硕士研究生入学考试

历年真题解析

（经济数学三）

主　编　北京大学数学科学学院　田勇
编　写　双博士考研数学命题研究组
总策划　胡东华

机械工业出版社
China Machine Press

硕士研究生入学考试

历年真题解析

［经济数学三］

主　编　北京大学数学科学学院　田　勇

编　写　双博士考研数学命题研究组

总策划　胡东华

机 械 工 业 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试历年真题解析.经济数学三/田勇主编. -北京:机械工业出版社,2003.4
考研辅导教材
ISBN 7-111-10397-1

Ⅰ.硕... Ⅱ.田... Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 037764 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)
责任编辑:朱 华 郝峥嵘 责任校对:郝峥嵘
封面设计:胡 柱 责任印制:何全君
北京市高岭印刷厂印刷 机械工业出版社出版发行
2003 年 3 月第 2 版 第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 印张 13.75 字数 308.8 千字
定价:16.00 元

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容:考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前一个半月押题讲座

二、讲座总策划及献爱心人:胡东华

三、讲座资料提供:

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组　京城考研命题信息搜集研究组　联合提供

四、免费讲座时间:2003 年 12 月 1 日—2004 年 1 月 15 日

五、网站:中国教育考试双博士网站:http://www.bbdd.cc

六、课程表:

时间 / 科目	12 月第 1 周	12 月第 2 周	12 月第 3 周	12 月第 4 周	1 月第 1 周	1 月第 2 周
政　治	马克思主义哲学 政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	国际政治、时事政治	网上通知	网上通知
英　语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (命题趋势)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测及背诵范文	网上通知
数学一	高数 (1~5)	高数 (6~11)	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学二	高数(1~3)	高数(4~6)	高数(7~11)	线性代数	网上通知	网上通知
数学三	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学四	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

(如有变化,另行通知)

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士：

您好！

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助！师恩难忘，北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一，是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人，双博士曾陪伴我们度过考研岁月的无数个日日夜夜，曾带给我们无数个明示和启发，当然也带给我们今天的成功。

特致此信，向双博士表达我们内心长久以来的感激之情，并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

郑州某大学学生的来信

双博士：

您好！

……

我曾购买了“双博士”的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册，我认为质量很好，因为我在准备 2001 年 6 月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料，仅是每天背《辅导》上的知识点，另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇，而我却考出了 94.5 分的骄人成绩，真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士，也相信考研中借助双博士的力量，会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下，如果可以的话，我想得到代号为“RB12”的《考研应试教程(英语分册)》，或者是代号为“B18A”的《研究生入学考试英语词汇・考点・记忆法・用法详解》。两本书中的任何一本，我都相信会根我带来好运！

另外，……

李 XX

2001 年 11 月 22 日

天津某高校学生的来信

双博士：

你们好！

……

我们都知道，英语学习中，口语是非常重要的，而《英美流行口语》正是我们所需要的，是一场及时雨。五一、五四前后，我校将举办一次口语演讲比赛，我们将把这几本书作为奖品赠送给口语出色的同学，相信他们会很意外，也会很高兴的。双博士为我们着想，我们也希望能以微小之力量，给她的工作以支持和回报。其实，我想，只要我们真正为爱好英语的同学做了事，使他们从中受了益，英语有了提高，就是对“双博士”最好的回报了，对不对？

还有，我校对购买“双博士”图书比较困难，到书店买，常被抢购一空，由老师订购又“姗姗来迟”，所以，我想与你们联系，能否帮同学们统一订购？如可以，请将你们的订购时间、办法等以传真方式告诉我。

……

英语俱乐部会长：于 XX

2002 年 4 月 24 日

前　言

本书属于双博士品牌考研丛书中的数学系列。

从历年的考研试题看,数三有30%—40%的题与数四相同,有一些与近年一些数四试题的命题角度,答题方法很相近。故将有极大参考价值的近年数四试题收在本书,供考生参考。

本书涵盖历年(1991－2003年)数学真题,每题解析体现详尽、经典的风格。其鲜明的特点有:

考点:根据最新的考研大纲,我们对每道真题的考点进行了分析和提炼,希望对读者把握考试的脉搏有所帮助。

思路:这一部分对解题的思维过程予以适当提示,指出常考题型的主要解题方法,帮助考生增加分析理解及解答试题的能力。

解析:解法简单有效,易于熟悉掌握,解答过程详尽,适应不同层次读者的要求。

本书属于"双博士"精品系列丛书中的黄金品牌。

凡购买双博士品牌考研丛书累计60元者,在临考前一个月可获赠英语及政治密押(内部资料)试卷各一套!(详见书中夹页)

本书作者在2003年11、12月份进行考研网上免费押题讲座,届时敬请垂询:http://www. bbdd. cc。此义举将为考生最后的拼搏指点迷津。该讲座已成功举办两年,受益群体多达20万之众。

“双博士”网站留言选登

自从 2002 年 11 月～12 月双博士网站举办考研及四、六级讲座以来，每天都有大量读者留言，交流考试心得和对双博士丛书的观感。现将部分留言选登如下：

作者：考研人　来自：湖北　2003－2－16，23：31：04

留言内容：今天上网把你们的考研网上押题讲座和你们上传的真题对比来看，押中的题还真不少来！希望双博士在 2004 年考研政治理论方面继续给广大考生押题！！

作者：奋斗　来自：福建　2003－2－16，23：40：00

留言内容：是的，我认为政治理论做的最好的部分是形势与政策部分，其中有关 16 大的考题共 8 分全部押中了；毛概部分押中了中国共产党的最低纲领和最高纲领部分；当代部分即最后的两个选作题，都能从押题的相关部分找到答案，这对我特别有用，因为我是一名理科生，对当代部分的内容不熟悉。谢谢双博士！！！

作者：mmer　来自：四川　2003－2－9，17：16：50

留言内容：双博士教辅真的很不错，我和身边的同学用了都说好！谢谢胡东华老师和编书老师，谢谢你们！

作者：格格　来自：北京　2003－2－18，9：03：44

留言内容：谢谢上帝我的四级终于过了，谢谢小虫和双博士。

作者：红蜻蜓　来自：湖北　2003－2－1，18：40：21

留言内容：今天看了大家的留言和回复获益匪浅。这个网站办的挺好。

作者：杨康　来自：安徽　2002－11－28，18：32：47

留言内容：双博士教育网的同志们，你们出版的书很好。尤其是英语辅导书。你们能给我指导如何做好考研的准备吗？谢谢你们的关心。

作者：MATTHEW　来自：四川　2002－12－2，12：01：37

留言内容：双博士考研单词记忆法非常棒，这次政治押题讲座上传的内容很不错。还有我想问一下胡老师是否是个基督徒！？

作者：谢军华　来自：湖北　2002－12－6，19：06：05

留言内容：谢谢主编为我们提供这么方便的讲座！！在这讲究金钱的世界，你们能全心为我们着想！太难得了。

作者：杨杨　来自：北京　2002－12－4，9：39：01

留言内容：你们出的时政形势政策分析这本书及 9 月以后的补充资料很及时也很全面。谢谢！

作者：吴光华　来自：黑龙江　2002－12－3，18：07：19

留言内容：你们的东西对我帮助很大，你们的书也挺出色，希望你们能够再接再励，办得更好，谢谢！

作者：kaoyan　来自：北京　2002－11－30，10：53：31

留言内容：以前用你们的大学英语资料考四六级感觉很好，最近买了一套考研数学最后冲刺题，也还不错，希望你们多多努力，做好这个网站！很感谢你们！！

目 录

2003 年全国硕士研究生入学统一
数学（三）试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

（1）设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若 x\neq 0,\\ 0, & 若 x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连接，则 λ 的取值是________.

（2）已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

（3）设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, 若 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, 其他,\end{cases}$ 而 D 表示全平面，则

$I=\iint_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

（4）设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0\cdots0,a)^T$，$a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T,$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$ ______.

（5）设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为______.

（6）设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_1^2$ 依概率收敛于________.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

（1）设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

（A）在 $x=0$ 处左极限不存在.　　（B）有跳跃间断点 $x=0$.

（C）在 $x=0$ 处右极限不存在.　　（D）有可去间断点 $x=0$.

（2）设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

（A）$f(x_0,y_0)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.　　（B）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

（C）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.　　（D）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

（3）设 $P_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,条件收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$的敛散性都不定.

(D) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$的敛散性都不定.

(4) 设三阶矩车$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵的秩等于1,则必有

(A)$a = b$或$a + 2b = 0$.　　(B)$a = b$或$a + 2b \neq 0$.

(C)$a \neq b$或$a + 2b = 0$.　　(D)$a \neq b$或$a + 2b \neq 0$.

(5) 设$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$均为$n$维为向量,下列结论不正确的是

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_1\alpha_1 \neq 0$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_1$线性无关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_1$线性相关,则对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_1\alpha_1 = 0$.

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_1$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为$s$。

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_1$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

(6) 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1 = \{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2 = \{$掷第二次出现正面$\}$,

$A_3 = \{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4 = \{$正面出现两次$\}$,则事件

(A)A_1,A_2,A_3相互儿立.　　(B)A_1,A_2,A_4相互独立.

(C)A_1,A_2,A_3两两独立.　　(D)A_1,A_3,A_4两两独立.

三、(本题满分 8 分)

设

$$f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin\pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)},x \in \left[\frac{1}{2},1\right).$$

试补充定义$f(1)$使得$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$.上连续.

四、(本题满分 8 分)

设$f(u,v)$具二阶连续偏导数,且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$,又$g(x,y) = f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$,求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2)\,dxdy,$$

其中积分区域$D = \{(x,y)\,|x^2 + y^2 \leqslant \pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x)g(x)$,其中函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x),\text{且} f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^{x}.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_2x_2+a_3x_3\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 和 b 满足何种关系时,

(1) 方程组有零解;

(2) 方程组有非零解,在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_2^2+x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$,其中二次型的矩阵 A 的特征值之为 1,特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(见经济数学四)

十二、(本题满分 13 分)

设机变量 X 与 Y 独立,其中 X 的概率分布为

$$X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$,

2003 年数学(三) 参考答案及解析

一、填空题

(1)$\lambda > 2$

考点:分段函数的连续性

思路:定义法

[解析] 要使$f(x)$ 的等函数在 $x = 0$ 连续,则

① 首先要求$f(x)$ 连续

由初等函数的连续性知,$x \neq 0$ 时$f(x)$ 连续;于是只需考察$f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性。我们分情况讨论。

Ⅰ. 当 $\lambda < 0$ 时,令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, n = 1,2,\cdots$,则 $x_n \to 0$.

当 $n \to \infty$,且$f(x_n) = x_n^\lambda \cos\frac{1}{x_n} \to +\infty$.

当 $n \to \infty$,$f(x)$ 不连续.

Ⅱ. 当 $\lambda = 0$ 时,令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, n = 1,2,\cdots$,则

$x_n \to 0, y_n \to 0$,当$n \to \infty$ 且

$f(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = 1, f(y_n) = \cos\frac{1}{y_n} = -1$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

可见此时$f(x)$ 也不连续.

Ⅲ. 当 $\lambda > 0$ 时,当$x \to 0$ 时,$|x|^\lambda \to 0$ 而$|\cos\frac{1}{x}| \leqslant 1$,从而

$|f(x)| = |x^\lambda \cos\frac{1}{x}| \leqslant |x|^\lambda \to 0, x \to 0$

即此时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,$f(x)$ 连续.

所以,为使$f(x)$ 连续,当且仅当 $\lambda > 0$.

② 其次要求$f(x)$ 可导(当然,这必须在连续的前提下,即 $\lambda > 0$ 时)

由初等函数的可导性,知 $x \neq 0$ 时$f(x)$ 可导,当$x = 0$ 时,由定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}$$

为使$f(x)$在$x=0$可导,仅需上式极限存在,类似①的讨论知,这当且仅当$\lambda-1>0$,即$\lambda>1$

③最后,在$f(x)$可导的条件,即$\lambda>1$下,要求$f'(x)$连续.注意到此时

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

数似①的讨论知,为使$f(x)$的导函数在$x=0$连续,仅需$\lambda-2>0$,即$\lambda>2$.所以$\lambda>2$.

(2)$4a^6$

考点:导数的几何意义

思路:两曲线相切,切点及切线的性质

由曲线与x轴相切和切点必为曲线与x轴的交点,即函数$f(x)=x^3-3a^2x+b$的零点

令$f'(x)=3x^2-3a^2=0$,得$x^2=a^2$;故切点为$(x_0,0)$,其中$x_0^2=a^2$.

由于切点必在曲线上,代入曲线,方程$y=x^3-3a^2x+b$得

$0=x_0^3-3a^2x_0+b$

故 $$b=3a^2x_0-x_0^3=x_0(3a^2-x_0{}^2)=2a^2x_0$$

从而 $$b^2=(2a^2x_0)^2=4a^4x_0{}^2=4a^6$$

(3)a^2

考点:在无限区域上二重积分的计算

思路:按分段函数的定义写出被积函数在各段上的表达式,再相加.

[解析] $$\iint_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}g(y-x)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^{x+1}a\,\mathrm{d}y$$
$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=a\int_0^1 a\,\mathrm{d}x$$
$$=a^2$$

(4) -1

考点:矩阵及逆矩阵的运算

思路:注重$\alpha^T\alpha$与$\alpha\alpha^T$的区别

[解析] 因$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{B}$,故(注意到$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)(a,0,\cdots,0,a)^T=2a^2$)

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)$$
$$=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T$$

$$= E + (\frac{1}{a} - 1 - 2a)\alpha\alpha^T$$

从而 $$(\frac{1}{a} - 1 - 2a)\alpha\alpha^T = 0$$

又 $\alpha\alpha^T \neq 0$,故$\frac{1}{a} - 1 - 2a = 0$,从而 $a = -1$

(5)0.9

考点:相关系数的计算

思路:处用相关系数的定义

[解析] $\rho_{YZ} = \frac{\text{cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY \cdot DZ}} = \frac{\text{cov}(Y,X-0.4)}{\sqrt{DY \cdot D(X-0.4)}} = \frac{\text{cov}(Y,X)}{\sqrt{DY \cdot DX}} = \rho_{xy} = 0.9$

(6) $\frac{1}{2}$

考点:大数定律

思考:$x_1^2,\cdots x_n^2$ 满足大数定律的条件,再利用定义.

[解析] 因 x 服从参数为2的指数分布,故 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{4}$,从而 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{2}$

由于 $x_1\cdots,x_n$ 独立且分布,故 $x_1^2,\cdots,x_n^2$ 独立且分布,由大数定理知

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2 \to Ex^2 = \frac{1}{2}, n \to \infty$$

二、选择题

(1)D

[解析]

因 $f(x)$ 是奇函数,故 $f(0) = 0$,且

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x)$$

由于 $f'(0)$ 存在,故 $\lim_{x\to 0} g(x)$ 存在,从而连(D)

(2)A

(3)B

考点:收敛级数的性质

思路:收敛级数的和差为收敛级数,收敛级数与发散级数的和差为发散级数.

[解析] 由于 $$|p_n| = \left|\frac{a_n + |a_n|}{2}\right| \leqslant \frac{|a_n| + |a_n|}{2} = |a_n|$$

$$|q_n| = \left|\frac{a_n + |a_n|}{2}\right| \leqslant \frac{|a_n| + |a_n|}{2} = |a_n|$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时,由比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 均绝对收敛,从而连(B)

(4)C

考点:矩阵的秩及其与伴随矩阵的秩的关系.

思路:$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$

[解析]　如果 $b = a$,则

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix},\text{从而} A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A^*) = 0,\text{矛盾}.$$

故 $a \neq b$

若 $a + 2b \neq 0$,则 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ a & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

由于 $a \neq b$,故 $r(A) = 3$,从而 A 可逆,于是 A^* 可逆,有 $r(A^*) = 3$,矛盾.

故 $a + 2b = 0$

综合,选(C)

(5)B

(6)C

三、考点:函数的连续性,求极限

思路:实际是求函数的左极限

[解析]　　令 $y = 1 - x$,有

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x\to1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x\to1^-} \frac{\pi y - \sin\pi y}{\pi y \sin\pi y} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y\to0^-} \frac{\pi y - \sin\pi y}{\pi^2 y^2} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y\to0^-} \frac{\pi - \pi\cos\pi y}{2\pi^2 y} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y\to0^-} \frac{\pi^2 \sin\pi y}{2\pi^2} \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 连续,因此定义

$f(1) = \frac{1}{\pi}$,

就可使$f(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续.

四、考点:二元复合函数的偏导数

思路:链锁法则

[解析]

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v},$$

故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$= x^2 + y^2.$$

五、考点:二重积分的计算

思路:变换积分次序

[解析] 作极坐标变换:$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,有

$$I = e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$= c^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\sqrt{\pi}_0 re^{-r^2}\sin r^2\mathrm{d}r.$$

令 $t = r^2$,则

$$I = \pi e^{\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t.$$

记 $A = \int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t$,则

$$A = -\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}e^{-t}$$

$$= -\left[e^{-t}\sin t\mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi}e^{-t}\cos t\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}e^{-t}$$

$$= -\left[e^{-t}\cos t\mid_0^{\pi} + \int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right]$$

$$= e^{-\pi} + 1 - A.$$

因此

$$A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}),$$

$$I = \frac{\pi e^{\pi}}{2}(1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2}(1 + e^{\pi}).$$

六、考点:幂级数的和函数

思路:逐项积分求和函数

[解析]

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1 + x^2}.$$

上式两边从 0 到 x 积分,得

$$f(x) - f(0) = -\int_0^{x} \frac{t}{1 + t^2}dt = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2).$$

由 $f(0) = 1$,得

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2),(|x| < 1).$$

令 $f'(x) = 0$,求得惟一驻点 $x = 0$. 由于

$$f''(x) = -\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

$$f''(0) = -1 < 0,$$

可见 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值,且极大值为

$$f(0) = 1.$$

七、考点:一阶微分方程

思路:对 $F(x)$ 求导,推出 $F(x)$ 所满足的微分方程,然后求解.

[解析]

(1) 由

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= g^2(x) + f^2(x) \\ &= [f(x) + g(x)]^2 - 2f(x)g(x) \\ &= (2e^{\pi})^2 - 2F(x), \end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为

$$F'(x) + 2F(x) = 4e^{2t}.$$

(2)

$$F(x) = e^{-\int 2dt}\left[\int 4e^{2t} \cdot e^{\int 2dt}dx + C\right]$$