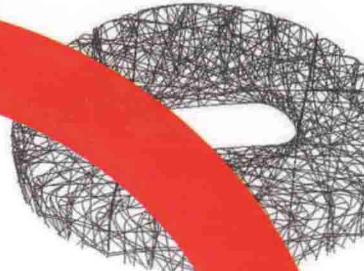

数学开心辞典（第二版）

Dictionary of Mathematical Recreation

王青建　主编

史论结合，科学趣味
雅俗共赏，开卷有益

科学出版社

数学开心辞典

（第二版）

王青建 主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书由与数学有关的 11 个趣味单元构成，内容涵盖奇数妙图、游戏大观、智力趣题、幽默专栏、古今谜语、中外诗联、学界趣闻、数字语言、名题赏析、数学前沿、名人名言。通过编者的分析评说，力图展现数学科学丰富多彩的内涵，扩展从事数学工作的视野，了解数学娱乐中快乐有趣的原委，掌握参与游戏制胜的技巧，为读者提供接近数学、感受数学的机会，增进对数学的理解与热爱。

本书可供数学研究与教育工作者、大中小学师生以及广大数学爱好者参阅。

图书在版编目(CIP)数据

数学开心辞典/王青建主编. —2 版. —北京：科学出版社，2014.1

ISBN 978-7-03-039241-1

I. 数… II. 王… III. 数学–普及读物 IV. O1–49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 288455 号

责任编辑：顾英利　于　红/责任校对：鲁　素
责任印制：赵德静/封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 9 月第 一 版　　开本：890×1240 1/32
2014 年 1 月第 二 版　　印张：14 1/2
2014 年 1 月第 4 次印刷　　字数：495 000

定价：49.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《数学开心辞典》编委会

主　编　王青建

编　委　王青建　张新立　郭铁男

刘　余　杜雨珊　孙　茜

前　言

华裔数学大师陈省身先生说过："数学好玩。"在大多数数学家眼里，数学就是一种游戏，一种人类智力的游戏。由此，数学的学习和研究理应带有乐趣。但长期以来，数学给人的印象却是一幅"冷面孔"，抽象的结构、艰涩的推理、复杂的公式常常使人望而却步。对数学怀有畏难情绪的人也不在少数。实际上，数学作为人类最早从事的科目，本身是丰富多彩的，几千年流传下来的各类经典论题充满人类智慧的闪光，也集中体现了人类文化的精髓。数学无处不在，不仅给我们带来科技的进步、生活的改善，还能带来心智的启迪、精神的愉悦。

本书的编写首先是为了数学教育的需要，采用寓教于乐的方式，力图展现数学科学丰富多彩的内涵，扩展从事数学学习与研究的视野，增进对数学的理解与热爱。其次是为了数学普及的需要，采用雅俗共赏的形式，力图消除数学与公众之间的隔阂，扩展从事数学应用的范围，提供近距离接触数学的机会。第三是为了体现数学文化价值的需要，采用历史与现实结合的例证，力图说明数学成果的原委，使读者阅读之后能有所领悟，有所感触。

本书内容选取的特点是以事实为根据，发挥作者数学史专业的特长。所选内容要求做到言必有据，尽可能给出相关论题的史料来源，严格考证，谨慎选择，避免道听途说和随意转抄。所引题目皆进行验证或推广，改正资料来源的错漏与局限，避免以讹传讹。本书以分类辞条形式取代以往散布于同类书籍中的相关知识，使知识条理化。本书的写作特点是史论结合，科学性与趣味性并存。书末列出参考文献，方便读者进一步查阅。

编　者

2008年8月

2013年7月重记

目　　录

前言

1　奇数妙图……1

2　游戏大观……71

3　智力趣题……144

4　幽默专栏……222

5　古今谜语……239

6　中外诗联……272

7　学界趣闻……307

8　数字语言……332

9　名题赏析……343

10　数学前沿……368

11　名人名言……407

主要参考文献……437

汉语拼音索引……441

初版后记……453

再版后记……455

1 奇数妙图

▶ 数学是关于数和形的学问。大自然背后隐藏的奥秘在我们司空见惯的各种数与形之中若隐若现。对数和形的研究与探索是数学爱好者永恒的话题。准备好纸笔，或者计算器和计算机，让我们一起出发，踏上品味和搜寻奇数妙图的旅程……

完全数

所有真因子之和等于其自身的自然数。又称完美数(perfect number)、完满数。它不仅名字美妙动听，而且数量屈指可数，到2013年2月，人们只找到48个完全数。

完全数最早是由古希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前560~约前480)学派提出的，他们还知道了6(=1+2+3)和28(=1+2+4+7+14)是两个完全数。公元前300年，欧几里得在《几何原本》中给出一个判别完全数的定理：如果$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$是一个素数，则$2^{n-1}\times(2^n-1)$是一个完全数。对于6和28，相当于其中的$n$分别为2和3。到公元1世纪时，根据古希腊另一数学家尼可马霍斯《算术入门》中的记载，希腊人还找到两个新的完全数496和8128，它们对应的n分别相当于5和7。

1456年，一份佚名手稿里记载了$2^{13}-1$是素数，由此可得$2^{12}\times(2^{13}-1)=$ 33 550 336是完全数。1603年意大利数学家卡塔尔迪(P. A. Cataldi，1552~1626)在他的著作《论完全数》(*Trattato de Numeri Perfetti*)中证实了$2^{17}-1$和$2^{19}-1$也是素数，由此得到第6和第7个完全数，即8 589 869 056和137 438 691 328。1644年法国数学家梅森出版《数学物理探索》(*Cogitata Physico Mathematica*)，在书的前言中他提出一个猜想：当$n=2$，3，5，7，13，17，19，31，67，127，257这11个素数时，2^n-1是素数。其中前7个数已为前人所知，而后几个数的验证异常困难，无法断定其真伪。1772年大数学家欧拉在双目失明的情况下凭心算证明了$2^{31}-1$是一个素数，即得到了第8个完全数。1876年法国数学家吕卡(E. Lucas，1842~1891)进一步证明了$2^{127}-1$是一个素数，使人们惊叹梅森的远见卓识，并对梅森的猜想深信不移。为了纪念他的贡献，数学界将形如2^n-1的数称为“梅森数”，如果该数是一个素数，就叫“梅森素数”，这种数都用M_n表示。1883年佩乌森(J. Pervusin)找到了一个新的梅森素数$n=61$，即$M_{61}=2^{61}-1$是素数。这是梅森漏掉的一个素数，按顺序排应该

组成第 9 个完全数。

1903 年，在美国数学会召开的年会上，一位叫科尔(F. N. Cole，1861~1926)的数学家作了一个别致的“发言”。他一声不响地走上黑板开始演算，写了满满一黑板后又一言不发地回到座位上，黑板底部留下一个算式：$2^{67}-1=193\ 707\ 721\times761\ 838\ 257\ 287$。会场上沉寂片刻后爆发出一阵热烈的掌声，大家已经看明白，科尔分解了这个高达 20 位的大数，从而否定了梅森提出的第 9 个数是素数的结论。据说这一结论花了科尔 3 年中全部星期天的时间。

从此以后，人们不再盲从，开始重新审查梅森的结果。1911 年和 1914 年鲍尔斯(R. E. Powers)和福克贝尔古(E. Fauquembergue)分别独立找到了梅森漏掉的另外两个素数 M_{89} 和 M_{107}，即得到了第 10 和第 11 个完全数。1922 年数学家克赖奇克(M. Kraitchik)验证了 M_{257} 不是素数，但他当时没有给出这一合数的因子，直到 20 世纪 80 年代人们才知道它有 3 个素因子。按顺序来排，当年梅森给出的 M_{127} 应该是第 12 个梅森素数。在电子计算机发明前，人们也只找到由这些梅森素数组成的 12 个完全数。

电子计算机的应用大大加快了寻找梅森素数的步伐。1952 年数学家鲁滨逊(R. M. Robinson)等在洛杉矶使用国家标准局计算机(SWAC)，从 1 月 30 日到 10 月 7 日找到 5 个梅森素数，其中的 n 分别为 521，607，1279，2203，2281。此后，随着计算机性能和计算程序的改进，新的梅森素数不断出现。需要注意的是，新的梅森素数也往往是新的素数。1963 年美国伊利诺伊大学数学系的吉利斯(D. Gillies)使用 ILLIAC 型计算机找到第 21、22、23 个梅森素数，其中第 23 个的 n=11 213。该系为纪念这一突出成就，在它寄出的每个信封上都印有“$2^{11213}-1$是素数”的字样。1971 年 3 月 4 日晚，美国哥伦比亚广播公司中断了正常节目播放，发布了塔克曼(B. Tuckerman)使用 IBM360-91 型计算机找到新的梅森素数 $M_{19\,937}$ 的消息，IBM 公司当仁不让，将“$2^{19\,937}-1$ 是素数”的字样印到了它的办公信封上。

一般来说，寻找梅森素数的计算程序是随 n 的增大顺序进行的，到 1996 年人们已经找到 35 个梅森素数。新的计算程序借助了因特网，“因特网梅森素数大搜索”(GIMPS)国际合作项目，为梅森素数搜索工作带来了突破性进展，这已成为当今科学研究的热点课题之一。2008 年 8 月 23 日，美国加利福尼亚大学(加州大学)洛杉矶分校以计算机专家史密斯(E.Smith)为首的专家组用 75 台计算机同时联网运行，发现了第 47 个梅森素数(第 45、46 个的发现反在其后)，这距第 44 个梅森素数的发现已时隔两年之久。其 n = 43 112 609，共有 12 978 189 位数！如果用普通字号将它连续写下来，长度可超过 50 公里

(千米)！这也是在加利福尼亚大学洛杉矶分校发现的第 8 个梅森素数。2008 年 9 月 6 日德国一化学公司的电子工程师埃尔费尼希(H.-M. Elvenich)发现了一个新的梅森素数 $2^{37\ 156\ 667}-1$，该数字有 11 185 272 位数。有趣的是，它比早发现的那个要小一点(这也是史无前例的)。2009 年斯特林莫(O.M.Strindmo)发现新的梅森素数 $2^{42\ 643\ 801}-1$，仍比史密斯发现的要小。这 3 个新发现的梅森素数也是首次突破 1000 万位的素数。目前最大的梅森素数是 2013 年 2 月由库珀(Cooper)、沃尔特曼(Woltman)、库罗夫斯基(Kurowski)等发现的，其中的 $n = 57\ 885\ 161$。不过人们仍不能保证寻找是顺序的，而只能说已经找到了 48 个完全数，见表 1-1。

表 1-1　完全数表

序号	n 的数值	确认年代	序号	n 的数值	确认年代
1	2	公元前 6 世纪	25	21 701	1978
2	3	公元前 6 世纪	26	23 209	1979
3	5	公元 2 世纪	27	44 497	1979
4	7	公元 2 世纪	28	86 243	1983
5	13	1456	29	110 503	1988
6	17	1603	30	132 049	1983
7	19	1603	31	216 091	1985
8	31	1772	32	756 839	1992
9	61	1883	33	859 433	1994
10	89	1911	34	1 257 787	1996
11	107	1914	35	1 398 269	1996
12	127	1876	36	2 976 221	1997
13	521	1952	37	3 021 377	1998
14	607	1952	38	6 972 593	1999
15	1 279	1952	39	13 466 917	2001
16	2 203	1952	40	20 996 011	2003
17	2 281	1952	41	24 036 583	2004
18	3 217	1957	42	25 964 951	2005
19	4 253	1961	43	30 402 457	2005
20	4 423	1961	44	32 582 657	2006
21	9 689	1963	45	37 156 667	2008
22	9 941	1963	46	42 643 801	2009
23	11 213	1963	47	43 112 609	2008
24	19 937	1971	48	57 885 161	2013

完全数有许多奇妙的性质。例如，它们都是连续整数之和($28 = 1+2+3+4+5+6+7$，$496 = 1+2+3+\cdots+31$)；都是等比数列之和($28 = 4+8+16$，$496 = 16+32+64+128+256$)；都是连续奇数的立方和(第一个6除外)($28 = 1^3+3^3$，$496 = 1^3+3^3+5^3+7^3$)；大于6的偶完全数的“数字根”均为1，即完全数的数字反复相加的最终结果都是1(28：2+8=10，1+0=1；496：4+9+6=19，1+9=10，1+0=1)；全部因子的倒数之和都等于2($1/1+1/2+1/3+1/6 = 1/1+1/2+1/4+1/7+1/14+1/28 = 2$)；末尾数字都是6或28；等等。

多倍完全数　全部因子(包括自身)之和等于该数本身的 n 倍($n > 2$)。其中 n 称为这种完全数的“指标”。由此，一般所说的完全数可以称为2倍完全数。目前发现的3倍完全数有6个，其中最小的两个3倍完全数是120和672。30 240和32 760是两个最小的4倍完全数。14 182 439 040是5倍完全数。而154 345 556 085 770 649 600是6倍完全数。目前已知的多倍完全数超过1000个，其中的8倍完全数就有400多个。这些多倍完全数中最大指标的完全数是9倍。

亲和数　又称友好数(amicable number)，是完全数的一种推广形式，其定义是：A、B 两个自然数中，如果 A 的全部真因子之和等于 B，同时 B 的全部真因子之和等于 A，则称 A 与 B 是一对亲和数。它最早是由毕达哥拉斯学派提出的，说这种数象征着友谊。他们还给出了第一对亲和数220与284($220 = 1+2+4+71+142$，$284 = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$)。

亲和数的寻找比完全数更加困难，因为它涉及两个互相有关系的数。公元9世纪阿拉伯数学家塔比伊本库拉(Thābit ibn Qurra，约826～901)提出一种方法：若 $p = 3\cdot 2^n - 1$，$q = 3\cdot 2^{n-1} - 1$，$r = 9\cdot 2^{2n-1} - 1$(n 为正整数)是3个素数，则 $a = 2^n pq$，$b = 2^n r$ 是一对亲和数。例如，$n = 2$ 时，有 $p = 11$，$q = 5$，$r = 71$ 都是素数，则 $a = 220$，$b = 284$ 是亲和数。

据梅森记载，1636年费马得到第二对亲和数：$17\,296 = 2^4\cdot 23\cdot 47$，$18\,416 = 2^4\cdot 1151$。从形式上看符合塔比伊本库拉给出的方法，即 $n = 4$ 时，有 $p = 47$，$q = 23$，$r = 1151$ 都是素数，但费马似乎另有“蹊径”。费马的法则是：

5	11	23	47
2	4	8	16
6	12	24	48
	71	287	1151

先给出几何级数2，4，8，…，在下一行列出其3的倍数；在上一行列出其3

的倍数减 1；最后一行列出 $6\cdot 12-1$，$12\cdot 24-1$，…。当一列数上下行都是素数，且其前一列数上面的数也是素数时，就得到一对亲和数。例如，$4\cdot 71=284$，$4\cdot 5\cdot 11=220$。类似地 $16\cdot 1\,151=18\,416$，$16\cdot 23\cdot 47=17\,296$。稍加验证可知，费马的方法与塔比伊本库拉的方法是一样的，只是给出具体计算的数表。

受费马的鼓舞，笛卡儿用类似的方法于 1638 年找到第三对亲和数：

$$9\,363\,584=2^7\cdot 191\cdot 383，9\,437\,056=2^7\cdot 73\,727。$$

实际上，笛卡儿是将费马的数表向后扩 3 列，并验证了所需的 3 个数都是素数。

1750 年欧拉提出了寻找亲和数要解决的 5 个问题并给出解答，并以此为契机一下子列出了 64 对亲和数！其中包括了前面已知的 3 对亲和数。虽然后人发现其中有两对亲和数是错的，但欧拉还是以发现 59 对新的亲和数而令人赞叹不已。更可贵的是，有的亲和数比费马发现的第二对亲和数要小许多，如 6 232—6 368。欧拉的工作极大地鼓舞了后人寻找亲和数的热情，迄今为止，人们已找到了 1000 多万对亲和数。其中 10^7 以内超过 100 对，10^{10} 以内超过 1000 对，10^{13} 以内超过 1 万对，下面列出 10 万以内的 13 对亲和数，其中第二“小”的一对 1184—1210 是在 1866 年由一位年仅 16 岁的男孩发现的，而比欧拉给出的亲和数小的还有 2 对：

220—284，1184—1210，2620—2924，5020—5564，6232—6368，10744—10856，12285—14595，17296—18416，63020—76084，66928—66992，67095—71145，69615—87633，79750—88730。

亲和数有两种推广的形式。一种是 3 个数一组的亲和数，其中任何一个数的真因子都等于其他两个数之和，如 103 340 640，123 228 768，124 015 008 和 1 945 330 728 960，2 324 196 638 720，2 615 631 953 920 等。这是更不容易发现的数组，因为后一组数分别有 959、959 和 479 个因子。另一种推广是“自循环数”，即 A 的真因子之和等于 B，B 的真因子之和等于 C，C 的真因子之和等于……经过若干轮又恰好等于 A。例如，12 496 的真因子之和为 14 288，它的真因子之和为 15 472，再往下是 14 536，再是 14 264，而它的真因子之和恰是开始的数 12 496。这是一个 5 轮的自循环数。这样，亲和数可以视为是 2 轮的自循环数。有些自循环数的轮数非常大，如 14 316，要经过 28 轮才回到自身。

斐波那契数列的性质

斐波那契数列是通过生小兔问题引出的(见斐波那契兔子问题)，由递推关系式 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 和通项公式可以得到斐波那契数列许多有趣且“神秘”的性

质。早在 1680 年意大利天文学家、数学家卡西尼(J. D. Cassini，1625~1712)就发现 $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^{\ 2}=(-1)^n$，由此可知 F_n 与 F_{n+1} 一定是互素的。1753 年英国数学家西姆森(R. Simson，1687~1768)发现斐波那契数列前后两项之比是只有数 1 的连分数的第 n 个渐近分数，即

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots\cfrac{1}{1}}}},$$

这是斐波那契数列与连分数有联系的第一个发现，其中等号右边是连分数中最简单的形式。后人又证明，当 n 趋于无穷时，该连分数式也趋于无穷，是无限连分数中最简单的一个。

斐波那契数列除了有许多数论性质和级数求和性质外，还有个特别的倒数性质：

$$\frac{1}{F_n}=\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}。$$

此外，斐波那契数列与某些循环小数有密切联系，将该数列逐个退后一位相加，前面加上 0 和小数点，其值为 1/89；若隔位取数如此相加，得 1/71 等。斐波那契数列的尾数组成 60 项的循环数列。从递推关系式可知，不存在以斐波那契数为边长的三角形和四面体。

近年来有人研究，斐波那契数列与幻方还有一定的联系。将斐波那契数列中第三项起的连续 9 个数 3，5，8，13，21，34，55，89，144 依次替换 3 阶幻方[图 1-1(a)]中的 1~9 时，形成一个新的方阵[图 1-1(b)]。这一方阵虽然不具有幻方的通常性质，但它 3 个行的乘积之和(9360 + 9240 + 9078 = 27 678)等于 3 个列的乘积之和(9256 + 9072 + 9350 = 27 678)。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(a)

13	144	5
8	21	55
89	3	34

(b)

图 1-1

比利时数学家策肯多夫(Edouard Zeckendorf ，1901 ~ 1983)曾给出一个定理：任意一个自然数都有一个唯一的表达式，可以表示为不相邻的斐波那契数之和。例如，54 = 34 + 13 + 5 + 2；100 = 89 + 8 + 3。

注意 100 还可以表示为其他方式的斐波那契数之和，如 $100 = 89 + 8 + 2 + 1 = 55 + 34 + 8 + 3$，但不符合策肯多夫定理，因为 2 和 1 是相邻的，同理 55 和 34 也是相邻的。

黄金分割数

黄金分割(golden section)又称“中末比”或“中外比”(extreme and mean ratio)：分已知线段为两部分，使其中一部分是全线段与另一部分的比例中项。如图 1-2 所示，设 $AB=1$，要求点 C 是所求的黄金分割点，即 $AC/AB = BC/AC$，容易得出

图 1-2

$$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\,033\,988\,749\,89\cdots。$$

这个数一般用 G 来表示，叫黄金分割数。1509 年意大利数学家帕乔利专门为此出版一本书叫《神圣比例》(*De Divina Proportione*)。由于毕达哥拉斯学派的徽章或联络标志是正五角星，它的边长之比就导致黄金分割数，人们推测该学派可能已掌握了中末比的方法。目前已知最早系统研究中末比的是古希腊数学家欧多克索斯，他创立的比例论，包括中末比被欧几里得收入《几何原本》中，流传至今。

黄金分割数也有一些奇妙的性质。例如，$1/G=1+G$。连续使用这个式子，就可以将 G 展成无穷连分数，即斐波那契数列中前项与后项之比的连分数式取极限的情形。黄金分割还有一个无穷表达式，其根号下的数字全部都是 1

$$G+1=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\ 。$$

斐波那契数列与黄金分割

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=G,$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[G^{-n}+(-1)^{n+1}G^n]\ ;$$

不等式 $\frac{1}{2}=\frac{F_2}{F_3}<\frac{F_4}{F_5}<\cdots<\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}<\cdots<\ G\ <\cdots<\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}<\cdots<\frac{F_3}{F_4}<\frac{F_1}{F_2}=1$，

由此可知，黄金分割数位于 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 与 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 之间，且更靠近于后者。

根式化简

①根式化简是古代数学中比较难的课题，对这一问题研究较早且影响较大的是印度著作《莉拉沃蒂》(原意是“美丽”)。《莉拉沃蒂》是印度12世纪最有成就的数学家、天文学家婆什迦罗(Bhāskara Ⅱ，约1114~约1185)的代表作。其中的算术技巧、平面几何和立体几何、代数问题、组合问题等，代表了印度1000~1500年间的最高成就。根式化简问题更是令人叹为观止。例如(用现在的数学符号表示)：

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2+3+5+2\sqrt{2\times3}+2\sqrt{2\times5}+2\sqrt{3\times5}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}。$$

②16世纪为了求解三次方程，数学家开始涉及虚数问题。例如，方程$x^3=15x+4$，$x=4$是它的一个根。但利用求解公式时出现$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$。这意味着实数可以用复数的立方根表示。这里又出现根式化简。实际上，

$$2+\sqrt{-121}=2+11\mathrm{i}=8+12\mathrm{i}-6-\mathrm{i}=2^3+3\cdot2^2\mathrm{i}+3\cdot2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=(2+\mathrm{i})^3,$$

同理，$2-\sqrt{-121}=(2-\mathrm{i})^3$，

因此，$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

$=2+\mathrm{i}+2-\mathrm{i}=4$。

③到17世纪，虚数还没有被人们认可，它到底是什么？好像无人能讲清楚。但德国数学家莱布尼茨却发现一个奇妙的等式：

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}。$$

后来人们才知道，这实际上是“共轭复数的和是实数”的一个典型例证。

根式等式

考察下面两个根式表示的数：

$$a=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}},$$

$$b=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}。$$

看起来是不相干的两个无理数。但用高精度的计算机计算发现，它们的前30位数字都相等：7.381 175 940 895 657 970 987 266 875 46…。

实际上，这是两个完全相等的数。证明如下：

对于正数 x，y，有 $A=xy+\sqrt{x^2+2xy+y^2}=xy+(x+y)$，

$$B=y+\sqrt{x^2(1+y^2)+2xy\cdot x}=y+(x+xy)。$$

显然对任何正数 x，y 都有 $A=B$。取 $x=\sqrt{11-2\sqrt{29}}$，$y=\sqrt{11+2\sqrt{29}}$，

并注意 $xy=\sqrt{11^2-(2\sqrt{29})^2}=\sqrt{5}$，

则有　$A=a$，$B=b$，即 $a=b$。

根式的连分数表示

将 $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$ 记为 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$，则有如下表示：

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots；\qquad \sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots；$$

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots。$$

最简单的是黄金分割数：

$$G=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\approx 0.618。$$

数学家总结出这种表达式在三方面优于小数表达：①有理数的连分式都是有限项，且二次无理数的连分式都是循环的；②连分式表达与进位制无关；③能引出最佳有理逼近，即得到该数的最佳分数近似值。

幸运数

幸运数(lucky numbers)是波兰数学家乌拉姆命名的数，以如下另一种“筛法”构成：将自然数从 1 按顺序排列，1 是第一个幸运数，从 2 开始划去所有序号为偶数的数(2，4，6，8，…)，仅留下奇数；在剩余的数中，3 是第二个幸运数，再将余下来的数重新编序号，把所有序号为 3 的倍数的数(5，11，17，23，…)都划去；7 是第三个幸运数，再将剩余的所有序号为 7 的倍数的数(19，39，…)划去；9 是第四个幸运数，同样将剩余数中所有序号为 9 的倍数的数(27…)划去；……最后剩下的数就是幸运数。下面给出前 100 个自然数中的幸运数：1，3，7，9，13，15，21，

25，31，33，37，43，49，51，63，67，69，73，75，79，87，93，99。

幸运数的构成与素数“埃拉托塞尼筛法”的构成不同，但幸运数与素数却有许多相同之处。例如，在一个给定区间内，幸运数的个数与素数的个数几乎相同，如 100 以内有 25 个素数和 23 个幸运数。从总体上看，这两种数的个数也几乎相同。与素数类似，幸运数也有“孪生幸运数”，即相差为 2 的一对幸运数，如 7 和 9，13 和 15 等。巧合的是，它们的数量也几乎相同，如 100 以内有 8 对孪生素数和 7 对孪生幸运数。素数问题中有大名鼎鼎的“哥德巴赫猜想”，即任何大于 4 的偶数都可以表示为两个素数之和；与此类似，幸运数中也有一个尚未解决的猜想：任何一个偶数都可以表示为两个幸运数之和。对 10 万以内的整数计算机已经验证了该结论，并且一直没有找到反例。

人们发现在乌拉姆图(将自然数按螺旋顺序由内到外依次书写所形成的数字方阵)中素数排在一些斜线上。同样，幸运数也排在一些斜线上。例如，111，73，43，21，7，1，3，13，31 这 9 个幸运数就连成一线，它们是由 $4x^2+2x+1$ 生成，其中的 x 取–3~5。

幸运数有许多独特的性质。例如，1996 年的一个猜想说：任何一个幸运数都是另一个较大幸运数的尾数。例如，7 是 37 的尾数，9 是 49 的尾数，15 是 615 的尾数，87 是 2 187 的尾数，579 是 96 579 的尾数等。

幸运数 2187 很特别：$2187=3^7$，用 3 进制为 10 000 000；后两位数交换再乘以 4，即 $2178\times4=8\ 712$，是 2178 的倒序；$9999-2187=7812$，也只是数字的置换；数 e 的前 4 位数恰为 2187；还有下面的等式：

$2187+1\ 234=3\ 421$，

$2187+12\ 345=14\ 532$，

$2187+123\ 456=125\ 643$，

$2187+1\ 234\ 567=1\ 236\ 754$，

$2187+12\ 345\ 678=12\ 347\ 865$，

$2187+12\ 3456\ 789=123\ 458\ 976$。

自我生成数

下面等式右边的数称为自我生成数：

$987\ 654\ 321-123\ 456\ 789=864\ 197\ 532$，

$9\ 876\ 543\ 210-0\ 123\ 456\ 789=9\ 753\ 086\ 421$。

约分特例

一个分数的结构是 ab/bc，如果约分应当找出分子和分母的最大公约数，用它分别去除分子和分母，就得到约分后的结果。但有些分数可以直接将分子分母中的 b 约掉，结果居然还正确。

如 16 / 64 = 1 / 4，就是直接将分子分母中的 6 约掉。再如 26 / 65、19 / 95、49 / 98 等。这种“运算谬误，结果正确”只是巧合，不能推广。

能移动的数字

一般来说，一道正确的算式中的每一个数字都应该是“各就各位”的，如果其中某一个数字的位置有改动，结果就不一样。当然，也有一些例外。

例如，用 1~9 组成的两个算式 $18\times297=5346$ 和 $198\times27=5346$，其中的 9 就从 2 和 7 之间跑到 1 和 8 之间，但算式的结果不变！

再如，用 0~9 组成的算式 $27\times594=16\,038$ 和 $297\times54=16\,038$，仍然是结果不变，但 9 却悄悄换了位置。这样的算式还有一组：$36\times495=17\,820$ 与 $396\times45=17\,820$。

还有根式的例子，根号里面的数可以跑到外面：

$$\sqrt{10\frac{10}{99}}=10\sqrt{\frac{10}{99}},\quad \sqrt{7\frac{7}{48}}=7\sqrt{\frac{7}{48}},\quad \sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}},$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}},\quad \sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}},\quad \sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}},\quad \cdots。$$

一般地有

$$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}},\quad \sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}。$$

能移动的符号

一个算式中数字位置不动，运算符号改变了位置，一般来说算式的结果就不一样。但同样有例外。

例如，算式 $4\times3243=4324\times3$ 和 $8\times6486=8648\times6$，乘法符号从前面跑到了后面，数值不变，即等号成立。这种数也叫“前呼后拥”数。

又如 $8\times767\,123\,287=876\,712\,328\times7$，虽然乘数高达 9 位数，移动乘号后结果依然成立。

还有一个两个乘号移动合并为一个的例子：$73\times9\times42=7\times3942$。

指数下移

英国趣味数学家亨利 · 杜丹尼给出一个“印刷错误”的例子，即将 2^59^2 排成 2592，却“歪打正着”，恰好相等：$2^59^2=32\times81=2592$。人们后来又发现许多这种指数下移的运算式。例如，

$3^4\cdot425=34\,425$，　$31^2\cdot325=312\,325$，