有限群表示论

南基洙　王　颖　编著

科 学 出 版 社

有限群表示论

南基洙　王　颖　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

在读者熟悉线性代数和抽象代数基本知识的基础之上，本书以尽可能简洁直观的形式,系统地介绍了近现代有限群表示论的基本研究对象和研究方法. 全书共 8 章，第 1 章表示的概念与预备知识 I；第 2 章有限群的表示空间；第 3 章特征标；第 4 章表示的诱导与限制；第 5 章不同基础域上的表示；第 6 章预备知识 II；第 7 章有限群模表示；第 8 章有限群局部表示.

本书可以作为高等学校数学专业和相关专业本科高年级学生和研究生的教材，也可以作为中学教师、高校教师和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

有限群表示论/南基洙，王颖编著. —北京：科学出版社，2014.3

ISBN 978-7-03-039989-2

I. ①有… II. ①南… ②王… III. ①有限群-群表示 IV. ① O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 041100 号

责任编辑：李 欣／责任校对：宋玲玲
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷 印张：17 3/4
字数：358 000

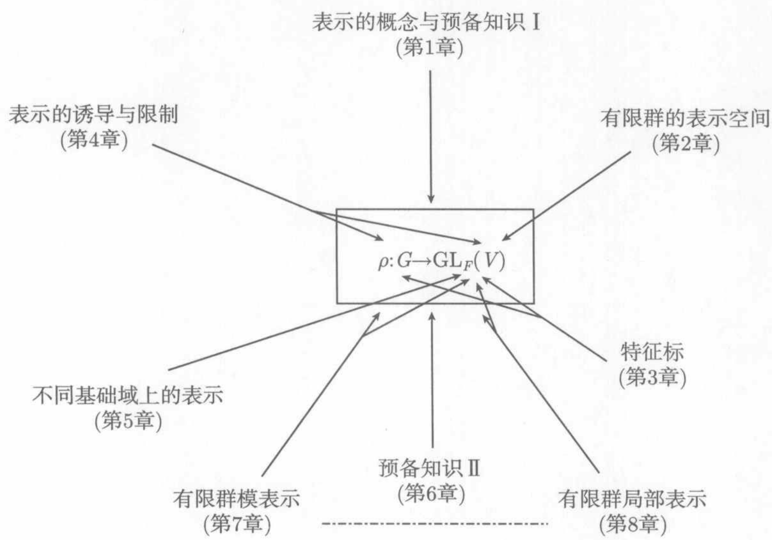
定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是为数学专业高年级本科生和研究生学习有限群表示论而写的. 我们将以尽可能初等、简洁和直观的形式, 介绍近现代有限群表示论的基本研究对象、采用的基本研究方法, 以及所要研究的基本性质与结构等.

下面图示表示的是本书各个章节选讲内容与主题 (有限群表示) 之间的简单关系.



在编写和整理本书的过程中, 我们参考了诸多文献. 在此, 我们向参考文献的著作者和出版社表示由衷的敬意! 另外, 我校基础数学专业的研究生赵辉芳、韦扬江、韩祥、曾玲莉以及参加听课的学生也指出了本书初稿中的许多谬误. 在此, 我们向他们表示感谢! 我们更要感谢吉林大学的杜现昆教授和我们的导师 —— 哈尔滨工业大学的游宏教授, 感谢他们提出的建议, 更感谢游宏教授多年来的悉心教导!

依据我们的教学实践, 64 学时左右即可讲授完本书的主要内容. 其中, 我们用 32 学时为本科生讲授了本书前 4 章和第 5.3 节的内容, 然后用 32 学时为研究生讲授了余下章节的内容.

本书的出版得到了大连理工大学教改基金的支持和资助. 受水平所限, 书中难免有许多不妥和谬误之处, 敬请读者指正.

南基洙　王　颖
jznan@163.com
大连理工大学　数学研究所
2013 年 10 月

目　录

第 1 章　表示的概念与预备知识 I

代数学研究的一个基本思想, 是通过比较, 例如映射、同态和同构等, 从一个对象的性质和结构探究另外一个对象的性质和结构等信息, 以利更有效地将所要研究的对象进行有实际意义的分类. 既然要进行比较, 那么一个很自然的前提, 就是要先选取一个合适的 —— 性质与结构等信息相对清楚的对象, 然后将所要考查的对象与这个合适的对象进行比较, 进而从这个合适对象的信息获取所要考查对象的性质与结构等有用的信息. 这种思想方法, 在有限群表示理论中的体现是非常深刻的.

自 100 多年前, Frobenius(1849—1917)、Burnside(1852—1927) 和 Schur(1875—1941) 等创立有限群的表示理论以来, 有限群的表示理论已经取得了长足的发展. 例如, Noether(1882—1935) 将模的概念和方法引入了表示论, Brauer(1901—1977) 则建立了特征数为 0 域上表示和特征数为 p 域上表示之间的关系, 为有限群模表示理论奠定了基础, Feit 和 Thompson 则以有限群表示论为工具解决了 Burnside 猜想等. 20 世纪 60 年代, Green 建立的 Green 对应关系，有力地促进了有限群模表示理论的发展. 在 20 世纪 70 年代以后, Alperin, Broue 和 Puig 等则创立了有限群的局部表示理论, 推动有限群的模表示理论进入了现代模表示理论时代.

现在, 有限群表示论的影响和应用范围, 已经远远不再局限于数学领域的各分支学科, 它已经在物理学和化学等领域得到了广泛而卓有成效的使用. 可以毫不夸张地说, 有限群表示理论已经成为我们进一步学习、研究数学和其他诸多自然科学领域知识的必备数学理论基础之一.

1.1　表示的概念与问题

为了便于清晰地表述什么是有限群表示, 我们有必要先规范一些后面经常要使用的概念和符号.

令 G 是一个有限群, 如果没有特别的说明, 以后所说的群均指的是有限群. 令 F 是一个域, V 是域 F 上的有限维向量空间 (线性空间), 那么易知

$$\mathrm{GL}_F(V) = \{\varphi | \varphi : V \to V, \text{可逆线性变换}\}$$

构成一个群. 一般地, 我们将其称为向量空间 V 上的一般线性群.

进一步, 如果假定 $\dim_F V = n$(维数), 并且选定向量空间 V 的一组基底 $\{e_1,$

$e_2, \cdots, e_n\}$, 那么 $\forall \varphi \in \mathrm{GL}_F(V)$, 都有

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ \varphi(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n, \\ \qquad \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{cases}$$

其中 $a_{ij} \in F, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. 当然, 其矩阵形式为

$$\begin{aligned} \varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) &= (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这就是说, 对于向量空间 V 的一组选定基底, 其可逆线性变换 φ 完全由其关联矩阵

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

确定.

一般地, 我们将线性变换 φ 的关联矩阵 A_φ 称为线性变换 φ 在线性空间 V 的选定基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 上的表示矩阵, 简称为 φ 的表示矩阵.

又若令 $\varphi \in \mathrm{GL}_F(V)$, 则自然存在一个 $\psi \in \mathrm{GL}_F(V)$, 使得 $\psi\varphi = 1 = \varphi\psi$. 于是

$$\begin{aligned} &\psi\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \psi(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \\ =&\psi((e_1, e_2, \cdots, e_n) A_\varphi) = \psi(e_1, e_2, \cdots, e_n) A_\varphi \\ =&(\psi(e_1), \psi(e_2), \cdots, \psi(e_n)) A_\varphi \\ =&(e_1, e_2, \cdots, e_n) A_\psi A_\varphi, \end{aligned}$$

即 $A_\psi A_\varphi = I$. 类似地, $A_\varphi A_\psi = I$. 这就是说, 表示矩阵 A_φ 是域 F 上的可逆矩阵.

另外, 我们知道域 F 上的 n 阶可逆方阵集合 $\mathrm{GL}_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det A \neq 0\}$ 也构成一个群, 其中的 $M_n(F)$ 表示域 F 上所有 n 阶方阵组成的集合. 一般地, 我们称其为域 F 上的 n 阶一般线性群. 这样就得到了一个域 F 上、n 维向量空间 V 上的一般线性群至域 F 上 n 阶一般线性群的一个对应关系:

$$\sigma : \mathrm{GL}_F(V) \to \mathrm{GL}_n(F),$$

$$\varphi \to A_\varphi,$$

其中, A_φ 是线性变换 φ 在取定基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 上的表示矩阵.

定理 1.1.1 对于上面的两个一般线性群, 有 $\mathrm{GL}_F(V) \overset{\sigma}{\cong} \mathrm{GL}_n(F)$.

证明 若令 $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}_F(V)$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是向量空间 V 的一组基底, 那么

$$(\psi\varphi)(e_1, \cdots, e_n) = \psi((e_1, \cdots, e_n) A_\varphi) = (\psi(e_1, \cdots, e_n)) A_\varphi = (e_1, \cdots, e_n) A_\psi A_\varphi,$$

即 $\sigma(\psi\varphi) = A_\psi A_\varphi$. 另外, 又易见 $\sigma(\psi)\sigma(\varphi) = A_\psi A_\varphi$, 所以

$$\sigma(\psi\varphi) = \sigma(\psi)\sigma(\varphi). \qquad \square$$

既然有了定理 1.1.1 作保证, 那么以后就可以不加区别地使用域 F 上 n 维向量空间 V 上的一般线性群 $\mathrm{GL}_F(V)$ 和域 F 上 n 阶一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 了.

有了这些简单准备, 我们就可以定义什么是有限群表示了.

定义 1.1.1 令 G 是有限群, F 是域, V 是域 F 上的有限维向量空间, $\dim_F V = n$. 如果存在一个群同态

$$\rho: G \to \mathrm{GL}_F(V),$$

那么就称 (V, ρ) 是有限群 G 的一个表示, 简称 ρ 是群 G 的表示. 称其中的域 F 为表示的基础域; F 上的向量空间 V 称为表示空间; 而称向量空间 V 的维数 $\dim_F V$ 为表示的次数 (或维数), 并记其为 $\deg\rho (= \dim_F V)$.

特别地, 如果有限群 G 在 V 的子空间 U 上也有一个表示

$$\varphi: G \to \mathrm{GL}_F(U),$$

并且 $\varphi = \rho|_U$ (表示 ρ 在 U 上的限制), 那么就称表示 (U, φ) 是表示 (V, ρ) 的子表示.

事实上, 因为有限群 G 的表示 $\rho: G \to \mathrm{GL}_F(V)$ 是一个群同态, 所以易见如下一些简单事实:

(1) $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$,

(2) $\rho(1_G) = 1$(V 至 V 的恒等映射),

(3) $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}, \forall g \in G$.

另外, 易知 $\ker\rho = \{g \in G \mid \rho(g) = 1\}$ 是有限群 G 的正规子群. 一般地, 我们称其为表示 ρ 的核. 当然, 利用群的同态基本定理, 易知

$$G/\ker\rho \cong \mathrm{Im}\rho \subseteq \mathrm{GL}_F(V).$$

现在, 如果特别地有 $\ker\rho = G$, 即 $\rho(g) = 1, \forall g \in G$, 那么就称表示 ρ 是平凡的. 如果特别地有 $\ker\rho = 1$, 那么就称有限群 G 的表示 ρ 是忠实的. 易见, 对于忠实的表示存在如下的嵌入同态

$$G \cong \mathrm{Im}\rho \subseteq \mathrm{GL}_F(V).$$

再由于 $\mathrm{GL}_F(V) \cong \mathrm{GL}_n(F)$(定理 1.1.1), 所以我们也可以将有限群表示的概念定义至矩阵群上.

定义 1.1.2　令 G 是有限群, F 是域, 如果存在群同态

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F),$$

那么就称 ρ 是有限群 G 的一个表示. 其中的域 F 是表示的基础域; n 是表示的次数 (或维数), 仍记其为 $\deg\rho$; 而这时域 F 上的 n 维向量空间是 $F^n = \underbrace{F \times \cdots \times F}_{n}$, $\dim_F V = n$, 即 $F^n \cong V$ 就是表示 ρ 的表示空间.

实际上, 对于任意一个有限群 G, 它的表示是一定存在的. 例如: 令 G 是有限群, V 是域 F 上的 n 维向量空间, $\forall n \in Z^+$, 那么

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_F(V),$$

$$g \to 1(1v = v)$$

就是域 F 上 n 维向量空间 V 上的一个表示. 一般地, 我们称这样的 1 维向量空间上的表示是平凡表示.

例 1.1.1　令 G 是有限群, 并不妨假设 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$, $g_1 = 1$, 那么

$$\tau_g : G \to gG = \{gg_1, gg_2, \cdots, gg_n\} = G,$$

$$g_i \to gg_i$$

显然是一个一一映射. 并且若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & gg_i = g_j, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases}$$

则我们就得到一个与 $g \in G$ 关联的置换矩阵 $A_g = (a_{ij})_{n\times n}$. 易见, 置换矩阵 $A_g = (a_{ij})_{n\times n}$ 由如下关系确定:

$$\tau_g(g_1, g_2, \cdots, g_n) = (gg_1, gg_2, \cdots, gg_n) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)(a_{ij})_{n\times n}.$$

于是, 我们得到一个群的单同态

$$\tau : G \to \mathrm{GL}_n(F),$$

$$g \to A_g = (a_{ij})_{n\times n}\,.$$

显然, 这是有限群 G 的一个忠实表示.

一般地, 我们将例 1.1.1 之中有限群 G 的表示称为正则表示.

进一步, 既然我们要研究有限群 G 的表示问题, 那么就有必要在此先明确一下, 表示的 "相同", 或者说 "相等" 的概念.

定义 1.1.3 令 $\rho: G \to \mathrm{GL}_F(V_1)$ 和 $\eta: G \to \mathrm{GL}_F(V_2)$ 是有限群 G 的两个表示, 其中 V_1, V_2 均是域 F 上的有限维向量空间. 如果存在一个可逆线性变换 $\tau: V_1 \to V_2$, 使得

$$\eta(g)\,\tau = \tau\rho(g), \quad \forall g \in G,$$

那么, 就称表示 ρ 和 η 是等价 (相同) 的, 并记其为 $\rho \sim \eta$.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho(g)} & V_1 \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ V_2 & \xrightarrow{\eta(g)} & V_2 \end{array}$$

易知, 表示的等价是一个等价关系, 即若令 ρ, η 和 ϑ 均是有限群 G 的表示, 那么如下关系成立:

(1) $\rho \sim \rho$,

(2) 如果 $\rho \sim \eta$, 那么 $\eta \sim \rho$,

(3) 如果 $\rho \sim \eta$, $\eta \sim \vartheta$, 那么 $\rho \sim \vartheta$.

实际上, 若令 $\rho: G \to \mathrm{GL}_F(V_1)$ 和 $\eta: G \to \mathrm{GL}_F(V_2)$ 是有限群 G 的两个等价表示, 那么从可逆线性变换 $\tau: V_1 \to V_2$, 知道 $\dim_F V_1 = \dim_F V_2$. 于是, 可令 $n = \dim_F V_1 = \dim_F V_2$, 进而存在相应的域 F 上 $n \times n$ 阶可逆矩阵 $T(\tau)$ 和相应的矩阵表示 $\rho: G \to \mathrm{GL}_n(F)$ 与 $\eta: G \to \mathrm{GL}_n(F)$, 满足

$$\eta(g)\,T(\tau) = T(\tau)\,\rho(g), \quad \forall g \in G,$$

即 $\rho(g) = T(\tau)^{-1}\,\eta(g)\,T(\tau)$. 也就是说, 存在一个共同的可逆矩阵 $T(\tau)$, 适合

$$\rho(g) = T(\tau)^{-1}\,\eta(g)\,T(\tau), \quad \forall g \in G.$$

所以, 我们也可以用矩阵语言, 将有限群表示等价的概念定义成如下形式:

定义 1.1.4 令 $\rho: G \to \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\eta: G \to \mathrm{GL}_n(F)$ 是有限群 G 的两个域 F 上的表示. 如果存在一个可逆矩阵 $T \in \mathrm{GL}_n(F)$, 使得

$$\eta(g)\,T = T\rho(g), \quad \forall g \in G,$$

那么, 就称表示 ρ 和 η 是等价 (相同) 的, 并记其为 $\rho \sim \eta$.

例 1.1.2　令有限群 G 是 2 阶循环群, 即 $G=(a), a^2=1$. 那么, 容易验证

$$\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} \rho : G &\to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), \\ a &\to \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是有限群 G 的一个表示, 这里的 $\mathbf{R}$ 是实数域. 又

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} \eta : G &\to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), \\ a &\to \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

就是一个与表示 ρ 等价的表示.

例 1.1.3　令有限群 G 是二面体群 $D_8 = (\{a, b \,|\, a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\})$, 那么容易验证

$$\begin{aligned} \rho : D_8 &\to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}), \\ a &\to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是二面体群 D_8 的一个表示, 其中 $\mathbf{C}$ 是复数域.

$g \in D_8$	1	a	a^2	a^3
$\rho(g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$g \in D_8$	b	ab	a^2b	a^3b
$\rho(g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

另外,

$$\eta : D_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}),$$
$$a \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

也是二面体群 D_8 的一个表示, 并且 $\rho \sim \eta$, 其中的过渡矩阵为

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

现在, 让我们回过头再来看一下有限群表示的定义. 那么, 需要考虑的几个基本问题也就一目了然了.

(1) 如果存在有限群 G 的表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_F(V)$, 那么对任意一个满足 $U \supseteq V$ 的 F-向量空间 U, 自然就存在一个表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_F(V) \xrightarrow{\text{嵌入}} \mathrm{GL}_F(U)$. 这就是说, 如果我们能找到一个空间, 使得有限群 G 在该空间上有表示, 那么有限群 G 在比该空间大的空间上就有表示. 所以, 对于有限群 G, 首先需要考虑的是, 是否存在一个"极小"的表示空间? 进一步, 如果存在"极小"的, 那么其他的表示空间与"极小"的表示空间之间的关系又如何? 还有就是如何才能找到"极小"的表示空间等.

(2) 对于有限群 G, 究竟它有多少个不一样的"极小"表示空间? 这些"极小"表示空间与有限群 G 又有什么联系? 以及这些"极小"表示空间之间的联系, 对于了解有限群 G 的性质和结构又具有怎样的实质意义?

(3) 如果令 H 是有限群 G 的子群, 那么子群 H 的表示和群 G 的表示之间有什么关系? 特别是它们的"极小"表示之间的关系?

(4) 从有限群 G 表示的定义 $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$, 我们知道表示 ρ 的性质和结构应与表示的基础域 F 有关联. 那么, 对于不同的基础域, 例如, $F \subseteq E(\mathrm{char}F = \mathrm{char}E)$, 其表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\rho' : G \to \mathrm{GL}_m(E)$ 之间又有怎样的关系?

(5) 在前面问题的基础上, 如果有限群 G 的表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\rho' : G \to \mathrm{GL}_m(E)$, 不仅基础域 $F \neq E$, 而且 $\mathrm{char}F \neq \mathrm{char}E$, 那么其表示之间的关系又怎样?

1.2 模

在刻画有限群表示的性质与结构方面, 模与群代数的语言不仅可以大大简化繁琐的计算证明过程, 还能提供更加清晰的结构形式并更有效地反映结构之间的联系. 所以, 这节我们将简要介绍一些后面所必需的模与群代数的概念和性质.

1.2.1　模的概念与性质

定义 1.2.1　令 M 是加法群, R 是有 1 的环. 如果存在映射 (或称为作用)

$$\varphi: R\times M\to M,$$
$$(r,m)\to\varphi(r,m)\quad(\text{一般地, 简记其为 } rm),$$

并且该作用满足:

(1) $r(m+n)=rm+rn$,

(2) $(r+s)m=rm+sm$,

(3) $(rs)m=r(sm)$,

(4) $1m=m$,

其中 $r,s,1\in R, m,n\in M$, 那么就称 M 为左 R-模.

类似地, 可以定义右 R-模. 后面如果没有特别说明, 我们说的模都是指左 R-模.

易知, 任意一交换群均可以视为 Z-模 (Z 表示整数环). 另外, 我们熟知的域 F 上向量空间是一个 F-模.

从模的定义, 容易验证 R-模 M 具有如下几个简单性质:

$$r0=0,\quad 0m=0,\quad (-r)m=-(rm)=r(-m),$$

其中 $r\in R, m\in M$.

例 1.2.1　我们熟知的环 R 的左理想 a 具有一个显然的 R-模结构:

$$R\times a\to a,$$
$$(r,x)\to rx,$$

其中, 运算 rx 是环 R 本身的乘法运算.

定义 1.2.2　令 M 是一 R-模, $N\subseteq M$. 如果 N 是 M 的子群, 并且 N 在 R-模 M 的运算之下构成一个 R-模, 即 $\forall r\in R, n\in N$ 有 $rn\in N$, 那么就称 N 是 M 的子模.

易知, 若 M 是 R-模, I 是环 R 的左理想, 则 IM 是 M 的一个子模.

对于任意一个 R-模 M 均存在两个平凡子模 0 和 M. 以后如果没有特别说明, 我们说的子模都将指的是非平凡子模. 另外, 容易验证子模的交一定是子模, 即若 M_1, M_2 是 R-模 M 的子模, 则 $M_1\cap M_2$ 是 R-模 M 的子模.

定义 1.2.3　令 $M_i, i\in I$ 是 R-模 M 的一组子模, 若规定

$$\sum_{i\in I}M_i=\left\{\sum_{i\in I}m_i\,\middle|\,m_i\in M_i, \text{其中只有有限个} m_i\neq 0\right\},$$