普通高等教育"十二五"规划教材辅导用书

普通高等学校数学教学丛书

高等数学习题课教程

（上册）

张志海　范　杰　霍京京　主编

科学出版社

普通高等学校数学教学丛书

高等数学习题课教程

（上册）

张志海　范　杰　霍京京　主　编
李召群　庞培林　梁景翠　张　鸿　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书按照教育部颁发的《高等数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结多年来积累的教学和考研辅导经验，通过对教学内容的分析、总结，对题型和具体题目的认真筛选编写而成.

全书分上、下两册.上册共12讲，每讲基本包括考纲要求、基本概念、常用性质及结论、常见问题和处理方法及技巧、解题应注意的问题，并通过实例对其如何用于求解具体问题进行说明，以达到揭示解题规律，归纳、总结解题方法的目的.

本书可作为高等数学习题课教材，也可作为工科各专业本科生学习高等数学课程的学习指导教材或备考研究生的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程.上册/张志海，范杰，霍京京主编.—北京：科学出版社，2013

(普通高等学校数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-038080-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…②范…③霍…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第143752号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：张怡君

责任印制：阎　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013年7月第　一　版　　开本：720×1000　B5

2013年7月第一次印刷　　印张：11

字数：213 000

定价：22.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着我国高等教育的发展，高等院校本科的招生量逐年扩大，接受高等教育的人越来越多. 高等数学作为高校理工科学生的一门重要基础课，也作为硕士研究生入学考试的一门重要课程，越来越受大学生们的重视. 如何在大学期间学好高等数学，为后续课程，尤其是专业课程的学习奠定好的基础，进而顺利参加硕士研究生入学考试，取得好成绩，是大学生们最为关心的问题. 所有这一切都要求大学生们了解高等数学的主要内容，掌握分析问题、解决问题的方法，分清主次，力求在内容上达到一定的深度和广度.

为了帮助同学们通过复习，深刻理解概念，熟练掌握解题的思路和方法，我们根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结了多年来的教学经验和考研辅导班积累的经验、资料，经过对题型和题目的认真筛选，编写了这本习题课教程.

本书的编写力求选题精练，分析透彻，覆盖面广. 特点如下：(1)对基本概念不是简单罗列，而是结合具体题目，将概念的理解渗透于做题之中；(2)对基本题型、方法给予总结；(3)例题编排由浅入深，循序渐进；(4)适当选用了一些往年考研试题，努力使其具备适用面广、针对性强、综合性和灵活性明显、重点突出等特点.

本书参照同济大学应用数学系主编、高等教育出版社出版的《高等数学》(上、下册)而编写，书后附有与教材配套使用的高等数学同步练习册的习题答案，可作为教师教学过程中的习题课参考书，也可作为《高等数学》教材的后继复习参考书和学生考研参考用书.

在本书编写过程中，河北工程大学的各级领导给予了关心和支持；高等数学教研室的同仁们为本书的编写提出许多好的想法与建议；董卫、贾瑞娟、刘国华、田伶改四位教授审阅了书稿并提出修改意见，尤其是哈明虎教授在百忙中统阅书稿并为本书的编写付出了心血；科学出版社对本书的出版给予了大力支持和帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，恳请各位同仁和读者批评指正.

编　者

2013 年 3 月于邯郸

目　录

前言
第一章　函数及函数极限 …… 1
　习题课 1　函数 …… 1
　习题课 2　数列极限 …… 6
　习题课 3　函数的极限 …… 14
　习题课 4　函数的连续及连续函数的性质 …… 27
第二章　导数与微分 …… 36
　习题课 5　导数及其求导方法 …… 36
　习题课 6　函数的高阶导数及函数的微分 …… 49
第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 55
　习题课 7　中值定理及泰勒公式 …… 55
　习题课 8　导数应用 …… 67
第四章　不定积分 …… 83
　习题课 9　不定积分的概念及计算 …… 83
第五章　定积分 …… 98
　习题课 10　定积分及其计算 …… 98
　习题课 11　广义积分 …… 113
第六章　定积分应用 …… 120
　习题课 12　定积分应用 …… 120
附录　高等数学同步练习册(上)习题答案 …… 125

第一章　函数及函数极限

《考纲》要求

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立.

数列极限的 ε-N 定义，函数极限的 ε-δ 定义和函数的左、右极限，无穷小，无穷大，无穷小的比较，极限四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和零点定理、介值定理）.

习题课 1　函　　数

一、基本概念

对函数概念的描述，同济大学应用数学系所编的《高等数学》第五、六版以映射为基础，给出了函数的定义，但纵观整个高等数学的内容，作为其研究对象的函数，无论是理解还是对它的把握，如下的描述将更为直观，更易接受.

定义　设有变量 x，y 和实数集 D，若对变量 x 在 D 内任取一值，变量 y 按一定法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 x 称为函数的自变量，y 称为函数的因变量，实数集 D 称为函数的定义域.

关于定义的几点说明：

注 1　定义未排除对不同的 x 取值可对应同一个 y 值，故常数可作为函数来看待.

注 2　函数概念的本质是变量与变量在取值间的对应，而决定因素是定义的两大要素：①定义域；②函数的对应律. 此两大要素既是函数概念的核心，也是判别两个函数是否是同一个函数的重要依据.

例 1　判别如下函数对是否为同一函数.

(1) $y=\log_a x^2$，$y=2\log_a x$；

(2) $y=|x|,y=x$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x},y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) 因为 $y=\log_a x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y=2\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以两函数的定义域不同，故它们不是同一个函数.

(2) $y=|x|,y=x$ 的定义域皆为 $(-\infty,+\infty)$，但对满足 $x<0$ 的一切 x，$|x|\neq x$，

故两函数对应律不同，因而不是同一个函数.

(3) 因 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x},y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的定义域都是 $D=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$，且 $\forall x\in D$ 有

$$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

所以，它们是同一个函数.

注 3 函数符号 $f(x)$ 有两种含义：①表示 x 的函数；②表示函数在 x 处的函数值. 第二种含义常是处理高等数学问题构成其间接法的基础.

例 2 已知 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$，求 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 的幂级数展开式.

解 $\left(\text{分析：}\dfrac{1}{1-x^2}\text{可视为}\dfrac{1}{1-x}\text{在 } x^2 \text{ 处的函数值}\right)$由题中条件可知

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

注 4 常量与变量是相对的，在处理问题的某一过程中一个量可能是常量，在另一过程下则可能是变量. 正确理解、把握同一过程下的量与量间的关系，是处理、解决问题的基础.

例 3 设 $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x^2)$.

解 对任意取定的 $x\neq 0$，将 x^2 代入 $f(x)$ 中（此时 x 应视为取定的定值），则 $f(x^2)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$（由 x 取值的任意性，此时 x 为函数 $f(x^2)$ 的自变量），又如

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

在研究、考察极限过程 $\Delta x\to 0$ 时，x 为常量，但求完了极限，x 即为函数 $f'(x)$ 的自变量.

二、常用的性质及结论

求解问题时，常需要涉及和利用的函数性质是：①函数的周期性；②函数的奇偶性；③函数的单调性. 常用的结论是五类基本初等函数的定义域及其相关性质.

需要说明的是对函数周期性、奇偶性的考察、利用，在高等数学范围内只能从定义出发.

例 4　若函数 $f(x)$ 对其定义域内的一切 x 恒有 $f(x)=f(2a-x)$ 或 $f(a+x)=f(a-x)$，则称函数 $f(x)$ 关于点 $x=a$ 对称（图像关于直线 $x=a$ 对称），证明：如果函数关于点 $x=a$ 和点 $x=b$ $(a\neq b)$ 对称，则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证　不妨设 $b>a$. 因 $f(x)$ 对称于点 $x=a,x=b$，所以有

$$f(x)=f(2a-x),\quad f(x)=f(2b-x),$$

即 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-2a+x)$ 对定义域内一切 x 成立，故 $f(x)$ 以 $2b-2a$ 为周期.

注 5　该条件是充分的，非必要的.

高等数学求解问题时，对函数性质常需关注如下三个问题：

(1) 函数的上述性质，在对其施加高等数学的相关运算后还能否继续保持？

(2) 函数的上述性质对高等数学中的相关运算的结果会产生什么影响？

(3) 如何利用此种影响简化运算？

三、常见的问题和处理方法

1. *函数定义域的求法和依据*

因为高等数学以函数为研究对象，而本课程所讨论的函数多为初等函数和各个区间段分别用初等函数表示的分段函数，所以由初等函数的意义，求函数定义域的方法和依据如下.

1) 五类基本初等函数的定义域；

2) 四则运算所得函数的定义域；

若函数 $f(x),g(x)$ 的定义域分别为 D_1,D_2，则 $f(x)\pm g(x)$ 的定义域为 $D=D_1\cap D_2$；$f(x)\times g(x)$ 的定义域为 $D=D_1\cap D_2$；$f(x)\div g(x)$ 的定义域为 $D=\{x\,|\,x\in D_1\cap D_2,g(x)\neq 0\}$.

3) 复合函数的定义域.

设函数 $y=f(u),u\in D_u,u=\varphi(x),x\in D_x$，则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 $D=\{x\in D_x\,|\,u=\varphi(x)\in D_u\}$.

方法　(1) 函数解析表达式给出时，一切使解析表达式有意义的 x 的全体所成集合即为函数定义域. 具体求解时，应注意分析函数的结构，依次与给定的依据相对应.

(2) 对于实际问题，除依据(1)，还需结合问题的实际背景、自变量所具有的实际意义. 例如，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$，单从数学角度看，其定义域为 $t\in(-\infty,+\infty)$；但如果结合变量 t 所具有的物理意义，则其定义域应为 $t\in[0,+\infty)$.

另外需要注意求函数定义域时必须面对所给函数原形，否则会造成无定义的点的丢失. 例如，函数 $y=\frac{x}{x}$ 经化简变成 $y=1$，而后者的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 复合函数的三个问题

1) 定义域.

例 5 求 $y=\arcsin(x^2+a^2)$ 的定义域.

解 此函数由 $y=\arcsin u, u=x^2+a^2$ 复合而成，且 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $u\in[-1,1]$.

当 $|a|>1$ 时，对一切 x 的取值皆有 $x^2+a^2>1$，故函数定义域 $D=\varnothing$；

当 $|a|=1$ 时，要使函数有意义，需 $x=0$，故函数定义域 $D=\{0\}$；

当 $|a|<1$ 时，使函数有意义的 x 的取值应满足 $x^2+a^2\leqslant 1$，故函数定义域为

$$D=\{x\mid x^2+a^2\leqslant 1\}.$$

由此例可知：若函数中含有未指明具体取值的参数时，应分析、考察该参数取不同值是否对所讨论的问题产生影响，若有影响，则需划分参数的取值范围分别讨论. 此处理方法将贯穿本课程的始终.

2) 求复合函数的表达式.

求复合函数表达式的一种显而易见的方法是替换代入法，但对分段函数需注意，针对自变量的不同取值，各中间变量相应取值落入的范围.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x<0,\\ x^2+x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

解 因为当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $f(-x)=x^2+x+1$；又当 $x\leqslant 0$ 时，$-x\geqslant 0$，所以 $f(-x)=x^2-x+1$.

故

$$f(-x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2+x+1, & x>0.\end{cases}$$

3) 已知 $f(\varphi(x))$ 关于 x 的表达式，还原 $f(u)$.

方法 (1) 利用反函数 $x=\varphi^{-1}(u)$ 代入；

(2) 拼凑法，即将关于 x 的表达式拼凑成以 $\varphi(x)$ 表达的形状.

注 第一种方法常用于理论的研究.

例 7 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+2e^x-1$，求 $f(x)$.

解 法 1 令 $e^x+1=t$，则 $x=\ln(t-1)$，代入得

$$f(t)=e^{2\ln(t-1)}+2e^{\ln(t-1)}-1=(t-1)^2+2(t-1)-1,$$

故 $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)-1=x^2-2$.

法 2 $f(e^x+1)=(e^x+1)^2-2$，故 $f(x)=x^2-2$.

3. 由给定的函数方程求 $f(x)$

例 8 若 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$.

解 令 $x=1-t$，将其代入所给的方程可得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.$$

将上述方程与给定方程联立并求解方程组可得

$$f(x)=-\frac{1}{3}[(1-x)^2-2x^2].$$

4. 分段函数运算

分段函数的特点就是不同区间段上的函数表达式不同，运算时，需利用参加运算的各个分段函数的所有分点重新划分定义区间，实现对定义区间的相同划分，然后再进行运算.

例 9 设

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2+2, & 0\leqslant x<2,\\ \ln x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & x<1,\\ e^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

求 $f(x)+g(x)$.

解 利用 0,1,2 三点划分区间 $(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在新的划分下可表示为

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2+2, & 0\leqslant x<1,\\ x^2+2, & 1\leqslant x<2,\\ \ln x, & x\geqslant 2.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<1,\\ e^x, & 1\leqslant x<2,\\ e^x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

所以,

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} x+1+\sin x, & x<0, \\ x^2+2+\sin x, & 0\leqslant x<1, \\ x^2+2+e^x, & 1\leqslant x<2, \\ \ln x+e^x, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

习题课 2　数列极限

一、定义及注释

定义　设有数列$\{x_n\}$,若对任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在正整数N,使得对于$n>N$时的一切x_n,都有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立,则称常数a为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限,亦称数列$\{x_n\}$收敛于a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

关于定义的几项说明:

注 1　ε是任意给定的,其作用是用来刻画变量x_n与a的接近程度.

ε的取值的任意性意味着取之前可任意选取,它恰恰体现了变量x_n与a可无限接近.

ε取值的确定性意味着取之后必须将其视为固定的常数参与问题的具体讨论.它体现了变量x_n与常数a的具体接近程度.

注 2　$N=N(\varepsilon)$,其数值的大小,体现了变量n对数列$\{x_n\}$无限接近a时的影响.

注 3　正整数N存在,但不唯一.如对ε能找出一N_1,使$n>N_1$时,$|x_n-a|<\varepsilon$,则$N_1+1,N_1+2,\cdots$中的每一个值都可作为与ε相对应的N.定义中这种对取定的ε不要求找出与其对应的最小的N的特性,为具体讨论中进行不等式的放大以简化$|x_n-a|$的表达式提供了保证.

例 1　用定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+3}=0$.

证　任给$\varepsilon>0$,因$\left|\dfrac{1}{n+3}-0\right|<\dfrac{1}{n}$,所以,为使

$$\left|\frac{1}{n+3}-0\right|<\varepsilon,$$

只需

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，便有 $\left|\dfrac{1}{n+3}-0\right|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0.$$

由数列的定义知，对任给的 $\varepsilon>0$，只需肯定所对应的 N 存在，无需将具体的 N 求出.

例 2　用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

证　任给 $0<\varepsilon<1$，

$$\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n=+\infty,$$

所以对 $a>0$，必存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$(1-\varepsilon)^n<a<(1+\varepsilon)^n,$$

即

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$$

成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

注 4　数列的极限不受数列前有限项的取值的影响. 换句话说，改变数列的有限项的数值，不影响数列的极限.

数列的这一性质，使得在研究极限时，对数列取值规律的观察、利用可自某一充分大的项以后进行.

例 3　设有数列 u_n,v_n，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq0$，所以存在正整数 N，使得对于一切 $n>N$，有 $u_n\neq0$，$v_n\neq0$.

又 $v_n=v_n\dfrac{u_n}{v_n}$ $(n>N)$，故

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\dfrac{u_n}{v_n}}=0.$$

对此问题，由于无法保证对一切 n，$u_n\neq0$，所以直接利用 $v_n=v_n\dfrac{u_n}{v_n}$ 是无意义的.

二、常用的定理及结论

(1) 极限存在的数列必有界.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$a>0(<0)$，则总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，x_n 与 a 同号.

(3) 如果数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\leqslant 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么 $a\leqslant 0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall x_{n_1}$有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_1}=a$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftarrow\exists$函数 $f(n)=x_n$,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.

三、求数列极限的方法

1. 定义证明法

该方法主要用于理论研究和证明极限等式,对工科学生则是通过练习理解极限概念的思想,解决由极限等式的条件恢复极限定义的描述,进而讨论相关问题.

例 4　设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=2$,证明:存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,数列$\{u_n\}$是单增的.

证　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=2$,所以对 $\varepsilon=1$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-2\right|<\varepsilon=1,$$

即 $n>N$ 时,有

$$1<\frac{u_{n+1}}{u_n}<3,$$

故当 $n>N$ 时,有

$$u_n<u_{n+1}$$

成立. 所以存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,数列$\{u_n\}$是单增的.

2. 四则运算法

该法则使用的前提条件是参加运算的各项的极限都存在,且运算的项数为有限项.

例 5　指出下列各题的解法的错误.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

解　第(1)题解法错误地使用了极限的乘法法则，其原因是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$不存在；第(2)题解法错误地使用了极限的加法法则，其原因是括号里的求和随 n 的无限增大成为无限项的求和.

注 5　对两个数列的加减法：

(1) 一个数列收敛，另一个数列发散，则两个数列的和或差所成数列必发散；

(2) 两个不收敛的数列的和或差所成数列有可能收敛也有可能发散.

注 6　对两个数列的乘法：

(1) 一个数列收敛，另一个数列发散，则两个数列的乘积所成数列可能收敛也可能发散，但是若乘积所成数列收敛，则收敛的那个数列其极限必然为零；

(2) 两个不收敛的数列的乘积所成数列有可能收敛也有可能发散.

例 6　(1) 数列$\left\{\dfrac{1}{n}-n\right\}$，$\{n\}$皆发散，但$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-n+n\right)=0$；数列 $x_n=(-1)^n$ 和数列 $y_n=(-1)^{n+1}$ 皆发散，但数列 x_n-y_n 是发散的，而数列 x_n+y_n 却是收敛的.

(2) 数列 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 收敛，数列 $y_n=n^2$，$z_n=n$ 发散，但数列 x_ny_n 发散，而数列 x_nz_n 却是收敛的.

3. 重要极限及其变形

(1) 重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to0$，$\beta_n\to\beta$，$\alpha_n\neq0\ (n>N)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}\beta_n}=\mathrm{e}^{\beta}.$$

例 7　已知$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)\right]=A$，且对任意的 n，$f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\neq f(a)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=A,$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=0.$$

又因

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}\cdot\frac{n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)}{f(a)}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]}{f(a)}=\frac{A}{f(a)},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=e^{\frac{A}{f(a)}}.$$

4. 夹逼定理法

该方法主要用于处理随 n 无限增大而成为无限项求和或乘积的数列极限问题.

例 8 求下列数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

解 因为

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1.$$

例 9 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}$ $(a>0)$.

解 因为当 $n>a$ 时,有

$$0\leqslant\frac{a^n}{n^n}\leqslant\frac{a^2}{n^2},\quad n>2,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{n^2}=0,$$

所以由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0.$$

例 10　设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为给定的正数，$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=M.$$

证　因为

$$M\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\,M,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1,$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=M.$$

5. 单调有界必有极限

该准则一般用于处理数列各项取值是以递推公式形式给出的问题和理论讨论. 使用此准则求极限时，需完成如下三步工作：

(1) 数列的单调性判别(自某一充分大的项以后满足即可)；

(2) 数列的有界性判别(同上)；

(3) 在极限存在的情况下，假定出极限值，对递推式两端同时求极限以建立极限值所满足的方程，解之即得.

在大多数情况下，三步中的难点是单调性的判别，其常用的方法如下：

(1) 研究 $x_{n+1}-x_n$ 的符号；

(2) 研究$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$大于或小于 1；

(3) 构造函数 $f(x)$使得 $f(x_n)=x_{n+1}$，研究函数 $f(x)$的单调性.

对有界性的处理，原则是：若数列单减，证明数列有下界；若数列单增，证明数列有上界.

例 11　设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证　首先，显然有 $x_n>0$，$\{x_n\}$有下界. 下面用归纳法证明数列是单调递减.

因为 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$；设 $x_n<x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n,$$

由此，数列$\{x_n\}$是单调递减的，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$a=\sqrt{6+a},$$

解得$a=3(a=-2$舍去).

例 12　设$a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

证　法 1　显然，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a_n\frac{1}{a_n}}=1,\quad n=1,2,\cdots.$

因为

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\leqslant 0,$$

所以数列单减有界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

法 2　显然$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a_n\frac{1}{a_n}}=1,\quad n=1,2,\cdots.$

因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\leqslant 1,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，数列单调递减有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

法 3　显然，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a_n\frac{1}{a_n}}=1,\quad n=1,2,\cdots.$

令

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

则有

$$f(x_n)=x_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

因为

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\geqslant 0,\quad x\geqslant 1,$$

所以函数$f(x)$在$[1,+\infty)$单调递增.

又因

$$a_2=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)<a_1,$$

所以有

$$a_3<a_2,\quad\cdots,\quad a_{n+1}<a_n,\quad\cdots,$$