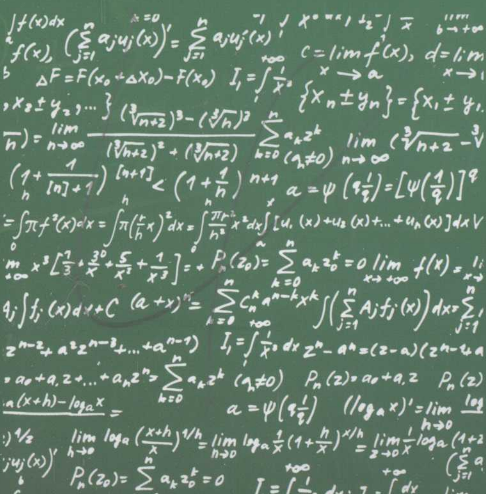
高等数学同步辅导

（上册）

赵翠萍 徐利艳 主编



南開大學出版社

高等数学同步辅导

（上册）

赵翠萍　徐利艳　主编

南开大学出版社
天　津

015364-3/1

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导. 上册 / 赵翠萍,徐利艳主编. 一天津:南开大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-310-04191-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵…②徐… Ⅲ.①高等数学一高等学校一教学参考资料 Ⅳ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 104113 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

210×148 毫米 32 开本 10.875 印张 313 千字

定价:21.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书是深入学习高等数学的辅导书，分上、下两册，上册共七章，包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数. 各章每一节开始都有重要概念、定理及公式，概括本节的知识内容，然后是答疑解惑、典型题型及解题分析、考研真题解析，每章最后给出自测题，供读者练习.

本书对学习高等数学的同学是一本很好的同步辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及高等数学任课教师的教学参考书.

前 言

高等数学是理工科、农科、经济管理等专业最主要的基础理论课之一，掌握好高等数学的基本知识、基本理论、基本运算和分析方法，不仅对同学们学好后继课程是必要的，而且对同学们今后的提高和发展都有深远的影响.

本书是通过对每一节疑难问题的解答、典型题型的分析、考研真题的解析等方式提供辅导的，内容按节编写，每节结构如下：

重要概念、定理及公式 对本节必须掌握的概念、性质、定理和公式进行了归纳，供计算、证明时查阅.

答疑解惑 剖析教与学中的难点问题.内容及方法涉及基本概念、基本理论的深入理解、解题思路的启发诱导、解题方法中常见错误的剖析等.

典型题型及解题分析 对本节的典型题型进行分类解析，并对每种题型的解题思路(步骤)、技巧进行了归纳总结.

考研真题解析 精选与本节内容有关的考研真题，试题涵盖了最新至2013年的各类典型题型，并作了详尽解答，供考研的学生使用.

自测题 每章最后配置了适量难易程度适中的练习题及参考答案，供读者自测对本章内容掌握的程度.

本书在编写过程中注重数学思维与数学方法的论述，以求思想观点、方法上的融会贯通，并对每种题型的解题思路(步骤)、技巧进行了归纳总结，有些题给出了多种解法，对容易出错的地方还作了详尽的注解，并以“注”的形式加以强调，这是本书的特色.

本书是编者在深入研究教学大纲和研究生数学考试大纲之后撰写而成的，它不仅是广大学生学习数学的指导书、教师教学的参考书，而且也是报考硕士研究生的一本广度与深度较为合适的复习用书，适合理工、农林、经济类学生使用.

本书分上、下两册出版，上册内容包括函数的极限与连续、导数与

微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数；下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程，最后一章介绍了微积分在经济中的应用.上册第一章由孙丽洁编写，第二章由刘琦编写，第三、四、五章由赵翠萍编写，第六、七章由徐利艳编写，上册由赵翠萍统稿；下册第八、九、十一、十三章由马志宏编写，第十、十二章由穆志民编写，下册由马志宏统稿.上、下册各章都经过反复讨论、修改后定稿.

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了许多经典的例子和解题思路，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢.

限于编者水平，书中难免存在错误和不妥之处，欢迎广大读者提出批评和指正.

编　者

2013 年 1 月于天津农学院

目 录

第一章　函数的极限与连续

第一节　函　数

重要概念、定理及公式

一、函数的概念

1. 定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对于任意变量 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的实数值 $f(x)$ 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，D 为定义域.

函数值的全体 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数值域.

注：定义域与对应法则是函数的两个要素，它是判断两个函数是否相同的标准.

2. 分段函数

自变量在不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数，如

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x\geqslant 1 \\ x-1, x<1 \end{cases}\quad (x=1 \text{ 称为分段点}).$$

注：一般地，分段函数不是初等函数.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$，定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$，定义域为 D_2，则 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}$. 若 $D_1\cap W_2\neq\varnothing$，则称由 x 经过 u 到 y 的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

4. 反函数

设函数的定义域为 D_f，值域为 V_f. 对于任意 $y\in V_f$，有唯一确定的 $x\in D_f$ 满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就可以得到一个新的函数：$x=f^{-1}(y)$. 称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

注：(1)只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数.

(2)有些函数只有在定义区间上才存在反函数.

二、函数的有关计算及性质

1. 有界性

若存在正数 M，使函数 $f(x)$ 在区间 I 上，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数；否则，$f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M(不一定局限于正数)，使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界，并且任意一个大于 M 的数 N 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界；如果存在常数 m，使 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界，并且任意一个小于 m 的数 l 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个下界.

显然，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加(或严格单调减少)的函数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上为广义单调增加(或广义单调减少)的函数. 广义单调增加的函数，通常简称为单调增加的函数或非减函数；广义单调减少的函数则简称为单调减少的函数或非增函数.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$)，则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如，$f(x)=x^2$，$g(x)=x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数. 而 $F(x)=x$，$G(x)=x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，对任意的 $x\in D$ 都有 $(x+T)\in D$，使得 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，并把 T 称为 $f(x)$ 的周期. 应当指出的是，通常讲的"周期函数的周期"是指最小的正周期.

对三角函数而言，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

三、初等函数

1. 几类基本初等函数

(1)幂函数　$y=x^a$ $(a\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义.

(2)指数函数　$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

(3)对数函数　$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$

定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数. 通常把 $a=10$ 的对数函数称为常用对数函数，记作 $y=\lg x$.

在工程中，常以无理数 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底，并且记 $\mathrm{e}^x=\exp x$，$\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$，后者称为自然对数函数.

(4)三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$.

(5)反三角函数

$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 和 $y=\operatorname{arccot} x$ 等.

(6)常量函数为常数　$y=c$（c 为常数）

2. 初等函数

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，并用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

初等函数虽然是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到. 例如符号函数 $\mathrm{sgn}x$，取整函数 $y=[x]$，分段函数等，都是非初等函数.

在微积分运算中，常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究. 学会分析初等函数的结构是十分重要的.

3. 双曲函数

双曲正弦函数：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数：$\mathrm{th}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

答疑解惑

【问 1.1】函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$是否有界函数？是否单调函数？是否周期函数？是否偶函数？

【答】由于 $|f(x)|=|x||\sin x|e^{\cos x}$，其中 $|\sin x|>0$，$e^{\cos x}>0$，故由因子 $|x|$ 可断定 $f(x)$不是有界函数，也不可能是周期函数. 再由 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$ 又可断定 $f(x)$不是单调函数.

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由于

$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$，

所以 $f(x)$为偶函数.

典型题型及解题分析

一、有关定义域的求法

求函数定义域的原则：(1)分母不得为零；(2)对于$\sqrt{x}$，$x\geqslant0$；(3)对于 $\ln x$，$x>0$；(4)对于 $\arcsin x$，$\arccos x$，$-1\leqslant x\leqslant1$；(5)同时含有上述四项时，要求使各部分都成立的交集.

【例 1】求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；　　(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$.

【解】(1)当$\begin{cases}\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$时，函数有定义，即

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\Rightarrow(x-1)(x-4)\leqslant 0.$$

故得定义域为$[1,4]$.

(2)当$\sqrt{16-x^2}$与$\lg\sin x$同时有定义时，函数才有定义，所以

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\cdots).$$

求解联立不等式，得函数的定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

【例 2】设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$的定义域.

【解】因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，所以 $f[g(x)]=\mathrm{e}^{g^2(x)}$，而 $f[g(x)]=1-x$，即 $\mathrm{e}^{g^2(x)}=1-x$，故 $g^2(x)=\ln(1-x)$.

由于 $g(x)\geqslant 0$，可得 $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，因此当$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x\leqslant 0\\ x<1\end{cases}$，即 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)$有定义.

【例 3】设 $y=f(x)$的定义域为$[-1,1]$，$g(x)=1-\sin x$，求复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域.

【解】令 $t=g(x)$. 由题意知 $f(t)$的定义域为$[-1,1]$，即$-1\leqslant 1-\sin x\leqslant 1$.

解得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

所以函数 $y=f[g(x)]$的定义域为

$$[2k\pi,(2k+1)\pi],k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

注：(1)求一个复杂函数的定义域，通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合，然后考察每个初等函数的定义域，得到对应的不等式，

通过求解联立不等式，就可得到原函数的定义域.

(2)要熟记基本初等函数的定义域.

二、有关表达式的求解

【例 4】设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}, x>0$. 求 $f(x)$.

【解】因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{x-\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

令 $y=\frac{1}{x}$，故 $f(y)=\frac{-y}{1-\sqrt{y^2+1}}=\frac{1}{y}(1+\sqrt{y^2+1}) \quad (y>0)$,

即 $f(x)=\frac{1}{x}(1+\sqrt{x^2+1}) \quad (x>0)$.

【例 5】设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 都为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

【解】因为

$$af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}, \tag{1}$$

取 $x=1-t$，则 $t=1-x$，于是 $af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$，所以

$$af(1-x)+bf(x)=\frac{c}{1-x}. \tag{2}$$

联立(1)式和(2)式，解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-\frac{bc}{1-x}\right)$.

三、函数有界性的判别

解函数有界性问题，先对函数等式两边取绝对值，再适当运用不等式和放缩法处理.

【例 6】(选择题)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为(　　).

A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

C. 有界且 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$　　D. 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$

【解】$|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}$.

因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以 $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$.

故应选 C.

【例 7】指出下列两个函数是否有界：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$　$(a\leqslant x\leqslant 1$ 且 $a>0)$；　(2) $y=x\cos x$.

【解】(1) 由 $a\leqslant x\leqslant 1$ 且 $a>0$，有 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，故

$$1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}\quad\left(0<a<1\Leftarrow\frac{1}{a^2}>1\right).$$

即 $y=\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\in[a,1]$ 时有界. 显然 $\dfrac{1}{a^2}$ 是一个上界.

(2) $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$，其中 $[M]$ 表示不超过 M 的最大整数，则 $\cos x=-1$. 此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$.

由定义可得 $y=x\cos x$ 无界.

四、函数单调性判别

【例 8】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $x_1>0,x_2>0$. 证明：若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】不妨设 $x_2>x_1>0$，于是有 $\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$，故 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$.

已知 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降，所以 $\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$，

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2),$$

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2).$$

又因为 $x_2>x_1\geqslant 0$，所以 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

五、函数奇偶性判别

【例 9】（选择题）设 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 都成立，且 $f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 是（　　）.

A. 有界函数　　B. 单调函数

C. 周期函数　　D. 偶函数

【解】由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，用 $-y$ 代 y 得

$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y).$$

故 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$. 因 $f(x)\neq 0$，所以 $f(y)=f(-y)$. 即 $f(x)$ 是偶函数.

故应选 D.

【例 10】（选择题）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=x^3f(x^2)$ 为（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

【解】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x^2)$ 为偶函数. 令 $t(x)=x^3$，故 $t(x)$ 为奇函数. 所以 $F(x)=x^3f(x^2)$ 为奇函数.

故应选 A.

六、函数周期性求解

(1)若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(2)若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3)若 $f(x),g(x)$ 分别是以 T_1,T_2 $(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 最小公倍数为周期的函数.

【例 11】设对任意实数 x，有 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$. 求 $f(x)$ 的周期.

【解】$f\left[\dfrac{1}{2}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x).$$

由题设知 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$,即 $f(x)=f(x+1)$,所以 $f(x)$的周期为 1.

七、求复合函数

将两个或两个以上函数进行复合,通常有两种方法:

(1)代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法称为代入法.该方法适用于初等函数之间的复合.

(2)分析法:所谓分析法就是根据最外层函数定义的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法,该方法适用于初等函数与分段函数之间的复合.

【例 12】设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$,求 $f[f(x)]$,$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

【解】$f[f(x)]=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{1}{1-(1-x^2)^2}=\frac{1}{x^2(x^2-2)}.$$

【例 13】设 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))$,若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

【解】$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

比较上两式,由数学归纳法可证 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

【例 14】设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant0\end{cases}$,求 $f[g(x)]$.

【解】用解析法求解,$f[g(x)]=\begin{cases}e^{g(x)}, & g(x)<1\\ g(x), & g(x)\geqslant1\end{cases}$.