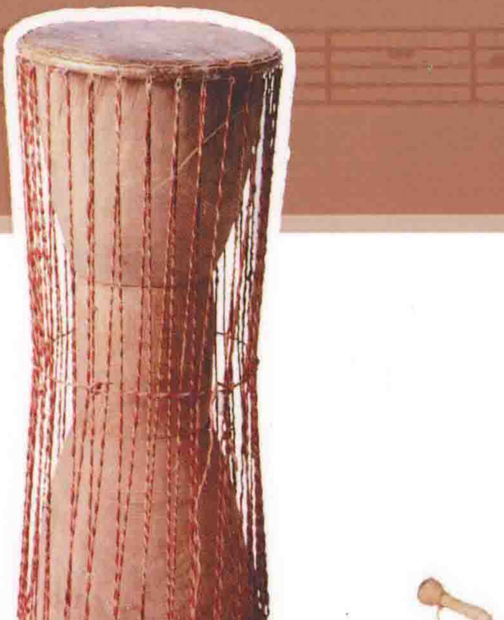
21世纪应用型本科计算机科学与技术专业规划教材

线性代数



李凤霞 主编
吕琳琳 副主编
侯冬梅 于丽 吴琦 编著
潘万富 主审

清华大学出版社

21世纪应用型本科计算机科学与技术专业规划教材

线性代数

李凤霞 主 编
吕琳琳 副主编
侯冬梅 于 丽 吴 琦 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍线性代数的一些基本知识，提供解决问题的基本方法，内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型，每节每章之后均配有适量练习、习题，书的末尾配有习题参考答案，教学时数约为48。

本书可以作为高等院校工科、理科、经管类各专业的教材及研究生人学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李凤霞主编. --北京：清华大学出版社，2014
21世纪应用型本科计算机科学与技术专业规划教材
ISBN 978-7-302-33601-3

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第203912号

责任编辑：付弘宇　薛　阳
封面设计：杨　兮
责任校对：李建庄
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：8.75　　**字　　数**：215千字
版　　次：2014年2月第1版　　**印　　次**：2014年2月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：19.00元

产品编号：054586-01

21世纪应用型本科计算机科学与技术专业规划教材

编写委员会成员名单

名誉主任：李建中

主　　任：郝忠孝

副 主 任：周洪玉

委　　员（按姓氏拼音排序）：

常键斌　陈本士　杜　凯　高巍巍
韩凤来　黄凤岗　贾宗福　李人贤
李晓峰　刘丕娥　马春华　马慧彬
马英瑞　齐景嘉　苏晓东　孙斐朗
王国权　王克家　王乃茂　王培东
周　屹　朱景福

秘　　书：马宪敏

序

PREFACE

21世纪是信息产业大发展的时代，计算机技术成为信息社会的重要支柱。信息化社会对人才的培养提出了更高的要求和标准。掌握计算机技术并具有应用计算机的能力是适应信息化社会的基础。

这套计算机系列教材适用于培养应用型人才，突出实验教学，突出实用，培养学生动手能力，掌握最新技术，适应社会需求。

本套教材在编写模式上和思路上有了较大变化，采取面向任务，面向目标，先提出问题，然后指出解决问题的方法和所需要的知识的项目驱动式教材编写指导思想。针对目标，明确任务，做什么项目，用什么知识；用什么，学什么，学什么，会什么；急用先学，学以致用；突出重点，突出有用；然后由此及彼，由表及里，由浅入深，先感性，后理性，先实践，后理论，先认识，后提高；先掌握基本应用，然后做理论讲解、扩展与延伸，最后落实到具体操作，指导学生动手设计，用实践检验对知识的掌握程度。

本套教材特点是：内容丰富，知识全面，项目驱动，图文并茂，案例教学，贯彻始终。结构严谨，层次分明，条理清晰，通俗易懂，由浅入深，深入浅出，循序渐进。减少交叉，避免重复，编排合理，精心设计，突出重点，化解难点。学习理论，上机实验，举一反三，学用结合，配备习题，提供试题，联系实际，提高能力。

我们从计算机技术的发展趋势和信息社会对人才培养的需求出发，实现知识传授与能力培养的有效结合，通过对教学内容的基础性、科学性和应用性的研究，体现以有效知识为主体，构建支持学生终身学习的计算机知识基础和能力基础，提高学生计算机的应用能力。本系列教材强调理论与实践相结合，既注重基本原理、基本概念的介绍，又注重基本操作、基本能力的培养，根据计算机技术的发展和应用，加重了项目实训的内容。提高学生的动手能力。本套教材由三个部分组成，一是教材本身，二是实践实验教程，三是配套电子课件和素材(可到清华大学出版社网站 www. tup. com. cn 上下载)。

教育是科学，其价值在于求真。教育是艺术，其生命在于创新。大学教育真正要教会学生的应该是学习精神、学习能力、应用和创新能力。学习应该是超越课本知识的一个过程。本系列教材内容广泛新颖、取材丰富实用、阐述深入浅出、结构合理清晰。本系列教材的出版，不仅是编者们努力的结果，同时也凝结了编委会许多人的心血，清华大学出版社的编辑

们为系列教材的出版任劳任怨、一丝不苟。因此，本系列教材的出版是集体智慧的结晶，是各院校优势互补、突出学校特色、进行计算机应用型人才培养的一次有益尝试。在此，编委会向所有为本系列教材的出版付出辛勤劳动的教师们及清华大学出版社的同仁们表示崇高的敬意和衷心的感谢！本系列教材在编写过程中也得到黑龙江省教育厅的悉心指导以及许多高校的大力支持，特别是黑龙江外国语学院院长邓中兴教授给予了热情帮助和大力支持，也得到了许多计算机公司的帮助，编委会在此向他们表示衷心感谢！

本系列教材既可作为高等学校计算机专业的教材，也可作为信息技术的培训教材或参考书。

由于时间仓促，书中粗浅疏漏或叙述欠严密之处在所难免，恳请读者批评指正，热切期待着授课教师在教学实践中对系列教材提出宝贵意见和建议。我们将每年对系列教材进行一次认真的修订。

郝忠孝

前言

FOREWORD

线性代数是高等数学中最基本的科目之一，是代数学的一个分支，主要处理线性问题。线性代数的思想和方法已经渗透到数学的许多分支，其概念是进一步学习理工科、经济学、管理学等不可缺少的数学知识，其理论体现了几何观念与代数方法之间的联系，同时线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用，是一门基本而重要的学科。

本书主要介绍线性代数的一些基本知识，提供解决问题的基本方法，内容分为 5 章，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型，每节每章之后均配有适量练习、习题，书的末尾配有习题参考答案。本书结构严谨，叙述通俗易懂，可以作为高等院校工科、理科、经管类各专业的教材及研究生入学考试的参考书。

本书由黑龙江外国语学院李凤霞任主编，吕琳琳任副主编，绥化学院侯冬梅、哈尔滨远东理工学院于丽、东北农业大学成栋学院吴琦参与编写。其中，第 1、2 章、习题 5、习题参考答案由李凤霞编写，第 3、4 章、第 5.1 节、第 5.2 节由吕琳琳编写，第 5.3 节由侯冬梅编写，第 5.4 节由于丽编写，第 5.5 节由吴琦编写。本书由黑龙江外国语学院潘万富主审，主审老师认真阅读了全部文稿并提出了许多宝贵的修改意见，编者在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，编写时间较仓促，书中疏漏之处在所难免，在此，恳请读者给予批评指正，以祈不断改进和完善。

编　者

2013 年 10 月

目录

CONTENTS

CHAPTER 1

第1章

行 列 式

行列式的引入为解决某些线性方程组(一次方程组称为线性方程组)问题提供了方便，更为后继课的内容如向量组的线性相关性、矩阵可逆性判别等问题的研究增添了方法，拓展了思路。本章以二元线性方程组、三元线性方程组的求解为切入点引入二阶、三阶行列式，进而得到 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，应用 cramer 法则求解线性方程组问题。

1.1 二阶行列式与三阶行列式

本章中出现的线性方程组例子均为方程个数等于其未知量的个数或是经过化简、整理得到的方程个数等于其未知量的个数的线性方程组。更为一般的线性方程组问题将在第 4 章进行细致的研究。

1.1.1 二阶、三阶行列式

引例 1 设二元线性方程组为$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$，对于该类问题，我们并不陌生，初中数学主要是利用消元法求解方程组，即若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则该方程组有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

引例 2 设三元线性方程组为$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$，相似地利用消元法求解得到，若 $d\neq 0$，其中 $d=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，则该方程组有唯一解，解为

$$x_1=\frac{d_1}{d},\quad x_2=\frac{d_2}{d},\quad x_3=\frac{d_3}{d}$$

其中

$$d_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$
$$d_2=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}b_3a_{23}-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}$$
$$d_3=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}$$

对引例中的结果进行分析，求同存异，可知：

- 相同点

(1) 方程个数等于其未知量的个数；

(2) 同一方程组的解中分母相同；

(3) 同一方程组的解中分子、分母中所含的项数相同；

(4) 同一方程组的解中分子、分母均是个数相同的方程组系数，常数项乘积的代数和。

- 不同点

(1) 方程个数分别为 2、3；

(2) 方程组解中的分母所含乘积项分别为 $2!=2$、$3!=6$。

为方便记忆，给出二阶行列式、三阶行列式的定义及其计算方法。

设有 4 个数排成的 2 行 2 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$，表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为由该数表所确定的二阶行列式，记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中，数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素或元，元素 a_{ij} 的第一下标 i 称为行标，第二下标 j 称为列标，表明该元素位于行列式的第 i 行第 j 列，因此称元素 a_{ij} 为行列式的 (i,j) 元。

此定义给出了计算二阶行列式方法，我们称其为对角线法则。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

连接 a_{11}，a_{22} 的实线称为主对角线，即由左上角到右下角的连线为行列式的主对角线，连接 a_{12}，a_{21} 的虚线称为副对角线，即由右上角到左下角的连线为行列式的副对角线，于是二阶行列式的值等于主对角线两元素的乘积减去副对角线两元素的乘积所得的差。

例 1.1 计算二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-3\times1=1$；

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-4\times(-1)=10$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$；

(4) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 4 & x \end{vmatrix}=x^2-(-3)\times4=x^2+12$。

利用二阶行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

引例中的二元线性方程组的解可以记为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

此表示方法简单易行，并且观察三个行列式表示法会发现：

若将$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的第 1 列替换为线性方程组的常数项，则得到$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$；

若将$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的第 2 列替换为线性方程组的常数项，则得到$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$。

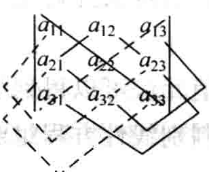
此结论可以推广到含 n 个方程的 n 元的线性方程组求解问题。

类似地可以得到三阶行列式的定义。

设有 9 个数排成的 3 行 3 列的数表$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$，表达式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为由该数表所确定的三阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。$$

根据三阶行列式的定义知，三阶行列式的计算方法所遵循的规律类似于计算二阶行列式的对角线法则。我们将其称为遵循图示的对角线法则：



图中三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，具体为：

实线连接的元素分别为 $a_{11}-a_{22}-a_{33}$；$a_{12}-a_{23}-a_{31}$；$a_{13}-a_{21}-a_{32}$

虚线连接的元素分别为 $a_{11}-a_{23}-a_{32}$；$a_{12}-a_{21}-a_{33}$；$a_{13}-a_{22}-a_{31}$

那么三阶行列式的值等于实线上三元素乘积相加之和减去虚线上三元素乘积相加之和所得的差。其结论与二阶行列式的对角线法则有着极其微妙的相似性。

例 1.2 计算三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times2\times(-2)+3\times5\times4+(-1)\times1\times1-2\times5\times1-3\times1\times(-2)-(-1)\times2\times4=55$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-(-4)\times2\times$

$(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4=-14$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & x \\ 4 & 25 & x^2 \end{vmatrix}=5x^2+4x-50-20+2x^2-25x=7x^2-21x-70=7(x+2)(x-5)$

利用三阶行列式的定义知，引例 2 中三元线性方程组的解可以记为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

将这种思想方法推广到求解含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

问题中。为此，本章将给出 n 阶行列式的定义并讨论它的性质与计算，再初步进行行列式的应用讨论。

基于以上的两个引例可知，利用消元法可以得到线性方程组的解，而利用其他的方法也可以得到同样的结果，但是关于如何判别线性方程组解的情况，如何求解等问题在第 4 章会详细研究。

1.1.2 逆序数

将 1,2,3 三个不同的数排成一列，叫做这 3 个数的全排列(或排列)。而由 1,2,3 构成的全排列共有 $3!=6$ 个，分别为：123,132,213,231,312,321，其中排列 123 是按三个数 1,2,3 由小到大的顺序排列的，称排列 123 为 1,2,3 构成的标准次序。

排列 132 中数字 3 排在 2 的前面，称 2,3 有一个逆序。一个排列 132 中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数，记作 t 或 $t(132)$。

例 1.3 计算 1,2,3 全排列的逆序数。

分析 由逆序数定义知，在排列 132 中 1,2 无逆序，1,3 无逆序，2,3 有一个逆序，所以 $t(132)=1$，此方法较为烦琐，若遇到求多个元素的排列则显得更加麻烦，于是我们另辟蹊径。

解 在排列 132 中，数 1 后面没有比 1 小的数，记 1 与 3,2 逆序总数为 0；数 3 后面只有 2 比 3 小的数，记 3 与 2 逆序总数为 1；数 2 后面没有比 2 小的数，记 2 的逆序总数为 0；

综上排列 132 的逆序数为 $t(132)=0+1+0=1$。

于是得

$$t(123)=0+0+0=0,\quad t(132)=0+1+0=1,$$
$$t(213)=1+0+0=1,\quad t(231)=1+1+0=2,$$
$$t(312)=2+0+0=2,\quad t(321)=2+1+0=3$$

可将上述 1,2,3 三个数的全排列、逆序数等结论平移得到 n 个不同元素的类似结论。

定义 1.1 由任意 n 个不同元素所组成的排列称为 n 阶排列。

对于 n 个不同元素，所有排列总数为 $n!$。

在这 n 个元素的任一排列中，排列 $12\cdots n$ 是按 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 由小到大的顺序排列的，称排列 $12\cdots n$ 为标准次序。

在 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列 $j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$ 中，若有一个较大数 j_t 排在较小数 j_s 的前面(或有较小数 j_s 排在较大数 j_t 的后面)，则称为 j_t 与 j_s 构成一个逆序。排列中所有逆序的总数叫做该排列的逆序数，记作 t。逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如 $t=t(41532)=3+0+2+1+0=6$，从而排列 41532 为偶排列。

1,2,3 全排列中共 3 个奇排列，3 个偶排列，而这一结论并非偶然。

定义 1.2 在一个排列中，将某两个元素的位置对调，其余的元素不动，得到另一个排列，这个过程叫做一次对换。

显然，若连续施行两次相同的对换，则排列被还原。

观察下列排列经过一次对换奇偶性变化情况。

1,2,3 的全排列为 123,132,213,231,312,321。

在排列 123 中将 1,2 对换得到 213，再将排列 213 中将 1,2 对换得到 123，而排列的奇偶性变化较大，偶排列转换成奇排列，奇排列转换成偶排列。

在排列 231 中将 1,3 对换得到 213，再将 1,2 对换得到 123，偶排列转换成奇排列，再转换成偶排列。

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性。

证明 先证明相邻对换的情形。

设排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$。对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$。显然，$a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：

当 $a<b$ 时，经对换后，a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变。

当 $a>b$ 时，经对换后，a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1。

所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性相反。

再证一般对换的情形。

设排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$。再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$。总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。在全部 n 阶排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个。

任意一个 n 阶排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与

这个排列有相同的奇偶性。

练 习 1.1

1. 计算下列行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2011 & 2012 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$。

2. 利用行列式写出方程组的解。

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ 3x_1+4x_2=3 \end{cases}$；(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2-4x_3=-10 \end{cases}$。

3. 求下列排列的逆序数。

(1) 4123；(2) 2413；(3) 36715284；(4) 65273814；(5) $n(n-1)\cdots321$；
(6) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$。

1.2 n 阶行列式

回顾二阶和三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.2}$$

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出，每一项乘积都是由行列式中位于不同行不同列的元素构成的，展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积的代数和。另一方面，每一项乘积都冠以符号，而这符号是由什么决定的呢？在三阶行列式的展开式(1.2)中，项的一般形式可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列。可以看出：当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 冠以正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 冠以负号。

定义 1.3 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列阶数表 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，表达式数表中所有位于不同行不同列的 n 个数的乘积之和(并冠以正负号)称为 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

记作 D(或 D_n 或 $|a_{ij}|$)。其中数 a_{ij}，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$ 称 a_{ij} 为行列式的(i,j)元素，i 为元素 a_{ij} 的行指标，j 为其列指标。$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 项的行指标为 $1,2,\cdots,n$ 的标准次序，列指标为 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$t(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和。

由定义知，计算 n 阶行列式，首先求出所有位于不同行不同列元素构成的乘积；其次将构成这些乘积的元素按行指标排成标准次序，然后由该项的列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号，并求和，且 n 阶行列式的求和项共由 $n!$ 项组成的。

容易看出，当行列式的元素均为某数域(数域指非空数集，对于集合中数与数的加、减、乘、除(除数不为零)运算，结果仍旧在此集合中)中的数时，其行列式的值也是该数域中的数。

例 1.4　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \text{ 称为上三角行列式；}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} \text{ 称为下三角行列式。}$$

上三角行列式、下三角行列式统称为三角行列式。

例 1.5　计算行列式

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$= (-1)^t a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$= (-1)^0 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$= (-1)^t a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

$$= (-1)^6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

既是上三角行列式又是下三角行列式的 n 阶行列式，称为 n 阶对角行列式。如