全国中小学骨干教师继续教育
核心课培训教材

QGZXXGGJSJ XJYHXKPXJC

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

小学数学教师知识扩展

李佐锋　周淑芬　编著

东北师范大学出版社

全国中小学骨干教师继续教育
核心课培训教材

QGZXXGGJSJ XJYHXKPXJC

小学数学教师知识扩展

马云鹏　主审
李佐锋　周淑芬　编著

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

东北师范大学出版社　长春

图书在版编目(CIP)数据

小学数学教师知识扩展/李佐锋,周淑芬编著.—长春:东北师范大学出版社,2001.9

ISBN 7-5602-2936-0

Ⅰ.小… Ⅱ.李… 周… Ⅲ.数学课-教育改革-研究-小学 Ⅳ.G623-202

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第057827号

□出 版 人:贾国祥

□责任编辑:石 斌 □封面设计:未 名

□责任校对:丁 峰 □责任印制:张允豪

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街138号(130024)

电话:0431—5687213

传真:0431—5691969

网址:http://www.nnup.com

电子函件:sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

吉林工学院印刷厂印刷

2001年11月第1版 2001年11月第1次印刷

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:8 字数:188千

印数:0 001 — 5 000 册

定价:8.80元

序

当我们迈进21世纪的时候，我们会敏锐地觉察到，科学技术日新月异，知识经济初见端倪，综合国力的竞争日趋激烈．这种竞争说到底就是人才的竞争．人才培养靠教育，而教育的发展归根结底在于高素质师资的培育，主要依赖于教师教育．教师教育面临着严峻的挑战．

当前，我国正处于社会转型时期，从农业社会转向工业社会，从工业社会转向信息社会，即从传统社会转向现代化社会．国家的经济体制、经济增长方式也处于一个转轨时期．在社会转型、经济体制转轨、经济增长方式转型的情况下，历史赋予我们惟一的选择就是实施科教兴国战略．科教兴国，教育为本，发展教育当然师资要先行，这对教师教育提出了严峻的挑战．

《中国教育改革和发展纲要》明确提出了本世纪末大城市市区和经济发达地区要普及高中阶段教育，普及高中教育的关键是教师，所以，高师的培养能力是供远远小于求．在这种情况下，对教师教

育无论是数量的扩大，还是质量的提高，都提出了严峻的挑战.

整个中学教育改革的根本出发点，就是要实行全面提高学生素质的素质教育. 而实施以培养创新和实践能力为核心的素质教育的根本，还是在于教师素质的提高. 如果教师素质不提高，一切都无济于事. 这对教师教育提出了严峻挑战.

其他的高等教育或专门教育发展需要高质量的生源，而高等教育和其他各种专门教育的生源都要由中等教育提供. 这必然对中等教育提出了更新更高的要求，而中等教育质量的提高在于中小学教师素质的提高. 从这个角度来讲，也对教师教育提出了严峻的挑战.

尤其应该提出的，我国2010年基础教育课程改革目标，构建新的基础教育课程体系，将突出培养学生的创新精神和实践能力，终身学习的愿望和能力，以及对自然和社会的责任感，为造就德、智、体、美等全面发展的社会主义事业建设者和接班人奠定基础. 为达此目标，课程体系、结构、内容、形式、评价、管理都要发生重大变化，这对教师提出了新的、更高的要求. 当然，对教师教育也提出了严峻的挑战.

当前我国教师现状严重不适应21世纪教育改革与发展需要，必须加强中小学教师继续教育工作，全面提高中小学教师素质. 实施中小学教师继续教育，关键是教材建设，编写适应中小学教师继续教育的教材乃当务之急，为此，由教育部师范教育司批准建立的、面向全国的中小学教师继续教育东北

师大研究中心在进行广泛调查研究和第一期试办中小学骨干教师国家级培训班的基础上，组织了一批了解基础教育的著名教授、专家编写出了一套适合中小学教师在职进修、提高的教材．这套教材囊括了：学科知识更新类，如学科前沿介绍、科学概念的形成过程、知识拓宽与应用、高观点下的基本知识与其他学科的联系与综合等；教师职业所需的有关知识和教育理论类，如邓小平理论，教师职业道德，教育与社会，基础教育的国际比较，教师教育等；教育实践类，如基本技术与方法，现代教育技术，教育科研等．

总之，中小学教师继续教育的课程是多类型、多规格、多层次、多渠道的动态结构，既有文字教材，又有音频、视频教材，还有网上资源．其类型和结构，将构成丰富多彩的教材体系．本套教材充分体现了从教师可持续发展的高度，把现代自然科学和人文社会发展科学的最新成果反映到课程和教材体系中来；用现代教育思想、理论、技术和新的学科知识发展动态指导教师教育实践，充分重视教师教学经验和实践基础，将优秀教师科研成果课程化，发展教师主体意识和创新精神．在教材编写中，努力做到三个层面的整合：第一个层面，根据学科自然发展与中小学教学实践要求，对专业学科知识进行整合；第二个层面，以本专业学科为载体，教育学科知识和专业学科知识的整合；第三个层面，以教学设计为重点，信息技术与教学内容、方法和手段的整合．

我们完全相信，这套教材的出版，会使中小学

教师继续教育教材建设得到补充和完善，也将会推动中小学教师继续教育工作的深入开展.

通过这套书，假如能吸引更多的中小学教师投入到中小学教师继续教育中来，我想正是编者和本“研究中心”所乐于见到的，焉知就不会有起骨干作用的颗颗灿烂的基础教育的新星，从继续教育的行列中升起呢？

我们期待着，衷心热切地期待着.

张贵新

写于全国中小学教师继续教育

东北师大研究中心

2001年5月

目录

第一章

微积分入门

数学史学家们说:"作为科学史上第一次最重要的创造的微积分,它对科学与生产实践的意义,怎样估计都不会过高——当然,这不是说它就是一切."

人们对微积分的评价不无道理.往前追溯,微积分乃是集百年数学发展成就和数学家们上百年的工作业绩之大成,适应科学技术和生产实践的迫切需求而产生的;作为微积分学本身,从它诞生一直到目前,历经几百年的发展过程,在极其广泛的应用层面上,不断地被完善和拓展;而在不断涌现的近现代各自然科学新学科和新的数学分支中,微积分也都作为必备的基础内容而扮演着不可替代的重要角色.

那么什么叫"微积分"?它的研究内容是什么?使用了什么工具?又在哪些领域被应用到?考虑到读者的情况,本章将采用通俗易懂(自然不很严密、系统)的方法,带大家进入微积分之门.

一、有限与无限之争——极限浅说

1. 自然数多还是正偶数多

大概是在上个世纪 80 年代末,我曾接到过一个小学教师打来的电话,问自然数多还是正偶数多.时隔 20 多年,是否相关的人们都能说清楚这个问题,尤其是那些在小学数学教学第一线的教师

们？须知，在数学上有兴趣的小学生能够提出这个问题者，不能说是极个别的，而教师作一点看起来很“高深”的解释，学生们也并非完全不能接受，问题在于我们自己是否首先搞清楚了.

要说清楚上述问题，必须首先弄清楚论域，也就是说，我们是在什么范围内或在什么条件下讨论问题(这是数学工作者须时刻注意的). 如果是在自然数集合的任何一个有限子集合内讨论，那么自然数多于正偶数集合是每一个小学生都懂的，还能给你讲点道理：2 倍关系呢. 但是，如果问题是在整个自然数集合内讨论，其答案便迥然不同：自然数与正偶数一样多.

请注意上面一段话中打了重点号的一句. 它的含义是什么？那就是说：选定前 100 个数的话，正偶数个数是自然数个数的一半；选定前 1 万个自然数讨论，还是这个结论；选定前 100 万个，1 000 万个数，以至于前 100 亿个数讨论，结论还是不变. 一句话，只要你能够写出或说出这个确定的界限数，那么在从 1 到你所说的这个确定的数构成的集合中，自然数总是正偶数的 2 倍.

但是，一旦把整个自然数集都拿来讨论，则问题的结论立刻发生质的变化：自然数与正偶数的个数一样多. 道理何在？就是由有限集合与无限集合这两个不同的讨论前提所造成的.

我们知道，要比较两类物品的多少，可以采用两种方法：一是用数一数各自个数的方法，二是用一对一的方法进行比较. 在物品的个数是有限个时，两法均可采用；而当物品的个数是无限多时，就只能用后一种方法来比较了. 试想，自然数有无限多个，正偶数也自然有无限多个，是谁也数不完的. 毫不夸张地说，任何一个人使用任何先进的计算工具，终生去数，也数不完自然数，甚至其子子孙孙都去数也是无济于事的. 惟其如此，人作为具有高智慧的动物，绝不会去做这种徒劳的工作，而是充分利用人类所具有的猜想与推理分析能力，去完成对无限集合的研究工作. 下面便是集合论创始人，德国数学家康托的比较方法.

在自然数与正偶数之间建立一一对应关系

$$n \leftrightarrow 2n \ (n=1,2,\cdots),$$

便知每一个自然数都对应惟一一个正偶数,反之,每一个正偶数都对应惟一一个自然数,因此,两类数的个数是同样多的.

同理,自然数的个数与正奇数的个数也是同样多的. 不仅如此,自然数与3的倍数的个数,与4的倍数的个数,也是同样多的. 当然,正偶数与正奇数,自然数与素数的个数也是同样多的. 除去最后一类(自然数与素数)外,你能给出它们其间的一一对应关系吗?

让我们再进一步. 请看图1-1,这是一个直角三角形. 众所周知,斜边 AB 比其他两个直角边都要长. 以直角边 AC 为例,即 AB 比 AC 长. 又这两条线段(AB 与 AC)都包含有无限多个点. 那么这两条线段谁包含的点的个数多? 你一定认为是线段 AB 所含的点个数多. 是这样吗? 我们来比较一下. 在 AC 上任取一点 a,过点 a 作平行于 BC 的线段 ab 交 AB 于点 b,则 a 与 b 形成一一对应. 可知,AC 上任一点 a 都与 AB 上任一点 b 形成一一对应,取点不同,对应点也不同. 于是,你有一个点,我便有一个点与你对应,一个也不重复,你怎么说你包含的点比我的多呢?

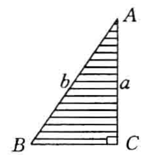

图1-1

上面所举的两个例子说明了一个事实,即在有限前提下成立的结论,在无限条件下一般不再成立而往往会发生质的变化. 与大家所熟知的量变与质变的关系类似,量变的无限积累必将导致质变. 在生产与生活中,在科学技术领域,这类问题比比皆是,切不可轻易下结论.

2. 建筑师的杰作——圆圆的大烟囱

谁都见过圆台型的大烟囱. 远远望去,那没有挂水泥面的大烟囱真的是非常圆滑. 可是,当你走近它时,就会发现它(的横截面)

并非圆形，而是一个地地道道的圆的内接正多边形！你可曾想过，为什么一个圆内接正多边形离远一些看竟呈现圆形，而且离它越远，看它就越圆？你会想到什么？是建筑师在搞鬼还是我们的眼睛出了问题？别委屈了建筑师们，这恰恰是建筑师们的杰作，是建筑师们有意或无意中利用了数学的极限原理的一个杰作.

我们作一点直观的分析.当我们在大烟囱跟前时，可以看见它是一个以砖的长度为边长的圆内接正多边形. 当我们离开它一定距离时，每一个边长看起来都变小了. 离开的距离越远，看其边长就越小. 因此当我们离它很远时，看其边长就变成了一点，于是产生了“大烟囱是圆滑的”这一结论. 道理就是这样简单.

然而恰恰是利用了这个简单的道理，数学家们开始了卓有成效的工作，取得了世人瞩目的伟大成就.下面仅就世界上第一个发明和使用极限方法的我国古代数学家刘徽所做的工作，介绍极限的思想和方法，为后面的微积分概念的给出做必要的准备工作.

刘徽(三国时代魏国人)在解决圆的面积计算问题时，创造了千古流芳的“割圆术”(无穷小分割法). 以下参照其原理说明一下圆的周长的计算原理.

设圆的半径为 r. 先作圆的内接正六边形(如图 1-2)，其周长 l_1 作为圆周长 l 的一个近似值，易算得

$$l_1=6AB=6\times 2\times r\sin\frac{\pi}{6}.$$

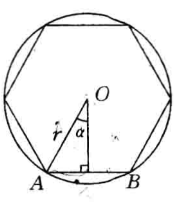

图 1-2

由于这个近似值误差太大，于是在这个基础上再作圆内接正 12 边形，其周长记为 l_2，可得

$$l_2=12\times 2\times r\sin\frac{\pi}{12}.$$

以 l_2 代替 l 也有误差，但比较以 l_1 代替 l 来说，误差小多了. 于是想到再在 l_2 基础上作圆内接正 24 边形、正 48 边形……以它们的

周长近似代替 l，误差便随着边数的增加逐渐缩小下去．一般地，圆内接正 n 边形的周长应为

$$l_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}\ (n=3,4,\cdots).$$

这就构成了一个与边数 n 有关的数列 $l_3,l_4,\cdots,l_n,\cdots$，当 n 逐渐增大时，l_n 就逐渐接近于圆周长 l．当然，这个数列的项数是无限多．

但是，只要 n 给定，不论它多么大，l_n 毕竟是正 n 边形的周长，而不是圆周长 l．那么为了获得 l 的精确值，就必须令边数 n 无限地增大下去，最终可得 l．对此，刘徽有一段非常精彩的论述："割之弥细，失之弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．"这段话翻译成现在的数学语言就是：内接正 n 边形边数 n 取得越大，l_n 与 l 的误差越小；令 n 无穷无尽地增大下去，则 l_n 最终结果必为 l，而不再有任何误差．

这里的"割之又割，以至于不可割"又一次向我们展示了无限情形下，一个人的具体操作之不可能性．于是人们使用定量分析的方法，在推得正 n 边形周长 l_n 的表达式之后，便开始研究表达式 l_n 的最终结果的定义和计算问题．这就是我们下面要定义的"极限"概念．以符号 $\lim\limits_{n\to\infty}2nr\sin\frac{\pi}{n}$ 表示 l_n 的最终结果，其中 lim 是英文 limit（极限）的缩写，而 $n\to\infty$ 表示令 n 无限增大这个具体过程．于是应有

$$l=\lim_{n\to\infty}2nr\sin\frac{\pi}{n}.$$

读作：当 n 趋于无穷时，数列 $l_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$ 以 l 为极限值．

概念有了，剩下的问题便是如何计算这个极限．后面我们将给出有关的一些概念与计算方法，并证明上述极限值确为 $l=2\pi r$．

3．日截其半还剩多少

中国古代的数学典故中，关于极限思想的还有很多，其中一个就是："一尺之棰，日截其半，万世不竭．"用现在的语言解释就是：

一尺长的小木棍，第一天截取一半，第二天截取剩下一半的一半，……如此下去，永远取之不尽，用之不竭. 翻译成现在的数学语言就是：原长为1（尺），第一天截取$\frac{1}{2}$，第二天截取$\frac{1}{2^2}$$\left(即\frac{1}{2}的\frac{1}{2}\right)$，……第$n$天截取$\frac{1}{2^n}$. 如果研究剩余长度问题，就形成一个剩余长度数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots.$$

这又是一个含有无穷多项的数列. 若问这个小棍最终剩下多少，就相当于问数列的极限是多少. 为求其极限，可写为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. "万世不竭"如何理解？即"人不能具体为之"的意思.

如果说上一个问题中的极限不易求出的话，那么这个极限容易推想出其结果应为0. 这个结果从数学严密性角度可给以严格证明，但我们这里不做此工作.

注 ① 可以对本题加以推广. 比如：一尺之棰，日截其三分之一，是否万世不竭？其极限又如何？这里给出对应的数列为

$$1,\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{2}{3}\right)^4,\cdots,\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\cdots.$$

其极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0.$$

我们看到，同一个问题的对应表示形式完全不同，但其极限值是相同的. 可以一般性证明下述极限结果，即

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0\ (|q|<1).$$

请大家记住这个结果.

② 从本例还可看出，一个有限长度可以被无限地分割下去. 有限与无限在这里被巧妙地联系在一起. 实际上，这种有限与无限的联系到处存在. 粗略地计算人的寿命，以年为单位足以. 然而在年轻的父母眼中，对亲生儿女的关注恐怕论小时都嫌长. 这也难怪，因为孩子的每一小时实际上是由无限多个

瞬间构成的，而每一个瞬间孩子都是有变化的.

这样一个事实不容怀疑：每个有限的时间段实际上都是无限多个瞬间构成的；每段有限长的线段也是由无限多个点构成的，不论其长短. 因此，如果有一个动点 x 在数轴上从任一点移动到另一点，则不论这两点距离多么短，动点 x 实际上都经历了无限多个点. 那么从现在起，我们的头脑中要绷紧两根弦：第一是无限的思想，第二是任何事情都处在时时刻刻的变化当中. 其实，这两根弦是经常联系在一起的.

4. 一些求极限的例子

有了上面极限思想及方法的铺垫，下面来看几个具体的求极限的例子.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

解 先求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$. 这个数列全写出为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots.$$

易见其极限为 0. 如果从所给极限式子分析，也能得到结果：无论分母怎么变大，分子都始终为 1，故终将达到 0. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=0,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k>0).$$

题中第二式形式上是将 n 换为 x，但这里的 x 是与 n 有本质区别的. 我们称 x 是"连续变量"，而称 n 是"离散型变量". 这是因为在 $n\to\infty$ 过程中，n 是跳跃式取 1，2，…，而在 $x\to\infty$ 的过程中，x 是连续地取遍这些自然数及其间的所有实数. 从这个意义上说，后一极限式更有一般性，我们称之为"函数极限"，而前一极限式仅是它的一个特殊情况——数列极限，$x=n$.

应该特别指出，后面的研究以这类函数极限为主要工具，务请