谢明文 主编

经济类院校基础课程本科系列教材

微积分教程

WEIJIFEN
JIAOCHENG

[第四版]

西南财经大学出版社

谢明文 主编●白淑敏 副主编

经济类院校基础课程本科系列教材

微积分教程

WEIJIFEN
JIAOCHENG

[第四版]

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程/谢明文主编 .—4 版 .—成都:西南财经大学出版社,2005.8
ISBN 7-81055-948-6

Ⅰ.微... Ⅱ.谢... Ⅲ.微积分—高等学校—教材
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 043434 号

微积分教程(第四版)

谢明文 主编

特约编辑:谢明志
责任编辑:曾召友
封面设计:大 涛

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址:	http://press.swufe.edu.cn
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电 话:	028-87353785 87352368
印 刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印 张:	23.25
字 数:	390 千字
版 次:	2005 年 8 月第 4 版
印 次:	2005 年 8 月第 1 次印刷
印 数:	1—5000 册
书 号:	ISBN 7-81055-948-6/O·2
定 价:	33.80 元

第四版前言

这次修改,主要对本书第三版中所存在的不便于教师分析、讲解和学生阅读、理解的地方进行了重写;并对本书第三版中所忽视的一些问题进行了增补．主要体现在:

(1)在第一章中,增加了左、右邻域的概念并对函数的定义进行了适当的修改．

(2)在第二章中,对于编排顺序做了重大调整．把无穷小(大)量的概念提前,而把曲线渐近线的概念纳入了§4.6之中,并对无穷小(大)量的概念做了重新定义;对于极限的第二个重要公式,给出了一种新的简明证法;对于函数间断点的概念,补充了在区间端点间断的定义．

(3)在第四章中,对"泰勒中值定理"和导数的经济应用中的"弹性"部分做了重新改写,经改写后的内容,显得脉络清晰、言简意赅,降低了读者阅读和理解的难度．

(4)在第五章中,对不定积分计算中的凑微分法和换元积分法做了重新改写,旨在使思路更加清晰、内涵更加深远．

(5)在第六章中,对定积分的换元积分法,增加了一个前言,旨在解决定理条件的由来、帮助读者理解换元的实值和换元的方法．在广义积分中,增加了一个例6,旨在强调定义式中的定积分是计算结果的一个"整体",在用拆项积分和分部积分计算广义积分时,通常都不能把这个"整体"的极限,分写成几个极限．

(6)在第八章中,对于"偏导数的经济应用"和"多元复合函数的微分法",也进行了重新改写．

(7)在十一章中,对一、二阶差分方程求特解问题作了重大修改,旨在消灭存于差方程中的"公式成堆"现象,以形成本书的最大特色．

本次修改工作,由谢明文同志执笔,并在征求西南财经大学经济数学系向开理、杜之韩、李绍文、孙云龙、王建忠、尹正、陈小平、刘青、余喜生、邓汝良、黎伟等同志意见的基础上,最后由谢明文、白淑敏定稿．在此,我们谨向以上同志和使用本书的其他同仁表示深切的谢意．

尽管如此,本书的缺点错误仍然难免．诚请广大读者和授课教师,来电、来函,批评、指正．

编者

2005年8月于成都

第三版前言

自2002年7月本书问世以后,经西南财经大学经济数学系全体师生两年来的实践,普遍认为:本书不仅成功突出了"本科教学"的宗旨,而且真正体现了"兼顾考研"的精神;不仅突出了作者的创新意识,而且也呈现了教学经验.不仅深受广大读者的青睐,而且也颇得许多同行的嘉许.总而言之,它不失为一本好的教科书.

根据广大读者的要求和使用教师的建议,我们决定:在征求广大学生意见和听取广大任课教师建议的基础上,对《微积分教程》(修订本)进行了一次认真修改.

这次修改,我们主要做了以下两项工作:

(1)在第七章《无穷级数》中,增加了判断正项级数敛散性的"拉阿贝判别法"、"高斯判别法"与"和函数在级数收敛区间端点处的连续性"以及"有关级数重排"等阅读内容;在第十章《微分方程》中,增加了"常数变易法"求特解等内容.

(2)对于原修订本中存在的不尽如人意之处,做了一些删节和增补(如正文的修改、例题的取舍、习题的搭配和答案的更正等).

上次和本次的修改工作,均由谢明文执笔并由谢明文、白淑敏二同志共同讨论、定稿.

本书是作者对数学教学改革的一次尝试,也是作者在教学改革中的一项成果.但是,这一成果的取得,与其说是作者努力的结果,不如说是西南财经大学经济数学系教师集体智慧的结晶.如果没有校、系领导的全力支持,没有经济数学系全体教师的试用和建议,没有许多学者的热情关心和帮助,那么就不可能有今天摆在读者面前的《微积分教程》(第三版).

第三版定稿以后,涪陵师范学院原数学系主任、涪陵师范学院院长简大权同志和西南财经大学经济数学系孙疆明、刘明杰等同志,详细审读了新版原稿,并提出了一些宝贵的建议,为本书增光不少.

鉴此,我们编写组的同志,特向校、系有关领导、经济数学全体教师和有关的专家学者致以诚挚的谢意.

编者

2004年7月于成都

再版前言

本书自2002年7月问世以后,在西南财经大学2002级本科各专业使用了一年.

为了使本书更加有利于教师讲授和学生自学,我们在广泛征求读者意见、虚心吸纳同行建议的基础上,对本书进行了一次修改.

为了便于教学与自学,我们对第一版中的某些基本概念与理论进行了修改或重写,使之变得更加清晰、易懂;为了便于提高读者分析问题和解决问题的能力,我们除了对第一版中的有些例题和习题作了一定的调整或增减外,还对个别例题和新增例题做了更具启发性的陈述,这样不仅使例题、习题和内容更加匹配,可以降低学生学习的难度,而且也可提高读者的解题能力;为了适应经济分析和经济建模的需要,我们增加了多元函数的偏导数在经济分析中的应用和利用实验数据寻求变量关系的数据拟合方法——最小二乘法等内容,有意对学生的实际应用能力进行培养.

西南财经大学经济数学系的领导同志,对这次修改工作十分关心,召集全校使用该教材的老师,开了一个成功的座谈会,通报了第一版的使用情况,提出了对第一版修改的意见和建议.这一举动,给了作者巨大的鼓舞和无穷的力量.鉴此,我们特向经济数学系的领导和使用第一版的全体老师致以深切的谢意.

此外,本书还有一些带“※”号的内容.这些内容,有的是提高读者应用能力的基础知识,有的是考研的基本题型,有的是拓广读者视野的典型范例.

鉴此,我们建议:在使用本书时,若学时允许,则※号内容可以全讲;若学时有限,则除§9.3二重积分的换元法外,均可略去不讲,而把它们作为读者的自学内容.

最后,我们诚挚地希望使用本书的师生,对本书的不足之处,提出批评和指正.

编者

2003年7月于成都

前　言

一提起笔来，就忧心忡忡，不知该说些什么为好．说好吧，怕授以“王婆卖瓜”之柄；说不好吧，又怕招来“无胆推己”之嫌．不得已，只好自取中庸，只讲我们成书的初衷，至于此书是否尚有点新意，还是让读者自己去体味吧．

本书是根据国家教育部颁布的《经济数学基础》教学大纲，参照国家考试中心硕士研究生入学《数学考试大纲》，在西南财经大学教务处和经济数学系领导的支持下，为财经院校经济类、管理类各专业本科学生编写的一本教科书．我们本着“以本(科)为主，兼顾考研”的精神，对每节的例题与习题进行了认真选择，保留了经典的传统题，增添了基本的新近考研题，由浅入深、层次分明，题量充足、侧重基础；我们本着经济数学教材，应当努力使数学知识与经济理论相结合的愿望，尽力把经济学中的一些最常用、最基本的定量分析数学方法反映在自己的作品之中；我们本着“集他人之长，为我所用”的原则，力图将他人的长处与自己的经验融为一体，为本书增加一些亮点和新意．为提高本科教学的质量，打好学生的考研基础，本书不仅有一些※号内容，而且也有一些※号例题和习题，以供师生选用；倘若学时有限，跳过※号内容，亦不影响本书的体系．

本书共分十一章．第一、四章由崔红卫执笔，第二、五、十章由涂晓青执笔，第三、十一章由白淑敏执笔，第六、八、九章由谢明文执笔，第七章由谢建民执笔．

本书正、副主编分别由谢明文、白淑敏担任．主编谢明文同志负责全书的统纂、修改和定稿工作，副主编白淑敏同志负责组织协调工作．

本书定稿以后，电子科技大学应用数学系谢云荪教授审阅了全书并提出了不少宝贵的建议，使编者受益非浅，为本书增辉不少．鉴此，笔者在此深致谢意．

在本书的定稿过程中，西南财经大学经济数学系副主任孙疆明副教授和杜之韩副教授以及陈小平讲师认真地审阅了本书的部分章节，也提出了一些建设性的建议；西南财经大学出版社、教务处和经济数学系的领导，对本书的问世一直十分关注，并给予了有力的支持，在此，也一并表示谢意．

由于作者水平有限，疏漏错误在所难免，恳请读者、同仁批评指正，以慰我等至诚之念．

编者

2002 年 7 月于成都

目　录

第一章　函数

函数的内涵极广．微积分这门学科，主要研究定义于实数集上的函数．鉴于函数的概念及其性质中学已经学过，本章将对它们予以巩固和加深．

§1.1　函数的概念

为了研究问题方便起见，首先来介绍微积分中经常需要用到的几个基本概念．

一、邻域的概念

在微积分中，通常用到的集合是实数集 R 的一些子集．我们在初等数学中已学过的区间(或集合)，也都是 R 的子集．由于在今后的讨论中，有时需要考虑在某点附近的所有点构成的集合，为此我们引入邻域的概念．

1．**邻域**．设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则称数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，并称点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径．

因为 $|x-a| < \delta$ 等价于 $a-\delta < x < a+\delta$，所以

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

由此可见，$U(a,\delta)$ 实质上就是以点 a 为中心，以 δ 为半径，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，如图 1－1 所示．

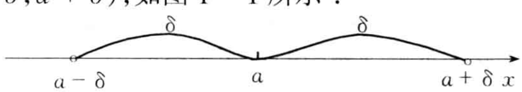

图 1－1

点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合，称为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(a,\delta) &= \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} \\ &= (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).\end{aligned}$$

例如，点 $x=1$ 的 $\frac{1}{3}$ 邻域为 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$；点 $x=10$ 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻域为 $(9.5,10) \cup (10,10.5)$．

2．**左、右邻域**．若 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则称数集

$$\{x \mid a \leq x < a+\delta\} = [a, a+\delta) \triangleq U_{+}(a,\delta)$$①

与 $$\{x \mid a < x < a+\delta\} = (a, a+\delta) \triangleq \mathring{U}_{+}(a,\delta)$$

分别为点 a 的 δ 有心右邻域与去心右邻域;而称数集

$$\{x \mid a-\delta < x \leq a\} = (a-\delta, a] \triangleq U_{-}(a,\delta)$$

与 $$\{x \mid a-\delta < x < a\} = (a-\delta, a) \triangleq \mathring{U}_{-}(a,\delta)$$

分别为点 a 的 δ 有心左邻域与去心左邻域．

二、函数的概念

在研究实际问题的过程中,通常都要涉及几个变量．这些变量,不仅是相互联系的、而且还是遵循一定变化规律联系的．现在,我们仅就两个变量的情形加以讨论(更多个变量的情况,我们将在第八章讨论).

例 1　设商店某商品的销售单价为 5(元),则销售量 x 与销售收入 R(元)的关系为

$$R = 5x, \qquad x \in \{0,1,2,3,\cdots\}.$$

显然,当销售量 x 在自然数集 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ 中任取一个数值时,均可按上式所示的规则确定销售收入 R 的一个值与之对应．

例 2　某洗衣机厂记录了某种型号洗衣机的销售情况,并将销售量(单位:台)与销售价格(单位:元／台)列表如下

表 1 - 1

销售价格 x(元／台)	500	800	1000	1500
销售量 y(台)	125000	105000	85000	65000

显然,对于任何销售价格 $x \in \{500,800,1000,1500\}$,均可按此表所示的对应规则惟一地确定一个销售量 y 的值与之相对应．

例 3　图 1 - 2 是某地气象站的自动记录仪记录的该地某日气温变化的一条曲线．显然,对于任意一个时间 $t_0 \in [0,24]$,按照图 1 - 2 中箭头所示的规则,就可以有一个惟一确定的温度 T 的值 T_0 与之对应．

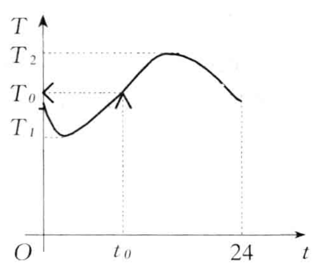

图 1 - 2

以上三个例子的一个共同特点是:在某一过程中有两个变量,而这两个变量不仅都有自己的取值范围,而且对于一个变量在其取值范围内的任意一个取值,均可按照一个确定的对应规则(如公式、表、图等)得到另一个变量的一个对应值．

摈弃以上各变量的具体意义,我们就可抽象出下面的

① 符号"$\triangleq$"表示"定义等于"或"记为",下同．

定义 1.1 设 D 是一个非空数集．若对于 D 中的每一个 x，按照某一确定的对应规定 f，都有惟一的一个实数 y 与之对应，则称 f 为定义于D 上的一个函数；实数 y，称为函数 f 在x 处的值；习惯上，也称 y 为x 的函数，并记为

$$y = f(x), x \in D \tag{1-1}$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量；非空集合 D 称为函数f 的定义域，通常记为$D(f)$；函数 f 的全体函数值所构成的集合，称为函数 f 的值域，通常记为 $Z(f)$，即

$$Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

例如，在例 1 中，$D(f) = \{0,1,2,\cdots\cdots\}$，$Z(f) = \{0,5,10,\cdots\cdots\}$；在例 2 中，$D(f) = \{500,800,\cdots,1500\}$，$Z(f) = \{125000,105000,\cdots,65000\}$；在例 3 中，$D(f) = [0,24]$，$Z(f) = [T_1,T_2]$.

若 $x_0 \in D(f)$，则称 f 在点x_0 处有定义或有意义．若 $x_0 \notin D(f)$，则称 f 在点x_0 处无定义或无意义．

当 $x = x_0$ 时，函数 f 的值为y_0，记为 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0} = y_0$.

若 y 是x 的函数，有时也可记为 $y = y(x)$.

由于函数的定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 被确定后，其值域就随之而定，因此定义域和对应规则就成了函数的两个要素．

若两个函数的定义域和对应规则都相同，则称这两个函数相同．例如，函数 $y = \pi x^2$ 与 $y = \pi z^2$，它们的定义域都是 $D = (-\infty, +\infty)$，且其对应规则都是 π 乘以“自变量的平方”．因此，尽管表示变量的字母不同，但它们仍是两个相同的函数．可是，对于函数 $y = \dfrac{1}{x+1}$ 与 $y = \dfrac{x}{x(x+1)}$，由于它们的定义域不同，所以它们是两个不同的函数．

例 4 下列函数与函数 $y = x$ 是否相同？为什么？

(1) $y = \sqrt{x^2}$；　　(2) $y = \sqrt[3]{x^3}$.

解 (1) $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 和 $y = x$ 有相同的定义域R(实数集)，但当 $x < 0$时，两个函数的对应规则不同，所以 $y = x$ 与$y = \sqrt{x^2}$ 是两个不同的函数．

(2) 因为函数 $y = x$ 和$y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域都是实数集 R，且 $\forall x \in R$[①] 都有 $y = \sqrt[3]{x^3} = x$，即两个函数具有相同的对应关系，所以 $y = x$ 和 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 是相同的函数．

由定义 1.1 可知，两个变量之间的对应规则是确定函数关系的要素之一，至于对应规则以什么方式给出，在函数定义中并未加以限制．在通常情况下，表示变量之间对应规则的方法有公式法(或解析法)、图示法和表格

---

① 符号“$\forall$”表示“对于一切”或“对于任意的”，下同．

法三种．因此，(1-1)式应泛指函数 f 的任何一种表示形式(公式、图示及表格)之一．

在用解析法表示函数时，有些函数在其定义域的不同部分，其函数关系均可用一个式子表示(见下面例5)；有些函数在其定义域的不同部分，其函数关系则需用几个式子才能表示，这种函数我们称之为分段函数．例如，

$$f(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0,\\ x^2, & 当\ x<0\end{cases}$$

就是一个定义在 $D(f)=(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数，$x\geqslant 0$ 与 $x<0$ 称为该函数的子定义域．在区间 $(-\infty,0)$ 上，与 x 对应的函数关系为 $f(x)=x^2$；在区间 $[0,+\infty)$ 上，与 x 对应的函数关系为 $f(x)=x$；$x=0$ 是这两个子定义域的分界点，亦称分段点，其函数图形如图 1-3 所示．

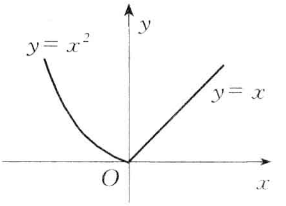

图 1-3

分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集．

三、函数定义域的求法

根据函数的定义，若函数 $y=f(x)$ 由公式给出，但又没有给出自变量 x 的取值范围，则其定义域是使函数有意义的自变量的取值范围．当函数赋以实际意义时，函数的定义域就要根据问题的实际意义来确定，如例2中的定义域 $D(f)$ 为自然数；例3中的定义域 $D(f)=[0,24]$ 等．

如果一个函数是由有限个常用函数经四则运算而得到的，那么其定义域就是这有限个函数定义域的交集．

例5　求函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(9-3x)$ 的定义域．

解　$\because$　y 的表达式由两部分组成，所以其定义域应是各项定义域的交集．为此，x 必须满足

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ 9-3x>0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\geqslant 2\ 或\ x\leqslant 1,\\ x<3.\end{cases}$$

故所给函数的定义域 $D(f)=(-\infty,1]\cup[2,3)$.

例6　已知 $f(3x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-1}}$，求函数 $f(x)$ 及其定义域．

解　令 $3x=t$，则 $x=\dfrac{t}{3}$ 且 $f(t)=\dfrac{15}{\sqrt{t^2-9}}$.

于是
$$f(x)=\frac{15}{\sqrt{x^2-9}}.$$

$\because$　要使 $f(x)$ 有意义，x 必须满足 $x^2-9>0$，即

$$x>3\ 或\ x<-3$$

$\therefore$　函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

例 7 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & 当\ x\leqslant 1,\\ x^2, & 当\ x>1.\end{cases}$

(1) 求其定义域并作函数图形；

(2) 求函数值 $f(-\frac{1}{2}), f(2), f(1), f(1-a)$.

解 (1) $\because$ $f(x)$ 为分段函数

$\therefore$ $D(f)=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

按函数在各子定义域上的相应表达式分段作图，则得该函数的图形(见图 1 - 4).

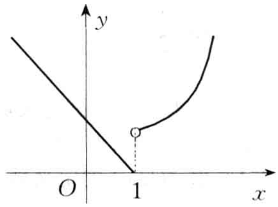

图 1 - 4

(2) $\because$ $-\frac{1}{2}\in(-\infty,1)$, $2\in(1,+\infty)$, $1\in(-\infty,1]$

$\therefore$ $f(-\frac{1}{2})=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$, $f(2)=2^2=4$,

$f(1)=1-1=0$.

又 当 $1-a\leqslant 1$ 即 $a\geqslant 0$ 时，由 $1-a\in(-\infty,1]$，得

$$f(1-a)=1-(1-a)=a;$$

当 $1-a>1$ 即 $a<0$ 时，由 $1-a\in(1,+\infty)$，得

$$f(1-a)=(1-a)^2.$$

于是 $$f(1-a)=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ (1-a)^2, & a<0.\end{cases}$$

从此例看出：在求分段函数的函数值时，首先应该考虑自变量取值所在的子定义域．

习题 1 - 1

1. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$ 与 $f(x)=\tan(\arctan x)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x^3, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$； (4) $y=f(x)$ 与 $s=f(t)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$； (2) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{x-1}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+x}$;　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \sqrt{x-2}, & 2<x.\end{cases}$

3. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$,求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f(2x)+1$, $f(\dfrac{1}{x})$, $f(2+h)$, $f(x+h)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,其中 $h\neq 0,-4$.

4. 求下列函数的值:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ 2x+3, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(0)$、$f(1+a)$、$f(-1.5)$.

(2) 设 $f(x)=\sin x$,求 $f(-\arcsin\dfrac{1}{2})$.

5. 求函数的定义域:

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4,4]$,求 $f(x^2)$ 的定义域 .

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3a](a>0)$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 .

(3) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求 $f(\lg x)$ 的定义域 .

(4) 若 $f(1-x)$ 的定义域是 $[-1,1]$,求 $f(x)$ 的定义域 .

6. 设函数 $f(x)$ 对一切正数都满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$,求证:

(1) $f(1)=0$;　(2) $f(\dfrac{1}{x})=-f(x)$;　(3) $f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

7. 当 k 为何值时 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

8. 求函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域 .

§1.2　函数的几何性质

任何一个函数,它都具有自身的种种性质 . 本节主要讨论与函数的几何图形有关的单调性、有界性、奇偶性和周期性 .

一、函数的单调性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 在某集合 D 上有定义,x_1、x_2 是 D 上的任意两点,且 $x_1<x_2$.

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少).

(2) 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调不减(或单调不增).

定义 1.2 中的集合 D,可以是一个任意区间,也可以是一个离散数集 . 如图 1 - 5(a) 与(b) 所示的函数,就是一个在给定区间上分别单调增加与单调减少的函数 .

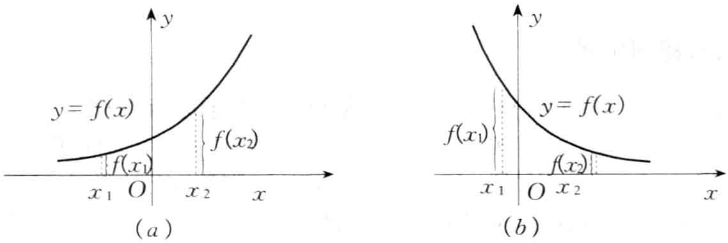

图 1－5

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数．使函数单调的区间，称为单调区间．

由定义 1.2 知，$f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$上为单调增加函数．同理，$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$上是单调减少函数．但是，$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数；函数 $y=[x]$①在$(-\infty,+\infty)$内是单调不减函数，而不是单调增加函数．

二、函数的有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义．

(1) 若存在一个常数 m，使得 $\forall x\in D$，均有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在数集 D 上有下界且 m 就是 $f(x)$ 的一个下界．

(2) 若存在一个常数 M，使得 $\forall x\in D$，均有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在数集 D 上有上界且 M 就是 $f(x)$ 的一个上界．

(3) 若存在常数 m 与 M，使得 $\forall x\in D$，均有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有界．

这个定义表明：$f(x)$ 在数集 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在数集 D 上既有上界又有下界．

若记 $\max\{|m|,|M|\}=K$，则可得到定义 1.3(3) 的一个等价定义：

若存在一个正数 K，使得 $\forall x\in D$，均有

$$|f(x)|\leqslant K$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有界．

例如，$y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上就是有界的函数．因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\cos x|\leqslant 1$．

然而，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$上就无界．因为 $\forall M>0$，总有一个 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$，即 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无上界，从而 $f(x)$ 无界．

---

① $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．