 通常会将数表放在小括号内, 用大写黑体字母 A, B, C 等表示, 记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

简记为 $A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})$.

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素, a_{ij} 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素, 称为矩阵 A 的 (i, j) 元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书除特别说明讨论的都是实矩阵.

1.1.3 几个特殊矩阵

- 1) 行数与列数都等于 n 的矩阵, 称为 n 阶方阵, 记作 A_n .
- 2) 只有一行的矩阵 $(a_1 a_2 \cdots a_n)$ 称为行矩阵(或行向量), 为避免元

素间的混淆, 行矩阵也记作 (a_1, a_2, \cdots, a_n) . 只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列

矩阵(或列向量).

- 3) 元素全为零的矩阵称为零矩阵, 用 O 表示. 例如,

$$O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{1 \times 4} = (0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

- 4) 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为对角矩阵, 简称对角阵, 用 di

$\text{ag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 表示. 特别地, 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = k$ (k 为常数), 则



称 $\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$ 为数量矩阵或纯量矩阵. 若 $k = 1$, 则称

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n 或 I_n .

5) 形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵, 称为上三角形矩阵; 形如

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵, 称为下三角形矩阵.

定义 1.2 若两个矩阵的行数和列数分别相等, 则称两个矩阵为同型矩阵.

定义 1.3 两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

例 1.1.3 判断矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相等?

解 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 都是 3×2 的矩阵, 因此是同型矩

阵, 但显然不是相等的矩阵; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 显然都

是零矩阵,但两个矩阵不是同型矩阵,因此也不是相等的矩阵.

例 1.1.4 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4-x & 3 \\ 1 & 4 & 5z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ y & 4 & z-8 \end{pmatrix}$, 若 $A=B$, 求

x, y, z .

解 由 $A=B$ 的定义知,

$$\begin{cases} 4-x=x, \\ 1=y, \\ 5z=z-8, \end{cases}$$

因此 $x=2, y=1, z=-2$.

思考题 对角矩阵和数量矩阵有什么关系?

习题 1.1

1. 两人玩“石头-剪刀-布”的游戏,每个人的出法只能在{石头,剪刀,布}中选择一种.当他们各选定一种出法时,就确定了各自的输赢.若规定胜者得1分,败者得-1分,平手都不得分,则对于各种可能的情况,试用矩阵表示它们的输赢情况.

2. 某边防团有三个边防哨所,团里决定建立一个有线通信网,通过勘察测算,获得一组有关建设费用的预算数据,如图 1-2 所示,其中 4 个点分别表示团部 O 与三个哨所 A, B, C , 图中两点连线旁的数字表示两地间架设线路所需的费用(单位:万元).试用矩阵的形式表示出有关建设费用的预算数据.

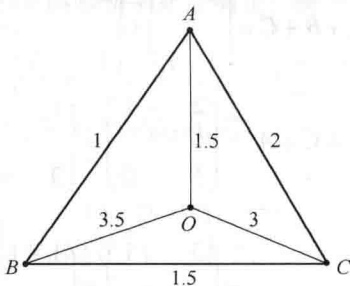


图 1-2

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.4 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$, 规定

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$



设 A, B, C 是同型矩阵. 易知, 矩阵加法满足如下运算规律:

1) 交换律: $A + B = B + A$;

2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

设矩阵 $A = (a_{ij})$, 记 $-A = (-a_{ij})$, $-A$ 称为矩阵 A 的负矩阵. 显然有 $A + (-A) = O$.

这里借助负矩阵来定义矩阵的减法

$$A - B = A + (-B).$$

实际上, 仿照矩阵加法的定义, 也可以直接定义矩阵的减法.

例 1.2.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 $A + B + C, B + C + A, 2A - B$.

解

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B + C + A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 1.5 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$, 规定

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足如下运算规律:

设 A, B 是同型矩阵, λ, μ 是常数, 则



1) 结合律: $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$;

2) 分配律: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$, $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$.

矩阵相加与数乘矩阵结合起来, 统称为矩阵的线性运算.

1.2.3 矩阵与矩阵相乘

定义 1.6 设有两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}$ 与 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$, 那么规定矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的乘积是一个 $m \times n$ 的矩阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

并把此乘积记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

由定义 1.6 可以看出, 乘积矩阵 \mathbf{C} 的第 i 行第 j 列的元素是由前一个矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行与后一个矩阵 \mathbf{B} 的第 j 列对应元素相乘再作和得到的.

注 1) 由定义 1.6 可以看出, 两个矩阵能够相乘必须满足: 前一个矩阵 \mathbf{A} 的列数等于后一个矩阵 \mathbf{B} 的行数.

2) 如果两个矩阵能够相乘, 则乘积矩阵 \mathbf{C} 的行数与前一个矩阵 \mathbf{A} 的行数相同, 乘积矩阵 \mathbf{C} 的列数与后一个矩阵 \mathbf{B} 的列数相同.

例 1.2.2 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算 $\mathbf{E}_2\mathbf{A}$, \mathbf{AE}_3 .

解 由矩阵相乘的定义得,

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AE}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由例 1.2.2 看出, 在 $m \times n$ 矩阵的左侧乘以 m 阶单位矩阵 \mathbf{E}_m 或者右侧乘以 n 阶单位矩阵 \mathbf{E}_n , 其乘积矩阵还是原来的矩阵. 这说明单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于 1 在实数乘法中的作用.

例 1.2.3 设



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

计算 AB, BA .

解 由定义计算得

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

对于两个方阵 A 和 B , 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 和 B 是可交换的. 由例 1.2.3 可以发现:

- 1) 矩阵乘法不满足交换律, 即 AB 与 BA 不一定相等;
- 2) 矩阵 $A \neq O, B \neq O$, 却有 $AB = O$, 从而, 由 $AB = O$ 不能得到 A, B 中至少有一个是零矩阵.

虽然矩阵的乘法不一定满足交换律, 但是纯量矩阵 λE 却与任何同阶方阵可交换, 即 $A_n(\lambda E_n) = \lambda A_n = (\lambda E_n)A_n$.

矩阵乘法满足如下运算规律:

- 1) 乘法结合律: $ABC = (AB)C = A(BC)$;
- 2) 数乘和乘法的结合律: $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;
- 3) 乘法对加法的分配律: $A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA$.

1.2.4 方阵的幂与方阵多项式

定义 1.7 若 A 是 n 阶方阵, 则称

$$AA \cdots A \text{ (即 } k \text{ 个 } A \text{ 相乘)}$$

为矩阵 A 的 k 次幂, 记为 A^k , 其中, k 是正整数.

显然矩阵的幂满足以下性质,

- 1) $A^k A^l = A^{k+l}$;
- 2) $(A^k)^l = A^{kl}$, 其中, k, l 是正整数.

例 1.2.4 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^3 .

解

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定义 1.8 设 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一元 n 次多项式, 则称

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

为方阵 A 的多项式, 记为 $p(A)$.

1.2.5 矩阵的转置

定义 1.9 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

将 A 的行(列)换成同序数的列(行)得到的新的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称做矩阵 A 的转置矩阵, 记为 A^T .

显然, 若 A 是 $m \times n$ 的矩阵, 则 A^T 是 $n \times m$ 的矩阵.

转置矩阵具有如下运算性质:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- 3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例 1.2.5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解 方法一



$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 12 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

所以

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

方法二

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

借助矩阵的转置运算, 我们给出对称矩阵和反对称矩阵的定义.

定义 1.10 设 A 是 n 阶方阵, 若 $A = A^T$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 A 是对称矩阵.

若 $A = -A^T$, 即

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 A 是反对称矩阵.

这里的对称指的是关于矩阵的主对角线对称. 由反对称矩阵满足的条件可以看出, 其主对角线上的元素全为零. 例如

$$\text{矩阵} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ 是对称矩阵, 矩阵} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是反对称矩阵.}$$

1.2.6 矩阵的分块

在许多根据实际问题建立的模型中, 矩阵的阶数一般比较高, 此时对矩阵直接进行运算比较麻烦, 一般可将矩阵进行分块简化计算.

定义 1.11 用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块, 这种操作称为对矩阵进行分块; 每一个小块称为矩阵的子块; 矩阵分块后, 以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例 1.2.6 将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

分块的方法有多种, 例如



$$\textcircled{1} A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right), \text{ 记 } B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_{12} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_{21} = (2 \ 5), A_{22} = (1 \ 0). \text{ 则 } A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \text{ 为 } A \text{ 的子块,}$$

B 称为分块矩阵.

$$\textcircled{2} A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right), \text{ 记 } B = (A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{14}), \text{ 子块请读者自}$$

己写出.

分块矩阵具有和普通矩阵类似的运算规则.

(1) 分块矩阵的加法 设矩阵 A 和 B 是同型矩阵, 对 A 和 B 进行相同的分块法

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中, A_{ij} 和 B_{ij} 是同型矩阵, 那么

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的数乘 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为常数, 则

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的乘法 设 A 是 $m \times s$ 的矩阵, B 是 $s \times n$ 的矩阵, 对 A 和 B 进行如下分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$



其中, $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is}$ 的列数与 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{rj}$ 的行数分别相等, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中, $C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}$ ($i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r$).

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1-2)$$

称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为系数矩阵, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为未知变量向量,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 为常数项向量, $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 为增广矩阵.

根据矩阵的乘法, 线性方程组(1-2)可以表示为矩阵形式: $Ax = b$. 若对

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

根据矩阵的乘法, 线性方程组(1-2)可以表示为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b.$$

思考题 1) 设 A, B, C 是三个 n 阶方阵, 下面三个等式成立吗?

- ① $(AB)^k = A^k B^k$;
- ② $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;