

初中数学
素质训练与

谭祖春 卢秀军 编著

奥林匹克竞赛

初二分册



东北师范大学出版社



CHUZHONG SHUXUE

SUZHI XUNLIAN YU AOLINPIKE JINGSAI

■ 东北师范大学出版社

长 春

初中数学
素质训练与奥林匹克竞赛
初二分册

■ 谭祖春 卢秀军 编著

(吉)新登字 12 号

☐ 出 版 人: 贾国祥

☐ 总 策 划: 第五编辑室

☐ 责任编辑: 张志文

☐ 封面设计: 李冰彬

☐ 责任校对: 张中敏

☐ 责任印制: 张允豪

初中数学素质训练与奥林匹克竞赛

初二分册

谭祖春 卢秀军 编著

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号 (130024)

电话: 0431—5695744 5688470

传真: 0431—5695744 5695734

网址: <http://www.nenu.edu.cn>

电子函件: Chubs@ivy.nenu.edu.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

吉林工学院印刷厂印刷

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 10.75 字数: 270 千

印数: 0 001 — 5 000 册

ISBN 7 - 5602 - 2630 - 2/G · 1535 定价 11.50 元

前 言

素质教育是教育发展的主流。对学生进行综合素质和能力的培养,是建立新世界创造型人才队伍的需要,而数学竞赛便是国内外公认的进行数学素质训练的一种有益的智力活动,是早期发现、超前培养青少年优秀分子的极好办法。因此人们愈来愈关注数学竞赛,广大青少年数学爱好者跃跃欲试,准备在各级各类数学竞赛中大显身手。同时,全国不少地区也都进行各种形式的辅导,以帮助青少年崭露头角。几年来,我们在数学竞赛教学与研究的过程中,积累了许多经验,取得一些可喜的成果,在此基础上,我们紧扣初中数学大纲,编写了这套“初中数学素质训练与奥林匹克竞赛”丛书。这套书分初一、初二、初三等三个分册,基本上概括了初中数学的重要基础知识、基本技能和基本方法,对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳,特别着重对学生数学思维能力、数学思想方法、解题方法和解题能力的训练。

“同步”是这套书的一大特点,即编写时注意了初中数学教学内容与初中数学竞赛大纲的衔接,对于问题的阐述、解释与解答,均以初中学生的学力为基准,做到简捷、清楚、详略得当。“新”是这套书的另一大特点,体现在:首先是对课堂所学知识的深刻理解、总结提高,从而有利于学生对初中阶段的学习内容进行复习整理、融会贯通和灵活运用。其次是帮助学生扩大视野,激发学习兴趣,提高数学素养,同时加强理论与实际的结合,利用所学知识解决问

题,加强应用意识和发展创造能力.第三是本套书例题和习题取材于近 20 个国家和国内几十个省、市、地区的数学竞赛试题,题型丰富,启发性强.第四是每一分册都分为若干专题,在每一个专题里,又根据需要分成若干个小节,且每一个专题都具有相对的独立性和整体上的统一性,这样既便于辅导老师根据实际情况备课选用,又便于青少年数学爱好者在自学中自由选读.另外,每册书后都附有数学竞赛模拟试题及各章节的参考答案,供读者自我检测和评价.

总之,这套书既是同学们参加全国初中数学竞赛的辅导材料,也是同学们初中数学总复习的良师益友,尤其对提高同学们中考 B 卷最后几题的得分能力大有裨益.我们深信这一点.

参加本书编写工作的有成艳清、刘文博、张亮、唐大友、成艳玲、袁小娟、李金英、金学哲、常学锋、王林辉、庄树前、卢秀军、谭祖春等,同时还得到了东北师大附中数学组的特、高级教师的指点和帮助,在此一并表示感谢.

编 者

目 录

第 一 讲 因式分解	1
一、基础知识	1
二、例题分析	8
三、练习题 1	24
第 二 讲 分 式	30
一、基础知识	30
二、例题分析	32
三、练习题 2	46
第 三 讲 实 数	53
一、基础知识	53
二、例题分析	54
三、练习题 3	59
第 四 讲 根 式	65
一、基础知识	65
二、例题分析	65
三、练习题 4	77
第 五 讲 非负数	82
一、基础知识	82
二、例题分析	83
三、练习题 5	91
第 六 讲 三 角 形	96
一、基础知识	96
二、例题分析	98
三、练习题 6	116

第 七 讲 四 边 形	123
一、基础知识	123
二、例题分析	135
三、练习题 7	153
第 八 讲 相 似 三 角 形	160
一、基础知识	160
二、例题分析	163
三、练习题 8	174
第 九 讲 几 何 变 换	183
一、基础知识	183
二、例题分析	185
三、练习题 9	198
第 十 讲 面 积 法 解 题	205
一、基础知识	205
二、例题分析	205
三、练习题 10	211
第 十 一 讲 几 何 不 等 式 初 步	220
一、基础知识	220
二、例题分析	221
三、练习题 11	234
第 十 二 讲 证 题 方 法 导 引	237
一、基础知识	237
二、例题分析	244
三、练习题 12	265
附录一 初二数学模拟试题	268
附录二 练习题略解与提示	271

第一讲 因式分解

多项式的因式分解是代数式恒等变形的基本形式之一，是中学数学的一个重要的基础知识。因式分解方法灵活，技巧性强，应用广泛，在代数、几何、三角等的解题、证明中起着重要的作用。

一、基础知识

1. 因式分解的思路与解题步骤

(1) 先看各项有没有公因式，若有公因式，则先提取公因式。

(2) 次看能否使用公式法，对于二次三项式看能否利用十字相乘法来因式分解。

(3) 四项或四项以上的多项式，用分组分解法，即适当分组后提取公因式或用公式法达到因式分解的目的。如果运用以上方法难以解决，就考虑用拆项、添项方法，再利用分组分解法来分解。

(4) 以上方法均感困难，可考虑使用换元法、双十字相乘法、待定系数法、求根法、轮换对称法等来因式分解。

2. 因式分解的注意事项

(1) 要在指定数(有理数、实数)的范围内分解到不能再分解为止。(本书中若没有指定范围时，请在有理数范围内分解)

(2) 分解因式之前，应当认真观察所给的多项式，分析其表达形式的特点，再决定采用什么方法分解。

(3) 因式分解后，应把各因式化简，如果有相同的因式，应当写成幂的形式，并审查每个因式是否还可以继续分解，必须进行到每个因式都不能再分解为止。

3. 因式分解常用的方法

多项式的因式分解方法是多种多样的,应根据题目特点,对具体问题作具体分析,灵活运用有关的方法和技巧,正确而迅速地解决问题.

(1) 运用公式法

中学课本,我们学习了五个基本公式,即

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

我们再补充几个重要公式:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), (*)$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2,$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

说明:公式(*)也可以写成下面形式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

当 $a+b+c=0$ 时,公式(*)可写成

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

公式越多,用起来就越方便,但是一定要准确,不要用错.

(2) 拆项与添项法

由于因式分解是多项式乘法的逆过程,在多项式乘法运算的整理化简中,经常会把几个同类项合并成一项或两个符号相反的同类项相互抵消为零,所以对某些多项式进行因式分解时,常常需要把被合并的项和相互抵消的项恢复原状.

把多项式中某项拆成两项或更多项的代数和的方法叫拆项,在多项式中,添上两个符号相反的项的方法叫添项.拆项与添项

的目的是使拆项或添项后的多项式能用分组分解的方法进行因式分解. 常见有以下两种情况:

①为使分组后各组之间有公因式而拆项或添项;

②为使分组后各组之间能用公式而拆项或添项.

(3) 双十字相乘法

在分解二次三项式时, 十字相乘法是常用的基本方法. 对于比较复杂的多项式, 尤其是某些二元二次六项式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$. A, B, C, D, E, F 为常数且 A, B, C 不同时为零, 可以运用双十字相乘法分解因式, 比较方便、简捷.

例如, $x^2 + (2y+2)x - (8y^2 - 14y + 3)$, 很明显, 这不是一个简单的二次三项式, 但我们仍可把它看作关于 x (或 y) 的二次三项式, 即

$$x^2 + (2y+2)x - (8y^2 - 14y + 3).$$

先利用十字相乘法, 将不含 x 的常数项 $-(8y^2 - 14y + 3)$ 因式分解

$$\begin{array}{cc} 2y & -3 \\ & \times \\ 4y & -1 \end{array}$$

$$\text{所以 } -(8y^2 - 14y + 3) = -(2y-3)(4y-1).$$

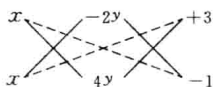
$$\text{所以 } x^2 + (2y+2)x - (8y^2 - 14y + 3) = x^2 + (2y+2)x - (2y-3)(4y-1).$$

再利用十字相乘法对关于 x 的二次三项式进行因式分解

$$\begin{array}{cc} x & -(2y-3) \\ & \times \\ x & (4y-1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{所以, 原式} &= [x - (2y-3)] \cdot [x + (4y-1)] \\ &= (x-2y+3)(x+4y-1). \end{aligned}$$

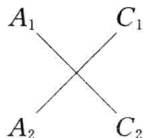
上题在分解因式的过程中,两次运用十字相乘法,如果把这两个步骤合并成一次完成,就是我们所要介绍的双十字相乘法.



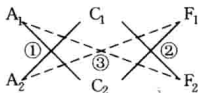
双十字相乘法的一般步骤是:

①把式子整理成 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ (A, B, C, D, E, F 为常数,且 A, B, C 不同时为零) 的形式;

②用十字相乘法分解 $Ax^2+Bxy+Cy^2$, 得到一个十字相乘图,使 $A=A_1 \cdot A_2$, $C=C_1 \cdot C_2$, $B=A_1C_2+A_2C_1$;



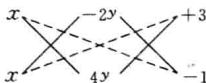
③把常数项 F 分解成两个因式 F_1, F_2 , 即 $F=F_1 \cdot F_2$ 填在第一个十字的右边, 且使这两个因式在第二个十字中交叉之积的和等于原式中含 y 的一次项, 即 $E=C_1F_2+C_2F_1$, 同时, 还必须与第一个十字中左端的两个因式交叉之积的和等于原式中含 x 的一次项, 即 $D=A_1F_2+A_2F_1$.



④按顺序写出分解式

$$\begin{aligned} & Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F \\ &= (A_1x+C_1y+F_1)(A_2x+C_2y+F_2). \end{aligned}$$

如 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$



$$\therefore x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x-2y+3)(x+4y-1).$$

(4)换元法

换元法是在一个比较复杂的式子中,根据其特征,把其中的某些部分看作一个整体,并用一个新的字母变量替换,从而将式子化简,利用这种方法,对于某些特殊的多项式的因式分解可以起到简化作用.

(5)待定系数法

待定系数法是数学中的一种很重要解题方法.利用待定系数法可以解决许多数学问题.在这里,我们主要介绍待定系数法在分解因式中的应用,有些复杂的多项式的因式分解需要借助于待定系数法.

其解题步骤如下:

第一步:将原多项式分解为含待定系数的因式的积;

第二步:采用系数比较法列出含待定系数的方程或方程组,解方程或方程组求出待定系数的值,使问题得到解决,或者采用数值代入法,列出含待定系数的方程或方程组,解这个方程或方程组,求出待定系数的值,使问题获得解决.

(6)求根法

①关于 x 的代数式的记号

研究关于 x 的代数式时常用记号 $f(x)$ 或者 $g(x)$ 等简单地表示.如果用 $f(x)$ 表示代数式 $-2x^2+7x-1$ 时,记为

$$f(x) = -2x^2 + 7x - 1.$$

这里的 f 表示对括号内的字母进行一系列的运算.

$f(1)$ 表示当 $x=1$ 时,代数式 $f(x)$ 的值.

$$\therefore f(1) = -2 \times 1^2 + 7 \times 1 - 1 = 4.$$

同样有

$$f(0) = -2 \times 0^2 + 7 \times 0 - 1 = -1.$$

$$f(-1) = -2 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) - 1 = -10.$$

...

注意： $f(x)$ 与 $f(0)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(1)$ 等表示的意义不同， $f(x)$ 可以随 x 的取值不同而取不同的值，而 $f(1)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 等是一个具体的值。但在同一问题中，不同的代数式要用不同的字母表示，例如用 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 等字母表示是对用字母表示数的进一步发展。

②因式定理

余数定理：多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$ 。

例如，求 $f(x)=-2x^2+7x-1$ 除以 $x+2$ 所得的余数？

$$\because x+2=x-(-2),$$

$$\therefore f(-2)=-2 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) - 1 = -23.$$

如果 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，也就是 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式。反之，如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式，那么 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，因此，由余数定理，容易得出

因式定理：如果 $f(a)=0$ ，那么 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式。反之，如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式，那么 $f(a)=0$ 。

因式定理给出了求多项式 $f(x)$ 一次因式的办法，但是，怎样去寻找使 $f(x)=0$ 的值仍是一个难题，下面的定理帮助我们解决了这个问题。

定理：如果整数系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_n \neq 0$) 有因式 $px+q$ (p, q 是互质的整数)，那么 $p|a_n$ ， $q|a_0$ 。

例如， $6x^2-x-15$ 的因式是 $2x+3$ 与 $3x-5$ ，这两个一次因式的一次项系数2和3都是首项系数6的约数，3和-5是常数项-15的约数。

(7)对称多项式的因式分解(轮换对称法)

对称式是代数式中常常遇到的一种特殊形式的代数式。在这里简要介绍对称式的概念和性质，说明对称多项式的因式分解方法。

如果把代数式中任意两个字母对换后，代数式保持不变，称

这样的代数式为对称代数式，简称对称式。例如， $x+y+z$ ， $x^2+2xy+y^2$ ， $\frac{1}{ab}$ ， $a^3+b^3+c^3-3abc$ ， $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 等都是对称式，但 $a-b-c$ ， $\frac{1}{x-y}$ ， $a+3b+2c$ 就不是对称式。

在一个代数式中，如果把含字母项顺序轮换后代数式保持不变，称这样的代数式为轮换对称式，简称轮换式。例如， $x^2y+y^2z+z^2x$ ， $x+y+z$ ， $x^2+y^2+z^2$ ， $(x+2y)(y+2z)(z+2x)$ ， $\frac{1}{abc}$ 等都是轮换式。

如果一个多项式，它所有的项有相同的次数，称这样的多项式为齐次多项式，如 $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 称为三次齐次对称式。

1) 对称式、轮换式的性质

① 对称式一定是轮换式，而轮换式不一定是对称式。例如， $x^2y+y^2z+z^2x$ 是轮换式，但不是对称式。

② 关于相同字母的对称式或轮换式的和、差、积、商（除式不为零）仍是对称式或轮换式。

③ 若对称式或轮换式中含有某种形式的式子，则必定有这种形式的同型式。例如，关于 x, y, z 的三次齐次式中若含有 ax^2 项，则它必定含有 ay^2 、 az^2 项。若含有 bxy 项，则它一定含有 byz 、 bzx 项，所以 x, y, z 的二次齐次对称式的一般形式是

$$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx).$$

其中 a, b 是常系数。

由此可知：

关于 x, y 的齐次对称式 (a, b 是系数)

一次： $a(x+y)$ 。

二次： $a(x^2+y^2)+bxy$ 。

三次： $a(x^3+y^3)+b(x^2y+xy^2)$ 。

关于 x, y, z 的齐次轮换式 (a, b, c 是系数)

一次: $a(x+y+z)$.

二次: $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$.

三次: $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y)$.

2) 对称多项式的因式分解

因为对称多项式也一定是轮换式, 因此, 要研究对称多项式的因式分解, 只需要研究轮换式的因式分解就行了.

对于轮换式的因式分解, 常用的方法是选定一个字母做主元, 将其余字母看为常数, 把原式看成关于主元的多项式, 然后利用因式定理确定它的因式.

例如, 关于 x, y, z 的轮换式, 若定出 $x-y$ 是它的因式, 则 $y-z, z-x$ 也都是它的因式, 可结合待定系数法求出其余的因式.

对于三个字母 x, y, z 的轮换式, 最常见的因式有 $xyz, x+y+z, (x+y)(y+z)(z+x), (x-y)(y-z)(z-x), (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ 等. 因此, 首先用因式定理确定是否有因式 $x, x+y, x-y, x+y-z$ 等, 若有, 可用轮换法写出类似的因式, 再利用待定系数法求出其他的因式.

二、例题解析

例 1 分解因式

(1) $64x^6 - y^6$;

(2) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$;

(3) $a^7 - a^5b^2 + a^2b^5 - b^7$;

(4) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

(5) $x^3 + 8y^3 - z^3 + 6xyz$.

解: (1) 解法一:

$$\text{原式} = (8x^3 - y^3)(8x^3 + y^3)$$

$$= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2).$$

解法二:



$$\begin{aligned}\text{原式} &= [(2x)^2 - y^2][(2x)^4 + (2x)^2 y^2 + y^4] \\ &= (2x+y)(2x-y)[(2x)^4 + 2(2x)^2 y^2 + y^4 - (2x)^2 y^2] \\ &= (2x+y)(2x-y)\{(2x)^2 + y^2\}^2 - (2x)^2 y^2\} \\ &= (2x+y)(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)(4x^2 - 2xy + y^2).\end{aligned}$$

(2)解法一:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 - 1^3 \\ &= (2x-1)^3.\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (8x^3 - 1) - (12x^2 - 6x) \\ &= (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 6x(2x-1) \\ &= (2x-1)(4x^2 + 2x + 1 - 6x) \\ &= (2x-1)(4x^2 - 4x + 1) \\ &= (2x-1)(2x-1)^2 \\ &= (2x-1)^3.\end{aligned}$$

(3)解法:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a^7 - a^5 b^2) + (a^2 b^5 - b^7) \\ &= a^5(a^2 - b^2) + b^5(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^5 + b^5) \\ &= (a-b)(a+b)^2(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4).\end{aligned}$$

(4)解法一:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 \\ &= (x+1)^3 + 1 \\ &= (x+2)[(x+1)^2 - (x+1) + 1] \\ &= (x+2)(x^2 + x + 1).\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^3 + x^2 + x) + (2x^2 + 2x + 2) \\ &= x(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1) \\ &= (x+2)(x^2 + x + 1).\end{aligned}$$

(5)解法一:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^3 + (2y)^3 + (-z)^3 - 3x \cdot (2y) \cdot (-z) \\ &= (x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+xz).\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x+2y)^3 - 3(x+2y) \cdot x \cdot 2y - z^3 + 6xyz \\ &= [(x+2y)^3 - z^3] - [6xy(x+2y) - 6xyz] \\ &= (x+2y-z)^3 - 3(x+2y) \cdot (-z)(x+2y-z) - 6xy(x+2y-z) \\ &= (x+2y-z)[(x+2y-z)^2 + 3(x+2y) \cdot z - 6xy] \\ &= (x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+3xz+6yz-6xy) \\ &= (x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2xy+xz+2yz).\end{aligned}$$

注:用公式分解因式时,有时需反复应用公式,有时需与其他方法结合使用.

例 2 分解因式

(1) $a^5 + a + 1$;

(2) $x^3 - 3x^2 + 4$.

解:(1)解法一:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a^5 - a^2) + (a^2 + a + 1) \\ &= a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) \\ &= a^2(a-1)(a^2+a+1) + (a^2+a+1) \\ &= (a^2+a+1)(a^3-a^2+1).\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3) + (a+1) \\ &= a^3(a^2+a+1) - a^3(a+1) + (a+1) \\ &= a^3(a^2+a+1) - (a+1)(a^3-1) \\ &= a^3(a^2+a+1) - (a+1)(a-1)(a^2+a+1) \\ &= (a^2+a+1)(a^3-a^2+1).\end{aligned}$$