

高阶洛伦兹-高斯光束的研究

周国泉 著



科学出版社

高阶洛伦兹-高斯光束的研究

周国泉 著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书在直角坐标系中构建了一类高阶洛伦兹-高斯光束的正交完备解,用于表征半导体激光器产生的高阶模所对应的远场大角度激光束。分析了高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输、在湍流大气中的传输、分数傅里叶变换和维格纳分布函数,给出了傍轴条件下的光束传输因子和峭度参数;考察了非傍轴条件下高阶洛伦兹-高斯光束的传输,分析了高阶洛伦兹-高斯光束傍轴近似的有效极限;从矢量结构角度衡量了高阶洛伦兹-高斯光束的远场特性。拓展至部分相干情形,研究了部分相干高阶洛伦兹-高斯光束所对应的互相干函数经傍轴实 $ABCD$ 光学系统的传输,导出了部分相干条件下的光束传输因子。拓展至涡旋情形,研究了涡旋洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输、分数傅里叶变换和在垂直于光轴的单轴晶体中的非傍轴传输,分析了拓扑电荷数对强度分布、相位分布和轨道角动量密度分布的影响,考量了晶体效应对涡旋洛伦兹-高斯光束传输的影响。系统全面地揭示和掌握了高阶洛伦兹-高斯光束的特性,表明高阶洛伦兹-高斯光束较厄米-高斯光束更适合表征高功率半导体激光器所产生的高阶模大角度激光束。

本书适合物理学、光学工程及相关专业研究生和高年级本科生参考,也可供有关科研工作者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高阶洛伦兹-高斯光束的研究/周国泉著. —北京: 科学出版社, 2013. 10
ISBN 978-7-03-038791-2

I. ①高… II. ①周… III. ①高斯光学-研究 IV. ①O435

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 236955 号

责任编辑: 钱 俊 周 涵/责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 赵德静/封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 10 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2013 年 10 月第一次印刷 印张: 9 3/4

字数: 186 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

半导体激光器的远场光束特性对许多应用来说是至关重要的。描述半导体激光器所产生的远场光束原先采用的是高斯模型。尽管高斯分布适用于描述基模半导体激光器平行于结方向上的远场分布，但它不适合于表征垂直于结方向上的远场分布。因此，光学工作者提出以洛伦兹光束来表征基模半导体激光器垂直于结方向上的远场分布。单模半导体激光束的聚焦实验研究表明，洛伦兹分布表征垂直于结方向上的远场分布确是一个很好的近似。而后理论上证实了洛伦兹-高斯光束的存在，洛伦兹光束只是它的一个特例而已。洛伦兹-高斯光束的特性研究表明，洛伦兹-高斯光束仅适合于表征基模大角度激光束，而高功率的半导体激光器往往产生高阶模的大角度激光束。

本书在国家自然科学基金项目“超洛伦兹-高斯光束的构建及其用于表征大角度激光束的研究”（No. 10974179）和浙江省自然科学基金项目“高阶洛伦兹-高斯光束模型的构建、特性及其应用”（No. Y1090073）的资助下，构建了一类高阶洛伦兹-高斯光束模型的正交完备解，通过系统的研究，揭示和掌握了高阶洛伦兹-高斯光束的特性，将其用于表征半导体激光器产生的高阶模所对应的远场大角度激光束。所主持的浙江省自然科学基金项目被评为浙江省自然科学基金“十一五”100项优秀项目之一，发表的一篇论文被评为浙江省自然科学基金“十一五”100篇优秀论文之一，研究工作两次被 *Physics Week* 评论为应用激光和光学研究增添了新数据，被认为是新的应用激光和光学发现。本书内容主要是上述两个基金的结晶。本书的亮点之一，就是采用的研究方法创新，利用卷积的定义、傅里叶变换、傅里叶变换的卷积原理、洛伦兹分布的厄米-高斯展开和稳相法等数学手段，使得给出的公式均为解析式，便于分析、应用；亮点之二，就是研究内容创新，对高阶洛伦兹-高斯光束特性的研究内容涵盖了傍轴和非傍轴领域、完全相干和部分相干情形、涡旋和非涡旋、自由空间传输和湍流大气传输等。

本书由浙江大学物理系副主任赵道木教授审定，他所提出的一些合理建议已被采纳，在此表示感谢！还要感谢国家自然科学基金委员会和浙江省自然科学基金委员会的资助！

周国泉

2013年5月于浙江农林大学东湖校区

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究内容	2
第 2 章 高阶洛伦兹-高斯光束的构建与传输	4
2.1 高阶洛伦兹-高斯光束的构建	4
2.2 高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输	5
2.3 高阶洛伦兹-高斯光束的傍轴光束传输因子	10
2.4 高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴实 $ABCD$ 光学系统的峭度参数	15
第 3 章 高阶洛伦兹-高斯光束的分数傅里叶变换	23
3.1 洛伦兹-高斯光束的分数傅里叶变换	23
3.2 HLG_{11} 光束的分数傅里叶变换	27
第 4 章 高阶洛伦兹-高斯光束的维格纳分布函数	30
4.1 洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的维格纳分布函数	30
4.2 HLG_{11} 光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的维格纳分布函数	40
第 5 章 高阶洛伦兹-高斯光束的远场矢量结构	48
5.1 洛伦兹-高斯光束的远场矢量结构	48
5.2 HLG_{10} 光束和 HLG_{11} 光束的远场矢量结构	57
第 6 章 高阶洛伦兹-高斯光束在湍流大气中的传输特性	68
6.1 洛伦兹-高斯光束在湍流大气中的传输	68
6.2 HLG_{01} 光束和 HLG_{11} 光束在湍流大气中的传输	73
第 7 章 部分相干高阶洛伦兹-高斯光束	82
7.1 部分相干洛伦兹-高斯光束经傍轴实 $ABCD$ 光学系统的传输	82
7.2 部分相干洛伦兹-高斯光束在湍流大气中的光束传输因子	87
7.3 部分相干 HLG_{01} 光束和 HLG_{11} 光束经傍轴实 $ABCD$ 光学系统的传输	94
7.4 部分相干 HLG_{01} 光束和 HLG_{11} 光束的光束传输因子	100
第 8 章 高阶洛伦兹-高斯光束的非傍轴传输	105
8.1 洛伦兹-高斯光束的非傍轴传输	105
8.2 HLG_{01} 光束的非傍轴传输	114

第 9 章 涡旋洛伦兹-高斯光束	121
9.1 涡旋洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输	121
9.2 涡旋洛伦兹-高斯光束的分数傅里叶变换	127
9.3 涡旋洛伦兹-高斯光束在垂直于光轴的单轴晶体中的非傍轴传输 ...	134
参考文献	144

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景

半导体激光器自出现以来发展异常迅速,目前,它在光电子技术领域中的地位、应用和发展趋势其他激光器已无法替代,它是具有划时代意义的重要光源。由于半导体激光器输出光束的不对称性,使得它在许多应用过程中必须采用特殊的光学系统进行光束整形。在设计光学系统的光学元器件以及进行光学耦合时需要了解半导体激光器的远场光束特性。描述半导体激光器所产生的远场激光束一般是麦克斯韦方程组结合边界条件,其结果是给出一个数学上很复杂的解析表达式。Casey 等在《异质结激光器》一书中就给出了这样的表达式^[1]。由于数学上的复杂性,这些表达式几乎不运用于实际的光学工程设计。相反,一个简单的半导体激光束的高斯模型广泛运用于有关半导体激光器和光纤耦合效率的研究^[2,3]。然而,半导体激光束的高斯模型存在着不少缺点。尽管高斯分布适用于描述基模半导体激光器平行于结方向上的远场分布^[4],但它不适合表征垂直于结方向上的远场分布。Dumke 研究发现,在相同空间分布下洛伦兹分布的角扩展程度较高斯分布的大,因此,洛伦兹分布更适合于表征半导体激光器垂直于结方向上的远场分布^[5]。洛伦兹分布能有效表征商业上使用的有源层厚度 $0.1\text{ }\mu\text{m}$ 激射波长 $0.8\text{ }\mu\text{m}$ 左右的双异结 $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ 激光器。而且,垂直于结方向上的发散角是如此之大以至于封装半导体激光器的透镜无法会聚所有的光束,造成光束被截取。然而,这一效应无法在半导体激光束的高斯模型中得到体现,由此引发了对洛伦兹光束的深入研究。

由于源平面上的横模为两个独立洛伦兹函数的乘积,故称为洛伦兹光束。Gawhary 等研究了洛伦兹光束在非涅耳近似下的传输性质,给出了在任一横截面上用标量表示的闭析解,闭析解的缓变部分满足标量傍轴波动方程^[6]。Bandres 等通过求解直角坐标系和椭圆柱坐标中的傍轴波动方程,分别得到了所谓的“笛卡儿光束”和“椭圆光束”,而洛伦兹光束是“笛卡儿光束”和“椭圆光束”中的特例之一^[7,8]。基于柯林斯积分公式,江苏大学丁桂林和华中科技大学袁孝等给出了洛伦兹光束经一阶轴对称光学系统的传输变换公式^[9]。在傍轴条件下,洛伦兹光束的光束传输因子证实为 $\sqrt{2}$ 。本书作者理论上对洛伦兹光束的矢量结构、分数傅里叶变换特性、焦移和非傍轴传输特性等开展了一系列的研究^[10]。Naqwi 等运用洛伦兹分布结合透镜的有限数值孔径这一模型研究了半导体激光束的聚焦(振幅分布和位相分布),理论分析值和实际测量结果相一致^[11]。华中科技大学袁孝等采

用部分相干洛伦兹模型来描述结比波长窄的单模半导体激光器所产生的远场光束,在半导体激光器前放置双透镜系统来研究其聚焦,结果显示部分相干洛伦兹模型表征垂直于结方向上的远场分布是一个非常好的近似^[12]。Gawhary 等还以洛伦兹光束为基础,构建了一类互相正交的超洛伦兹光束^[13]。

Kiselev 运用抛物型方程方法^[14]、Gutiérrez-Vega 等基于亥姆霍兹方程^[15]、Gawhary 等运用李群论^[6]分别证实了洛伦兹-高斯光束的存在。在源平面上的 q 参数趋向于无穷时,洛伦兹-高斯光束退化为洛伦兹光束;在与洛伦兹部分相关的光束参数趋向于无穷时,洛伦兹-高斯光束退化为高斯光束。因此,洛伦兹-高斯光束是一个较宽广的光束模型。在傍轴条件下,洛伦兹-高斯光束的光束传输因子范围为 $[1, \sqrt{2}]$ ^[16]。洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输、矢量结构、分数傅里叶变换特性、焦移和非傍轴传输特性等均已被掌握^[17,18]。洛伦兹-高斯光束的特性研究表明,洛伦兹-高斯光束仅适合表征基模大角度激光束。实际上,高功率的半导体激光器往往产生高阶模大角度激光束。而高功率半导体激光器在当今高新技术产业和国防建设中占据重要地位,高阶模所对应的大角度激光束的数学表征就成为一个既具理论研究意义又具实际应用价值的急需解决的主题。那么,高阶模所对应的大角度激光束该如何表征?另一方面,洛伦兹-高斯光束如何像厄米-高斯光束和拉盖尔-高斯光束一样形成一个光束族?

1.2 研究内容

(1) 直角坐标系中高阶洛伦兹-高斯光束正交完备解的构建。利用李群论,在直角坐标系中导出高阶洛伦兹-高斯光束。利用理论的自洽性检验所构建的高阶洛伦兹-高斯光束的正交完备解。首先,在傍轴条件下,高阶洛伦兹-高斯光束正交完备解的缓变部分应满足标量傍轴波动方程。其次,不同阶数间的高阶洛伦兹-高斯光束应满足正交性。最后,高阶洛伦兹-高斯光束还应构成一个完备集。在特定条件下,高阶洛伦兹-高斯光束应退化为洛伦兹-高斯光束。

(2) 高阶洛伦兹-高斯光束傍轴传输变换特性的研究。运用柯林斯积分公式,导出高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的解析传输变换公式。基于所得公式,还可以分析高阶洛伦兹-高斯光束的分数傅里叶变换特性。利用傍轴光束传输的二阶矩和高阶矩理论,导出傍轴条件下的光束传输因子和经傍轴 $ABCD$ 实光学系统峭度参数的解析表达式。导出高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的维格纳分布函数,从维格纳分布函数考察其傍轴传输特性。利用广义惠更斯-菲涅耳积分公式和利托夫近似,导出高阶洛伦兹-高斯光束在湍流大气中的平均光强和有效光束尺寸的解析表达式,重点分析湍流强弱、光源光斑大小等对光束传输特性的影响。

(3) 高阶洛伦兹-高斯光束远场矢量结构特征的研究。将高阶洛伦兹-高斯光束矢量化,然后利用全矢量角谱法将高阶洛伦兹-高斯光束表示成 TE(横电)项和 TM(横磁)项之和。TE 项是指光束的电场垂直于传输轴, TM 项是指与光束相关联的磁场垂直于传输轴。由于电场的散度条件必须遵循以及矢量角谱中传输波的偏振方向一定垂直于波矢,矢量结构即 TE 项和 TM 项是唯一的。在远场采用稳相法,给出矢量结构的解析表达式,分析其能流分布特征,从而深入内部矢量结构上来认识和研究高阶洛伦兹-高斯光束。

(4) 高阶洛伦兹-高斯光束非傍轴传输变换特性的研究。鉴于高阶洛伦兹-高斯光束是用于描写大角度光束,其涉及的光源尺度相对较小,因此,利用矢量瑞利-索末菲衍射积分公式等给出高阶洛伦兹-高斯光束在非傍轴条件下的解析传输公式,分析高阶洛伦兹-高斯光束的三个光束参数对非傍轴性的影响,讨论傍轴和非傍轴表征高阶洛伦兹-高斯光束间的差异,分析高阶洛伦兹-高斯光束傍轴近似的有效极限,确定其非傍轴传输特性。

(5) 部分相干高阶洛伦兹-高斯光束传输变换特性的研究。将高阶洛伦兹-高斯光束由完全相干拓展至部分相干,利用广义的惠更斯-菲涅耳原理导出部分相干高阶洛伦兹-高斯光束的互相干函数经 $ABCD$ 光学系统的传输变换公式,进而分析其经透镜聚焦后的强度分布和空间复相干度分布等。导出部分相干高阶洛伦兹-高斯光束的光束传输因子。还退化到洛伦兹-高斯光束,导出了部分相干洛伦兹-高斯光束在湍流大气的光束传输因子。

(6) 涡旋洛伦兹-高斯光束的研究。洛伦兹-高斯光束经过一螺旋位相板就变成涡旋洛伦兹-高斯光束,其波前位相可通过螺旋位相板调制。研究涡旋洛伦兹-高斯光束经傍轴 $ABCD$ 光学系统的传输、分数傅里叶变换和在垂直于光轴的单轴晶体中的非傍轴传输,重点分析拓扑电荷数和分数傅里叶变换的阶数对光强分布、相位分布和轨道角动量密度分布的影响,还考察晶体效应对涡旋洛伦兹-高斯光束光强分布和相位分布的调控作用。

第 2 章 高阶洛伦兹-高斯光束的构建与传输

2.1 高阶洛伦兹-高斯光束的构建

在直角坐标中, z 轴为光束传输轴。高阶洛伦兹-高斯光束在源平面 $z=0$ 上有如下形式:

$$E(x_0, y_0, 0) = E_m(x_0, 0) E_n(y_0, 0) \quad (2-1)$$

式中, $E_m(x_0, 0)$ 和 $E_n(y_0, 0)$ 分别为

$$E_{2m_1}(j_0, 0) = \exp\left(\frac{ikj_0^2}{2q_0}\right) (j_0^{2m_1} + \sum_{l_1=1}^{m_1-1} C_{(2m_1)(2l_1)} j_0^{2l_1}) \prod_{l_2=1}^N \frac{1}{j_0^2 + w_{(l_2-1)j}^2} \quad (2-2)$$

$$E_{2m_1+1}(j_0, 0) = \exp\left(\frac{ikj_0^2}{2q_0}\right) (j_0^{2m_1+1} + \sum_{l_1=1}^{m_1-1} C_{(2m_1+1)(2l_1+1)} j_0^{2l_1+1}) \prod_{l_2=1}^N \frac{1}{j_0^2 + w_{(l_2-1)j}^2} \quad (2-3)$$

其中, $j_0 = x_0$ 或 y_0 , 任何位置的 j 均为 x 或 y (下同); $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波长; $q_0 = -ikw_0^2/2$ 为源平面上的 q 参数; w_0 为高斯部分的束腰; N 为整数, m_1 取值为 $0 \sim N-1$; 系数 $C_{(2m_1)(2l_1)}$ 和 $C_{(2m_1+1)(2l_1+1)}$ 分别定义为^[13]

$$C_{(2m_1)(2l_1)} = -\frac{R(2m_1)}{R(2l_1)}, \quad C_{(2m_1+1)(2l_1+1)} = -\frac{R(2m_1+1)}{R(2l_1+1)} \quad (2-4)$$

其中

$$R(2m_1) = 2\pi (-1)^{m_1+1} \sum_{s=0}^{N-1} \lim_{j_0 \rightarrow w_{sj}} \frac{\partial}{\partial j_0} \left(\frac{j_0^{2m_1}}{(j_0 + w_{sj})^2} \prod_{l_2=1; l_2 \neq s+1}^N \frac{1}{j_0^2 + w_{(l_2-1)j}^2} \right) \quad (2-5)$$

$$R(2m_1+1) = 2\pi (-1)^{m_1+1} \sum_{s=0}^{N-1} \lim_{j_0 \rightarrow w_{sj}} \frac{\partial}{\partial j_0} \left(\frac{j_0^{2m_1+1}}{(j_0 + w_{sj})^2} \prod_{l_2=1; l_2 \neq s+1}^N \frac{j_0}{j_0^2 + w_{(l_2-1)j}^2} \right) \quad (2-6)$$

至于 $R(2l_1)$ 和 $R(2l_1+1)$, 在式(2-5)和式(2-6)中用 l_1 取代 m_1 就可得到。 $w_{(l_2-1)j}$ 是与洛伦兹部分相关的 j 方向上的光束宽度参数。由于洛伦兹光束在傍轴传输时保持正交特性, 所以高阶洛伦兹-高斯光束在傍轴传输时也保持互相正交, 这可用 Parseval 定理证实:

$$\langle E(x, y, z), E'(x, y, z) \rangle = \langle E(x_0, y_0, 0), E'(x_0, y_0, 0) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_m(x_0, 0) E'_m(x_0, 0) dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} E_n(y_0, 0) E'_n(y_0, 0) dy_0 = 0 \quad (2-7)$$

式中, $E(x, y, z)$ 和 $E'(x, y, z)$ 表示两个不同的傍轴高阶洛伦兹-高斯光束。

现在, 考虑最简单的情形即 $N=1$ 。在此条件下, 存在四个互相正交的高阶洛伦兹-高斯光束:

$$E^{00}(x_0, y_0, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{w_{0x}^{3/2} w_{0y}^{3/2}}{(x_0^2 + w_{0x}^2)(y_0^2 + w_{0y}^2)} \exp\left(\frac{ik\rho_0^2}{2q_0}\right) \quad (2-8)$$

$$E^{01}(x_0, y_0, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{w_{0x}^{3/2} w_{0y}^{1/2} y_0}{(x_0^2 + w_{0x}^2)(y_0^2 + w_{0y}^2)} \left(\frac{ik\rho_0^2}{2q_0}\right) \quad (2-9)$$

$$E^{10}(x_0, y_0, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{w_{0x}^{1/2} w_{0y}^{3/2} x_0}{(x_0^2 + w_{0x}^2)(y_0^2 + w_{0y}^2)} \left(\frac{ik\rho_0^2}{2q_0}\right) \quad (2-10)$$

$$E^{11}(x_0, y_0, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{w_{0x}^{1/2} w_{0y}^{1/2} x_0 y_0}{(x_0^2 + w_{0x}^2)(y_0^2 + w_{0y}^2)} \left(\frac{ik\rho_0^2}{2q_0}\right) \quad (2-11)$$

式中, $\rho_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$; 上标分别表示 x 和 y 方向上的模数。上述四个高阶洛伦兹-高斯(HLG)光束分别称为 HLG₀₀ 光束、HLG₀₁ 光束、HLG₁₀ 光束和 HLG₁₁ 光束, 分别对应于厄米-高斯(HG)光束中的 HG₀₀ 光束、HG₀₁ 光束、HG₁₀ 光束和 HG₁₁ 光束。HLG₀₀ 光束就是洛伦兹-高斯光束。

高阶洛伦兹-高斯光束依赖参数 N 。在本书中, 仅考虑最简单的情形即 $N=1$ 。当 $N=2$ 时, 高阶洛伦兹-高斯光束有 16 个互相正交的模。若 N 为大于 2 的整数, 将会有更多的互相正交的光束, 但是它们的光束特性可以用本书中相同的方法探讨。

2.2 高阶洛伦兹-高斯光束经傍轴 ABCD 光学系统的传输

当高阶洛伦兹-高斯光束的三个光束参数 w_0 、 w_{0x} 和 w_{0y} 均远大于光波长时, 其传输可在傍轴近似的框架内处理。当高阶洛伦兹-高斯光束通过一个傍轴 ABCD 光学系统时, 它应满足柯林斯积分公式^[19]:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda B} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x_0, y_0, 0) \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A\rho_0^2 - 2(x_0x + yy_0) + D\rho^2]\right\} dx_0 dy_0 \quad (2-12)$$

式中, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$; A 、 B 、 C 和 D 为源平面和观察平面间的傍轴光学系统的变换矩

阵元。变换矩阵元间有如下关系：

$$AD - BC = 1 \quad (2-13)$$

下面以 HLG₀₁ 光束为例, 导出其经傍轴 ABCD 光学系统的传输公式, 其他光束的传输公式可用类似方法得到。将式(2-9)代入式(2-12), 有

$$E^{01}(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda B} \exp(ikz) T_1(x, z) T_2(y, z) \quad (2-14)$$

式中

$$T_1(x, z) = w_{0x} \sqrt{\frac{2w_{0x}}{\pi}} \exp\left(\frac{ikC_1 x^2}{2A_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_0^2 + w_{0x}^2} \exp\left[\frac{ikA_1}{2B} \left(x_0 - \frac{x}{A_1}\right)^2\right] dx_0 \quad (2-15)$$

$$T_2(y, z) = \sqrt{\frac{2w_{0y}}{\pi}} \exp\left(\frac{ikC_1 y^2}{2A_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{y_0^2 + w_{0y}^2} \exp\left[\frac{ikA_1}{2B} \left(y_0 - \frac{y}{A_1}\right)^2\right] dy_0 \quad (2-16)$$

其中, $A_1 = A + B/q_0$; $C_1 = C + D/q_0$ 。在式(2-15)和式(2-16)中, 使用了 $A_1 D - BC_1 = 1$ 予以简化表达式。根据卷积的定义, 式(2-15)和式(2-16)可表示成卷积的形式为

$$T_1(x, z) = w_{0x} \sqrt{\frac{2w_{0x}}{\pi}} \exp\left(\frac{ikC_1 x^2}{2A_1}\right) \left[f_1\left(\frac{x}{A_1}\right) \otimes f_2\left(\frac{x}{A_1}\right) \right] \quad (2-17)$$

$$T_2(y, z) = \sqrt{\frac{2w_{0y}}{\pi}} \exp\left(\frac{ikC_1 y^2}{2A_1}\right) \left[f_3\left(\frac{y}{A_1}\right) \otimes f_2\left(\frac{y}{A_1}\right) \right] \quad (2-18)$$

式中, 符号“ $\otimes$ ”表示卷积; 辅助函数 $f_1(\tau)$ 、 $f_2(\tau)$ 和 $f_3(\tau)$ 分别定义为

$$f_1(\tau) = \frac{1}{w_{0x}^2 + \tau^2} \quad (2-19)$$

$$f_2(\tau) = \exp\left(\frac{ikA_1}{2B} \tau^2\right) \quad (2-20)$$

$$f_3(\tau) = \frac{\tau}{w_{0y}^2 + \tau^2} \quad (2-21)$$

$f_1(\tau)$ 、 $f_2(\tau)$ 和 $f_3(\tau)$ 相应的傅里叶变换为

$$\widetilde{f_1(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_{0x}^2 + \tau^2} \exp(i\xi\tau) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{w_{0x}} \exp(-w_{0x}|\xi|) \quad (2-22)$$

$$\widetilde{f_2(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ikA_1}{2B} \tau^2\right) \exp(i\xi\tau) d\tau = \sqrt{\frac{iB}{kA_1}} \exp\left(\frac{B\xi^2}{2ikA_1}\right) \quad (2-23)$$

$$\widetilde{f_3(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{w_{0y}^2 + \tau^2} \exp(i\xi\tau) d\tau = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\xi|}{\xi} \exp(-w_{0y}|\xi|) \quad (2-24)$$

傅里叶变换的积原理有^[20]

$$f_1(\tau) \otimes f_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f_1(\xi)} \widetilde{f_2(\xi)} \exp(-i\xi\tau) d\xi \quad (2-25)$$

因此,式(2-17)和式(2-18)分别为

$$\begin{aligned} T_1(x, z) = & \sqrt{\frac{i w_{0x} B}{k A_1}} \exp\left(\frac{i k C_1 x^2}{2 A_1}\right) \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{B \xi^2}{2 i k A_1} - \left(w_{0x} + i \frac{x}{A_1}\right) \xi\right] d\xi \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{B \xi^2}{2 i k A_1} - \left(w_{0x} - i \frac{x}{A_1}\right) \xi\right] d\xi \right\} \end{aligned} \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} T_2(y, z) = & i \sqrt{\frac{i w_{0y} B}{k A_1}} \exp\left(\frac{i k C_1 y^2}{2 A_1}\right) \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{B \xi^2}{2 i k A_1} - \left(w_{0y} + i \frac{y}{A_1}\right) \xi\right] d\xi \right. \\ & \left. - \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{B \xi^2}{2 i k A_1} - \left(w_{0y} - i \frac{y}{A_1}\right) \xi\right] d\xi \right\} \end{aligned} \quad (2-27)$$

对式(2-26)和式(2-27)进行积分,可得

$$T_1(x, z) = \sqrt{\frac{\pi w_{0x}}{2}} \exp\left(\frac{i k C_1 x^2}{2 A_1}\right) [E_x^+(x, z) + E_x^-(x, z)] \quad (2-28)$$

$$T_2(y, z) = i \sqrt{\frac{\pi w_{0y}}{2}} \exp\left(\frac{i k C_1 y^2}{2 A_1}\right) [E_y^+(y, z) - E_y^-(y, z)] \quad (2-29)$$

式中

$$E_j^{\pm}(j, z) = \exp\left[\frac{k A_1}{2 i B} \left(w_{0j} \pm i \frac{j}{A_1}\right)^2\right] \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{k A_1}{2 i B}} \left(w_{0j} \pm i \frac{j}{A_1}\right)\right] \quad (2-30)$$

其中, $\operatorname{erfc}(x)$ 为余误差函数。因此, HLG₀₁ 光束经傍轴 ABCD 光学系统的传输公式为

$$\begin{aligned} E^{01}(x, y, z) = & \frac{\pi \sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{2 \lambda B} \exp\left(ikz + i \frac{k \rho^2}{2q}\right) \\ & \cdot [E_x^+(x, z) + E_x^-(x, z)] [E_y^+(y, z) - E_y^-(y, z)] \end{aligned} \quad (2-31)$$

式中, z 平面上的 q 参数满足 ABCD 定律, 即

$$q = \frac{A_1}{C_1} = \frac{A q_0 + B}{C q_0 + D} \quad (2-32)$$

类似地, 可求得 HLG₀₀ 光束、HLG₁₀ 光束和 HLG₁₁ 光束经傍轴 ABCD 光学系统的传输公式:

$$E^{00}(x, y, z) = \frac{\pi \sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{2 i \lambda B} \exp\left(ikz + i \frac{k \rho^2}{2q}\right)$$

$$\cdot [E_x^+(x, z) + E_x^-(x, z)][E_y^+(y, z) + E_y^-(y, z)] \quad (2-33)$$

$$E^{10}(x, y, z) = \frac{\pi \sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{2\lambda B} \exp\left(ikz + i \frac{k\rho^2}{2q}\right) \cdot [E_x^+(x, z) - E_x^-(x, z)][E_y^+(y, z) + E_y^-(y, z)] \quad (2-34)$$

$$E^{11}(x, y, z) = \frac{i\pi \sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{2\lambda B} \exp\left(ikz + i \frac{k\rho^2}{2q}\right) \cdot [E_x^+(x, z) - E_x^-(x, z)][E_y^+(y, z) - E_y^-(y, z)] \quad (2-35)$$

图 2-1 和图 2-2 分别给出了 HLG₀₀ 光束、HLG₀₁ 光束、HLG₁₀ 光束和 HLG₁₁ 光束在源平面和经自由空间传输在远场 $z = 10z_r = 5kw_0^2$ 处的归一化强度分布。对于自由空间, 矩阵元分别为 $A=D=1, B=z$ 和 $C=0$ 。计算参数选取如下: $w_0 = 10\lambda, w_{0x} = 15\lambda$ 和 $w_{0y} = 20\lambda$ 。如果垂直方向上强度的标签在各子图中是相同的, 仅标注在子图(b)和(d)中以使图显得更紧凑些。从光斑上看, HLG₀₀ 光束、HLG₀₁ 光束、HLG₁₀ 光束和 HLG₁₁ 光束分别对应于具有相同模数的厄米-高斯光束。为了进一步比较高阶洛伦兹-高斯光束和厄米-高斯光束的发散性, 下面以 HLG₀₁ 光束和 HG₀₁ 光束为比较对象。由于 HLG₀₁ 光束有三个光束参数 w_0, w_{0x} 和 w_{0y} , 下面的计算仅是示例。图 2-3 给出了 HLG₀₁ 光束和 HG₀₁ 光束在源平面的归一化强度分布, 其中, w_0 为

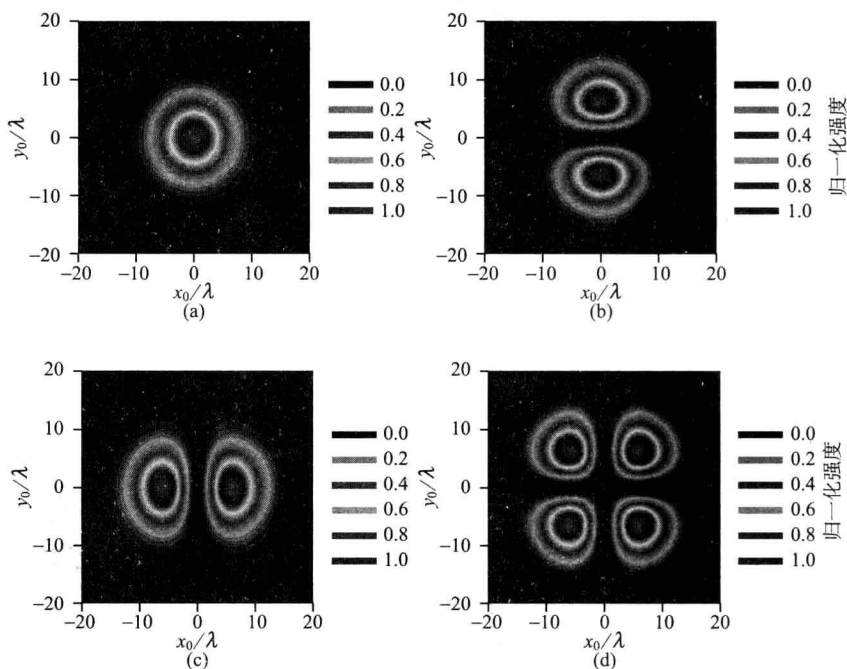


图 2-1 高阶洛伦兹-高斯光束在源平面上归一化强度分布的轮廓图

(a) HLG₀₀ 光束; (b) HLG₀₁ 光束; (c) HLG₁₀ 光束; (d) HLG₁₁ 光束

20λ 。对于给定的 w_0 值, HLG₀₁ 光束中两个瓣的间距由参数 w_{0x} 和 w_{0y} 决定。更为重要的是, HLG₀₁ 光束的形状取决于参数 w_{0x} 和 w_{0y} 。在源平面上, HLG₀₁ 光束的光斑要比 HG₀₁ 光束的小。图 2-4 给出了 HLG₀₁ 光束和 HG₀₁ 光束在观察平面 $z = 1000\lambda$ 上的归一化强度分布。在 w_0 值固定的前提下, HLG₀₁ 光束的发散性取决于参数 w_{0x} 和 w_{0y} 。 w_{0x} 或 w_{0y} 越小, 相应方向上的发散性就越大。对比图 2-3 和图 2-4, 不难发现子图 (a) 和 (c) 中 HLG₀₁ 光束的发散性要比子图 (d) 中 HG₀₁ 光束的大。在源平面, HG₀₁ 光束的光斑要明显比 $w_{0x} = w_{0y} = 30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束大。然而在观察平面 $z = 1000\lambda$ 上, HG₀₁ 光束的光斑基本上与 $w_{0x} = w_{0y} = 30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束的相同。因此, 子图 (b) 中 HLG₀₁ 光束的发散性也比子图 (d) 中 HG₀₁ 光束的大。

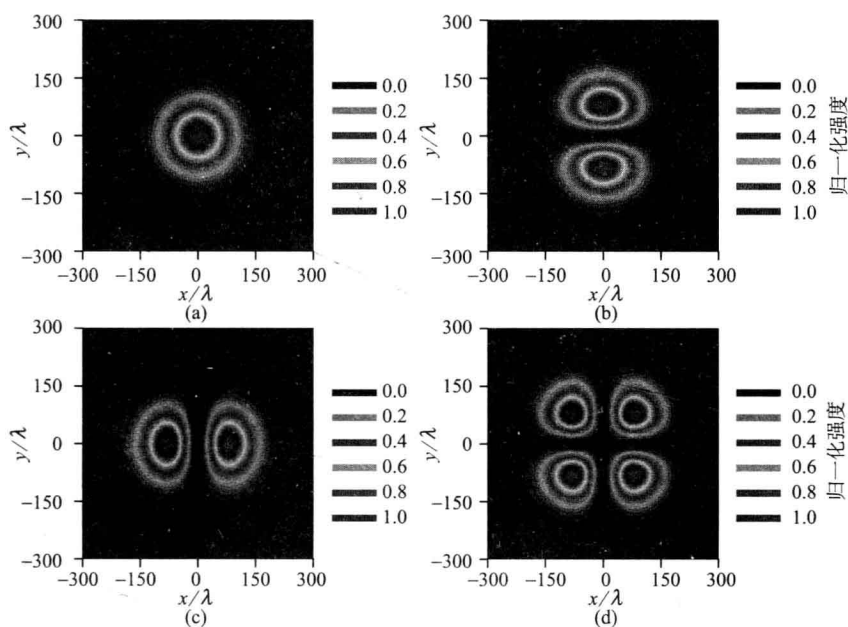
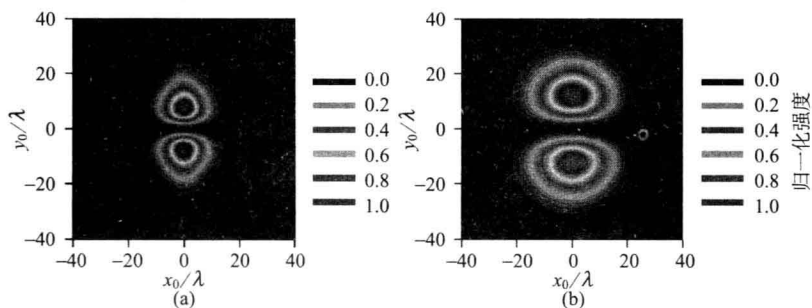


图 2-2 高阶洛伦兹-高斯光束在参考面 $z = 10z_r$ 上归一化强度分布的轮廓图

(a) HLG₀₀ 光束; (b) HLG₀₁ 光束; (c) HLG₁₀ 光束; (d) HLG₁₁ 光束



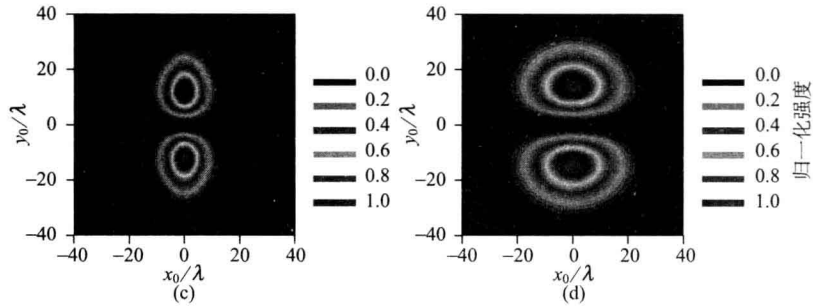


图 2-3 HLG₀₁ 光束和 HG₀₁ 光束在源平面上的归一化强度分布的轮廓图

(a) $w_{0x}=w_{0y}=10\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束; (b) $w_{0x}=w_{0y}=30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束;
(c) $w_{0x}=10\lambda$ 和 $w_{0y}=30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束; (d) HG₀₁ 光束

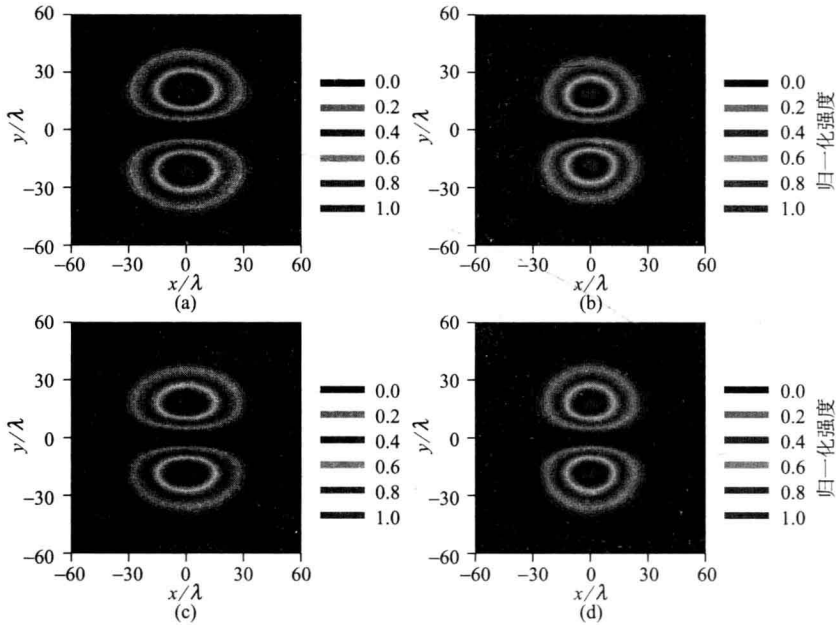


图 2-4 HLG₀₁ 光束和 HG₀₁ 光束在观察平面 $z=1000\lambda$ 上的归一化强度分布的轮廓图

(a) $w_{0x}=w_{0y}=10\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束; (b) $w_{0x}=w_{0y}=30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束;
(c) $w_{0x}=10\lambda$ 和 $w_{0y}=30\lambda$ 的 HLG₀₁ 光束; (d) HG₀₁ 光束

2.3 高阶洛伦兹-高斯光束的傍轴光束传输因子

为了进一步定量比较 HLG 光束和 HG 光束的发散性,需计算 HLG 光束的光

束传输因子。光束传输因子即 M^2 因子用于表征激光束的光束质量。在给定光束发散角的情况下,激光束的 M^2 因子限制了其能聚焦的程度。光束传输因子与光束功率一起决定了激光束的明亮程度。 M^2 因子越小,激光束的光束质量越好。在傍轴框架内, M^2 因子必定大于或等于 1,而且, $M^2 = 1$ 仅适用于完全相干激光束。在此,推导光束传输因子使用的是二阶矩法^[21,22]。光束传输因子是一个不变量,因此在源平面上计算它。首先,考虑 HLG₀₁ 光束的 M^2 因子。将 HLG₀₁ 光束在源平面上的光场表示为

$$E^{01}(x_0, y_0, 0) = E(x_0, 0)E(y_0, 0) \quad (2-36)$$

式中

$$E(x_0, 0) = \sqrt{\frac{2w_{0x}}{\pi}} \frac{w_{0x}}{w_{0x}^2 + x_0^2} \exp\left(-\frac{x_0^2}{w_0^2}\right) \quad (2-37)$$

$$E(y_0, 0) = \sqrt{\frac{2w_{0y}}{\pi}} \frac{y_0}{w_{0y}^2 + y_0^2} \exp\left(-\frac{y_0^2}{w_0^2}\right) \quad (2-38)$$

根据标准定义,HLG₀₁ 光束在 x 方向和 y 方向上的一阶矩分别为^[21,22]

$$\langle x_0 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_0 |E(x_0, 0)|^2 dx_0}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(x_0, 0)|^2 dx_0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2x_0^2}{w_0^2}\right) \frac{x_0}{(w_{0x}^2 + x_0^2)^2} dx_0}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2x_0^2}{w_0^2}\right) \frac{1}{(w_{0x}^2 + x_0^2)^2} dx_0} = 0 \quad (2-39)$$

$$\langle y_0 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y_0 |E(y_0, 0)|^2 dy_0}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(y_0, 0)|^2 dy_0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2y_0^2}{w_0^2}\right) \frac{y_0^3}{(w_{0y}^2 + y_0^2)^2} dy_0}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2y_0^2}{w_0^2}\right) \frac{y_0^2}{(w_{0y}^2 + y_0^2)^2} dy_0} = 0 \quad (2-40)$$

因此,HLG₀₁ 光束在 x 方向和 y 方向上的二阶矩分别为^[21,22]

$$\begin{aligned} \langle x_0^2 \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x_0 - \langle x_0 \rangle)^2 |E(x_0, 0)|^2 dx_0}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(x_0, 0)|^2 dx_0} = w_{0x}^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_x \tau^2) \frac{\tau^2}{(1 + \tau^2)^2} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_x \tau^2) \frac{1}{(1 + \tau^2)^2} d\tau} \\ &= w_{0x}^2 \frac{\sqrt{\pi}(1 + 2a_x) \exp(a_x) \operatorname{erfc}(\sqrt{a_x}) - 2\sqrt{a_x}}{\sqrt{\pi}(1 - 2a_x) \exp(a_x) \operatorname{erfc}(\sqrt{a_x}) + 2\sqrt{a_x}} \end{aligned} \quad (2-41)$$

$$\langle y_0^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (y_0 - \langle y_0 \rangle)^2 |E(y_0, 0)|^2 dy_0}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(y_0, 0)|^2 dy_0} = w_{0y}^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_y \tau^2) \frac{\tau^4}{(1 + \tau^2)^2} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_y \tau^2) \frac{\tau^2}{(1 + \tau^2)^2} d\tau}$$