物 理 实 验

上 册

李天应 主 编

華中工學院物理系

一九八七年元月

物 理 实 验 室 规 则

一、实验室应保持安静，做实验时必须严肃、认真。

二、实验前应清点仪器、用具和材料，如发现短缺，应向指导教师提出解决，不得擅自动用别组的仪器和用具。

三、应爱护国家财产，按仪器使用规程进行操作，对不了解性能的仪器不要随意扭动。

四、仪器如有损坏，应即时报告指导教师，按有关规定进行处理。

五、实验完毕，经指导教师检查数据并在报告上签字后，必须切断电源，整理好仪器，并将桌面收拾整洁。

六、作完实验后，应即时离开实验室，不在实验室写报告，不干扰别人做实验。

物 理 实 验 须 知

一、实验课前，必须认真阅读实验教材，在弄清楚本次实验的有关原理、实验内容及主要仪器性能的基础上，写出实验予习报告。予习报告的内容包括：

〔实验目的〕 应简单明确地说明本次实验的目的。

〔实验原理〕 扼要叙述实验原理，写出主要公式，画上主要示意图；电路图或光路图。

〔实验内容〕 简明扼要地写出实验内容和操作步骤。

二、上实验课时，应在教师指导下认真操作，并在报告上记下：

〔主要仪器〕 包括名称和规格。

〔实验数据〕 应忠实记下原始数据和单位。每个数据都应符合有效数字的要求，经教师检查不合格的数据，不要涂改，应在重新测定之后，另起行记录。

三、实验课后，完成实验报告的下列部分：

〔数据表格〕 设计合理的表格，将整理后的数据填入表格之中。

〔数据处理〕 按实验要求计算待测量的量值、绝对误差及相对误差。计算过程是先写出公式，再代入数据，然后写上结果，中间的计算不写在报告上。

〔结果表达〕 按下面格式写出最后结果：

$$N\text{（待测量）}=\bar{N}\text{（测量结果）}\pm\Delta N\text{（绝对误差）}$$

$$E_r=\frac{\Delta N}{\bar{N}}\times 100\%$$

（被测量量有公认值或理论值时，其结果表达式为

$$N=\bar{N}_{测量}$$

$$E_r=\frac{|N_{理论}-\bar{N}_{测量}|}{N_{理论}}100\%）$$

〔结果分析〕 对本次实验的结果及诸误差因素作简单扼要的分析讨论。

四、物理实验的成绩由平时成绩（约60～70分）和期末考试成绩（约30～40分）两部分组成，满分100分。平时成绩即为每次实验成绩的总和，每次实验的成绩均由教师评注在实验报告上。

目录

绪论

力学实验

电磁学实验

光学实验

绪 论

一、测量与误差

测量任何物理量，所得结果都不会是绝对精确的，对测量结果精确程度的评价问题，是一门专门科学，涉及面非常之广。对实验数据的处理和测量误差的分析及估算的能力，是科学实验技能的一个重要方面，在物理实验课中，将对有关知识作初步介绍，并通过每个具体实验进行一些最基本的训练。

（一）测量与测量误差

1．测量

物理实验是以测量为基础的。所谓测量就是将被测物理量与作为标准的同类物理量进行比较，看被测量是标准单位量的多少倍。测量各种物理量的具体方法是多种多样的，但总起来均可归入下列两类之中。

（1）直接测量　指的是通过与量具量仪的比较能直接读取被测物理量的量值的测量方式，如用米尺测量长度，用天平测量质量，用停表记时间，用电表测电流和电压等，均属直接测量。

（2）间接测量　对某些物理量的测量，是先测量出有关的一些其它的物理量，再通过一定的数学关系式计算出待测物理量，这种测量方式称为间接测量。例如测量一园柱体的密度 ρ，就是直接测量出该园柱体的质量 M，高 h 及直径 d，再通过关系式 $\rho=4M/\pi d^2h$ 计算而得出。

2．测量误差

在确定的条件下，反映任何物质（物体）物理特性的物理量，均具有客观的真实数值，称为真值。对各种物理量的测量，一般均力图得到真值。但是由于受到仪器，测量方法，测量者自身的因素及周围环境的限制，总是得不到真值，测量值只能是真值的不同程度的近似值，二者间的差异称为测量误差，即

$$测量误差=测量值-真值$$

误差存在于一切测量之中，并且贯穿测量过程的始终。误差的大小反映人们的认识接近于客观真实的程度。

3．误差的分类

根据误差产生的原因及其性质，可将其分为系统误差和偶然（随机）误差两大类

（1）系统误差　②　③

这种误差的特点是在确定条件下多次测量同一物理量时，误差的数值和符号保持恒定，或在条件改变时，按一定的规律发生变化。系统误差均起源于一些确定的因素，如仪器的固有缺陷（刻度不均匀，零点没调好，砝码未较正，表头磁铁失磁，测微螺距不均匀，天

平两臂不等长等等）；外界环境的影响或干扰（如温度，气压，湿度，电磁场等的影响）；观察者个人生理因素或不良习惯的限制（如用停表测定时间，信号发生至启动指针间的延迟产生的误差，一般人大约在 0.02～0.1 秒范围内。反映迟钝的人则会产生更大的误差，又如用尺测长度，个人视觉带来的读数误差，一般是在$\left(\frac{1}{10}\sim\frac{1}{4}\right)\times$最小分度范围内）；测量原理的近似性或测量方法和理论要求的不一致（如用伏安法测电阻，表头内阻对结果的影响）。

在经典力学范畴内，因果关系总是成立的，只要观察到一个结果，就一定可以找到产生这一结果的原因。系统误差是符合因果规律的事件，在一定的测量条件下，系统误差是完全确定的，找出和消除产生系统误差的原因和影响，就能使系统误差得到修正，如有必要的话，可以将系统误差的影响完全消除。

在教学实验中，由于条件的限制，系统误差不可能也没有必要完全消除，评价实验结果时，必须予以认真的考虑。

（2）偶然误差（随机误差）

在测量过程中，除了由于主观的或客观的某些条件不完备而产生的数值和符号确定的误差，即系统误差之外，还有一种不确定的，找不到因果关系的误差，叫偶然误差或随机误差。在完全确定的条件下作多次测量，这种误差的数值时大时小，符号时正时负，不可予测。偶然误差起因于一些随时随地都会发生的微小的不可控制的因素，如无规则的温度、气压起伏，地基，桌面的振动，电磁场的干扰，光线的闪动，电压、电流的波动，以及观察者感官（听觉、视觉、触觉）分辨能力的微小变化等。这些因素既不可控制，又无法予测并消除，一般场合中，某一次测量的偶然误差是由许多随机因素共同造成的。

偶然误差是随机的，任一次测量的偶然误差的数值和符号均无法予测。但是在同一条件下对同一物理量作多次测量，从误差的总体来看，却明显地具有统计规律性：正方向误差和负方向误差出现的次数大体上相等，数值较小的误差出现的次数较多，很大的误差通常不出现。测量的次数越多，这种规律性越明显，这就是数理统计中叙述得很透彻的正则分布律或称高斯分布律。

偶然误差具有抵偿性，在多次测量的情况下，偶然误差可正负相消。因而增加测量次数，用算术平均值表示测量结果，可以减小偶然误差的影响。

除上述两类误差外，测量中的过失，例如操作不慎，或将读数看错，也会造成过失误差，或叫粗差，但是只要实验者采取严肃认真的科学态度，细心操作，这种误差是完全可以避免的。

4．测量结果的表示

既然测量总有误差，其结果究竟应如何表示？按前面关于误差的定义，一个测量值的误差（用 Δx 表示），就是该测量值（用 x_i 表示）和该量的真值（用 x 表示）之差，即

$$\Delta x = x_i - x \qquad (1)$$

在真值无法得知的情况下，由于多次测量的平均值最接近于真值（一般测量 10 次就可以了，10次以后接近真值就很缓慢了），测量值与平均值的偏差也就最接近于它们与真值的误差，所以就把偏差视为误差，即

$$\Delta x = x_i - \bar{x} \tag{2}$$

这样定义的误差称为绝对误差，其意义是表示测量结果的误差范围。当 $x_i > \bar{x}$ 时，它取正号，当 $x_i < \bar{x}$ 时，它取负号，它与测量结果有相同的单位。

为了评价测量结果的优劣，不仅要看绝对误差的大小，还要看测量值本身的大小，为此引入相对误差的概念，并被定义为相对误差：

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{3}$$

由于相对误差被表示为百分数形式，故又称为百分误差。

对于两个测量结果，绝对误差大的，其相对误差不一定大，反之亦然。在评价一个测量结果时，绝对误差提供真值存在于什么范围之内，即提供测量值的误差范围。而相对误差则告诉我们测量的精确程度。

例一，用游标卡尺测量出两物体的长度分别为 $l_1 = 100.03 \pm 0.02\text{mm}$，$l_2 = 10.02 \pm 0.02\text{mm}$，其绝对误差都是 0.02mm，而相对误差分别为

$$E_1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.02}{100.03} \approx 0.0002 = 0.02\%$$

$$E_2 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.02}{10.02} \approx 0.002 = 0.2\%$$

可见，对于这两个测量值来说，虽然误差的范围一样大，但是前一个测量比后一个更为精确一些。

得出绝对误差和相对误差后，则将测量结果表达为

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \Delta x \\ E = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \end{cases}$$

若被测量有公认值或理论值，对其结果的处理，只需按下式算出相对误差。

$$E = \frac{|\text{理论值} - \text{测量值}|}{\text{理论值}} \times 100\%$$

并将结果表达为

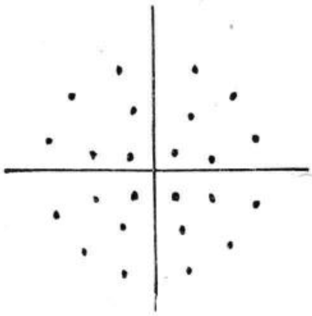
$$\begin{cases} x = \bar{x}_{\text{测}} \\ E = \dfrac{|x_{\text{理}} - \bar{x}_{\text{测}}|}{x_{\text{理}}} \times 100\% \end{cases}$$

5. 测量结果的精密度 准确度、精确度

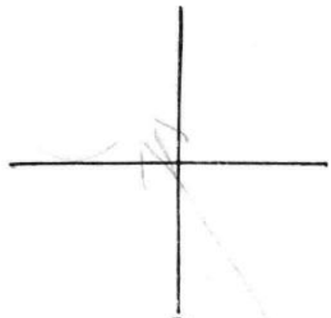
测量的精密度，准确度，精确度三个术语的使用容易混淆。现将大体上公认的含义介绍于下。

(1) 精密度 (Precision) 是对偶然误差的评价，偶然误差小，标志精密度高，反之亦然。精密度并不表示个别测量值的误差的大小，而是指一组误差的平均大小，即指各次测量误差的密集的程度。各次测量值之间差异小，测量误差的分布就密集些，这就意味着测量精密度高。若是各次测量值彼此差异大，精密度自然就降低了。

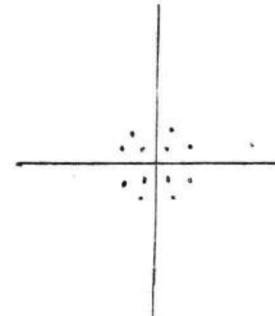
(2) 准确度 (accuracy) 是对系统误差的评价，是与精密度对应的一个术语。准确度说明测量结果的最佳值与真值的符合程度，即准确性。



图一 准确度高
精密成低



图二 精密度高
准确度低



图三 精确度高

准确度和精密度所表达的是两种不同的概念。前者和一组测量结果分布性的好坏相联系，而后者却表示的是测量值的重复性。两者也不一定总是谐调一致的，就像图一和图二所表示的结果那样，准确度高，精密度不一定也高，精密度高，不一定准确度也高。如果分布性和重复性均很好，即偶然误差和系统误差都很小时，这才意味着测量结果既准确又精密，我们可简单的称之为精确度高。可见精确度是对测量中偶然误差和系统误差的综合评价，是描述测量结果的通称，也常常简称为测量的精度。

实验误差的实际估算，有时是很复杂的，下面将介绍一些基本的估算方法。

（二）测量结果与误差估算

在有条件的实验室中，应按照实验误差的要求选择适当精密的仪器。若能满足仪器误差比实验允许的误差低一个数量级的要求，并将各种系统误差予以排除，对其结果就只需估算其偶然误差了。在教学实验室中，由于条件限制、不允许随意选择仪器设备，系统误差，尤其是仪器产生的系统误差，常常是评价实验结果的不可忽视的因素。在同学们今后要做的廿多个物理实验中，有些仪器灵敏度低的实验，偶然误差相对来说是很小的，只计算系统误差就行了。有些实验仪器灵敏度很高，并设法消除了其它系统误差，我们就只计算其偶然误差。有少数实验，则要综合处理其系统误差和偶然误差。

1．直接测量结果误差估算

（1）系统误差的估算

在某些实验中对物理量的测量，或者由于条件限制或因要求不高而只测一次，或者由于仪器灵敏度较低，偶然误差相对很小，此种场合就只考虑系统误差，并用下面几种方式进行估算。

i，仪器灵敏度不高，取仪器额定误差为绝对误差，再算出相对误差即可。

所谓仪器额定误差，即国家计量局规定的出厂公差或允差，是一种系统误差。用合格仪器、量具测量，若操作正确，即使只测一次，其误差一般不会超过额定误差。额定误差通常都标明在仪器、量具上，如游标卡尺的额定误差就是所标明的精度，通用的有0.02 mm和0.05mm两种。千分尺为0.004mm，钢卷尺为0.8mm/m。电表的额定误差为A_mK%，其中A_m为m档的量程，K为该电表的精度等级，有0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5，和5.0七个等级。数值越大精度越低。

有些仪器，量具如查不到出厂公差，可取其最小刻度的一半作为绝对误差。

ii，提高要求，则将仪器误差和个人读数误差相加作为绝对误差。在更一般的情况下，对物理量N的测量中，若存在几种系统误差，ΔN_1，ΔN_2，$\cdots \Delta N_n$，则用最大误差表示总的系统误差，即

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} \Delta N_i \tag{4}$$

在不存在偶然误差的情况下，此物理量的测量结果可表示为

$$N = \bar{N} \pm \Delta N \tag{5}$$

式中 $\bar{N}$ 表示单次测量结果或多次测量结果的平均值，此表示式的意义是物理量N的真值在 $\bar{N}-\Delta N$ 到 $\bar{N}+\Delta N$ 范围内的几率为 99.7%。可见用最大误差表示系统误差，虽然误差值是大了一点，但是置信几率是非常高的。因为几率很小的事件一般不会发生，因而可以把上式理解为：物理量N的真值一定存在于 $\bar{N}-\Delta N$ 到 $\bar{N}+\Delta N$ 的范围之内。

实用中若存在几项误差，起主要作用的常常只是其中的一、二项，对那些不是主要的分误差，即占误差的 1/10 以下的分误差，计算时则可以略去不计。

例二，用一米长的钢卷尺测一条钢丝的长度，一次测量所得结果为 854.3mm，已知钢卷尺的出厂公差为 0.8mm，若只考虑仪器误差，则可将测量结果写成：

$$l = (854.3 \pm 0.8)\,\text{mm}$$

其意义是表示钢丝长度的真值在 854.3－0.8 至 854.3＋0.8[mm]之间。

假如要考虑读数误差，若自己的估算长度的分辨能力未曾测定过，可按一般读数误差范围的最大值选择，即

读数误差为 $\frac{1}{4} \times$ 最小分度值 $= \frac{1}{4} \times 1 = 0.25 = 0.3\text{mm}$.

于是总的误差为

$$\Delta l = 0.8 + 0.3 = 1.1\text{mm}$$
$$= 2\text{mm}$$

其相对误差为

$$E_l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2}{854.3} = 0.0023 = 0.3\%$$

测量结果则表示为

$$\begin{cases} l = (854 \pm 2)\,\text{mm} \\ E_l = 0.3\% \end{cases}$$

这里有两点需要说明：其一，绝对误差和相对误差的数值通常只取一位，并采用的是进位法（即只要后面该舍弃的数字是 1～9，都应进一位）。其二，测量结果本来是854.3 mm，但由于毫米级上已经有了误差，再把十分之一毫米级的数字写出来就没有意义了。其三，这样表示的结果的误差范围似乎大了一些，需知误差的计算本身是一种估算，是不需要非常准确的。我们所采用的这种取最大误差的办法是一种保守的估算法。

(2) 偶然误差的估算

由于偶然误差具有抵偿性，为了减少偶然误差，对物理量的测量，往往采取多次重复测量的方法，将各次测量值的算术平均值，作为该量的最佳测量值。至于误差的估算，比

较粗略的方法是取算术平均偏差，精确一些是取标准偏差，以下的考虑，假定系统误差已被消除。

1. 算术平均值。

对物理量 x 在同一条件下作 n 次测量，其观测值分别为 $x_1, x_2 \cdots x_n$。称测量列。若用 $\bar{x}$ 表示测量列的平均值，则

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\ (x_1 + x_2 + \cdots x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i \tag{6}$$

若用 x_0 表示真值，则有 $\bar{x} \approx x_0$。

ii，算术平均误差

各观测值与平均值 $\bar{x}$ 的偏差（称残差）分别为

$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x},\ \ \Delta x_2 = x_2 - \bar{x} \cdots \Delta x_n = x_n - \bar{x}$$

算术平均误差则为

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n}(|\Delta x_1| + |\Delta x_2 + \cdots + |x_n|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \tag{7}$$

注意，由于我们取最大误差，所以是将各次偏差的绝对值相加。

iii，标准偏差

根据数理统计理论，偶然误差有多种表示方法，一般则用“方，均，根”法表示测量的偶然误差，称为标准误差，简称标准差，我国亦采用此法作为测量精密度的评定标准。用 σ_n 表示标准差，其定义式是

$$\sigma_n = \left[\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2} \tag{8}$$

此种表示法有着明确的物理意义，数理统计的研究表明，测量值的偶然误差小于 σ_n 的占测量值总数的 68.3%，即被测量的真值在 $\bar{x} - \sigma_n$ 至 $\bar{x} + \sigma_n$ 范围内的几率是 68.3%。

一般教学实验中，测量次数不可能很大，数理统计的研究指出，均方根差应改用下式计算。

$$\sigma_{n-1} = \left[\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2} \tag{9}$$

为了计算方便，可将 σ_n 和 σ_{n-1} 的表示式变成下面的形式

$$\sigma_n = \left[\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right)\right]^{1/2} \tag{10}$$

$$\sigma_{n-1} = \left[\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right)\right]^{1/2} \tag{11}$$

此种形式就和一般函数计算器说明书使用的公式完全相同了。（注意上面的变化中使用了 $\bar{x} = \sum x_i / n$ 的关系式）。

例三，测量一物体的质量所得数据为

m[g]　25.44　25.37　25.43　25.10　25.39　25.41

我们以 CASIO fx-140 型计算器为例计算其标准差，将函数模式选择开关拔在“SD”位置；

依次按 $\boxed{\text{INV}}$ 键和 $\boxed{\text{AC}}$ 键；把测量列数据输入：依次按 25.44 $\boxed{M_+}$，25.37 $\boxed{M_+}$，25.43 $\boxed{M_+}$，25.10 $\boxed{M_+}$，25.39 $\boxed{M_+}$，25.41 $\boxed{M_+}$；

按 $\boxed{\bar{x}}$ 键，得 $\overline{m}=25.36[\text{g}]$

按 $\boxed{\sigma_{n-1}}$ 键，得 $\sigma_{n-1}=0.13=0.2$

相对误差为 $E_m=\dfrac{\sigma_{n-1}}{\overline{m}}=\dfrac{0.13}{25.36}=0.5\%$

其结果可表示为

$$\begin{cases} m=(25.4\pm0.2)\,\text{g} \\ E_m=0.5\% \end{cases}$$

2．间接测量误差的估算　误差的传递与合成

既然直接测量结果存在误差，间接测量结果就必然要受其影响，也一定会有误差，就是说间接测量同时也伴随着误差的传递，传递的结果可由误差传递公式计算出来。

设待测量为 N，各直接测量量为 x，y，$z\cdots$，其函数关系为

$$N=f(x,y,z\cdots) \tag{12}$$

间接测量中误差传递公式和全微分公式相同，但需要将微分符号“d”改为误差符号“Δ”，即

$$\Delta N=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\cdots \tag{13}$$

若将函数先取对数，微分后再化为误差公式，则有

$$\ln N=\ln f(x、y、z\cdots)$$

$$E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z+\cdots \tag{14}$$

显然，(13)式为绝对误差传递式，(14)式为相对误差传递式。函数 $f(x、y、z\cdots)$ 为和差形式，利用（13）式计算出绝对误差 ΔN，由 $E=\Delta N/N$ 算相对误差，非常方便。若函数 $f(x、y、z)$ 为积商形式，则先用（14）式计算出相对误差，再由 $\Delta N=EN$ 计算绝对误差。

（13）式和（14）式中各项 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$，$\dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z\cdots$ 以及 $\dfrac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x$，$\dfrac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y$，$\dfrac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\cdots$ 称为单项误差，各项中的偏导数，称为误差传递系数。至于误差的合成，则需分别情况加以讨论。

（1）系统误差的合成——代数合成

系统误差的数值和方向是确定的，在运用（13）式和（14）式计算系统误差的传递时，各项之间按“代数和”方式合成。

（2）极限误差合成——绝对值合成

如果在测量中系统误差是主要的，但其符号又不能确定，或者还有偶然误差存在，又不必区分系统误差或偶然误差时，则采用极端的合成办法——绝对值相加，即

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right|+\cdots \tag{15}$$

$$\frac{\Delta L}{N}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right|+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\right|+\cdots \tag{16}$$

现将常用函数关系极限误差公式列于下表

表一

函数形式	绝对误差 ΔN	相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$
$N=ax$（a 为常数）	$a\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
$N=x+y+z+\cdots$	$\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots$	$\frac{\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots}{x+y+z+\cdots}$
$N=x-y-z\cdots$	$\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots$	$\frac{\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots}{x-y-z-\cdots}$
$N=x\cdot y$	$y\Delta x+x\Delta y$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=x\cdot y\cdot z$	$yz\Delta x+xz\Delta y+xy\Delta z$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{y\Delta x+x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=x^n$	$nx^{n-1}\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$
$N=x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$	$\frac{1}{n}\frac{\Delta x}{x}$
$N=\sin x$	$\cos x\cdot\Delta x$	$\mathrm{ctg}x\cdot\Delta x$
$N=\mathrm{tg}x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$N=\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x\ln x}$

注意：在多次测量的情况下，误差公式中的 $x, y, z\cdots$ 均以平均值代入。

由表一可见，若函数为和差形式时，间接测量量的绝对误差为各直接测量量的绝对误差之和，对此种函数关系的测量，可先算出绝对误差，再算相对误差，则较为方便。如果函数为积商形式，因间接测量量的相对误差为各直接测量量的相对误差之和，故，先算相对误差，再由相对误差求绝对误差就更为简便了。

（3）偶然误差的合成——方和根合成

设间接测量量 N 是直接测量量 $x、y、z\cdots$ 的函数，即

$$N=f(x、y、z\cdots)$$

若用 $\Delta N, \Delta x, \Delta y, \Delta z\cdots$ 分别表示各量的偶然误差，则有（具体推导可参考有关 数 理 统 计学）

$$\Delta N=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\Delta y)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2(\Delta z)^2+\cdots\right]^{1/2} \tag{17}$$

$$\frac{\Delta N}{N}=\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2(\Delta y)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2(\Delta z)^2+\cdots\right]^{1/2} \tag{18}$$

前面介绍的绝对值合成，是一种保守的合成法，其结果往往偏大。(17) 和 (18) 式表示的方和根合成，是用统计方法推导出的，更为符合实际，在较为严密的实验工作中多用此法。使用时有两点需要注意：

其一，各直接观测量 x、y、z…彼此应当是独立的。

其二，若用标准差计算，(17) 和 (18) 式中的 $\Delta N, \Delta x, \Delta y, \Delta z$…分别用标准差 σ_N，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$，…代替即可。即

$$\sigma_N=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots\right]^{1/2} \tag{19}$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots\right]^{1/2} \tag{20}$$

现将常用的偶然误差的标准差方和根合成式列表于下

表 二

函数形式	标准差合成(传递)公式
$N=x+y$	$\sigma_N=[\sigma_x^2+\sigma_y^2]^{1/2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=[\sigma_x^2+\sigma_y^2]^{1/2}$
$N=x\cdot y$	$\frac{\sigma_N}{N}=\left[\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2\right]^{1/2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\left[\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2\right]^{1/2}$
$N=\frac{x^P y^m}{z^n}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\left[R^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2\right]^{1/2}$
$N=ax$	$\sigma_N=a\sigma_x \quad \frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$
$N=x^n$	$\sigma_N=nx^{n-1}\sigma_x \quad \frac{\sigma_N}{N}=n\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\cos x\cdot\sigma_x \quad \frac{\sigma_N}{N}=\mathrm{ctg}x\cdot\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x} \quad \frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x\ln x}$

由表二可见，函数为和差形式即加减法用分绝对误差平方和计算，乘除法用分相对误差平方和计算，并且都取正号。

例四，用浮力原理测固体密度的公式为 $P=\frac{m}{m-m_1}\rho_0$，测得的数据为

m[g]	m_1[g]	ρ_0[g/cm³]
28.03	19.95	0.999126
28.06	19.95	0.999049
28.04	19.94	0.998973
28.02	19.05	0.999094

28.07	19.93	0.999103
28.04	19.96	0.998973
28.03	19.95	0.999832
28.04	19.96	0.998841
28.03	19.95	0.999136

试计算密度 ρ 的结果。(其中 ρ_0 的数值是作九次测量时与水的温度相应的水的密度值。)

解：因测量仪器的灵敏度较高，故用标准差处理。由公式(6)和(11)分别计算被测量平均值 $\bar{x}$ 和标准差 σ_{n-1}。计算时仍然使用 CASIOfx—140 型计算器。

(1)将函数模式选择开关拨在“SD”位置，按 $\boxed{\text{INV}}$ 键和 $\boxed{\text{AC}}$ 键，将 m 测量数据输入：28.03 $\boxed{M_+}$，$\boxed{M_+}$，$\boxed{M_+}$，28.06 $\boxed{M_+}$，28.04 $\boxed{M_+}$，$\boxed{M_+}$，$\boxed{M_+}$，28.02 $\boxed{M^+}$ 28.07 $\boxed{M_+}$。

按 $\boxed{\bar{x}}$ 键得 $\bar{m} = 28.04[g)$

按 σ_{n-1} 键得 $\sigma_m = 0.0158 \approx 0.02[g]$

(2)用类似的方式算得

$$\bar{m}_1 = 19.95[g]$$
$$\sigma_{m1} = 0.01[g]$$

(3)同理，由 ρ_0 的测量列可算得

$$\bar{\rho}_0 = 0.9991[g/cm^3]$$
$$\sigma_{\rho_0} = 0.0003[g/cm^3]$$

注意，输入测量列中相同的数据时，先将数字键入，接着视相同数据的个数连按 $\boxed{M_+}$ 即可。如 m 的测量列中有三个 28.03，键入 28.03 后则连按三次 $\boxed{M_+}$ 键。

综合上面的结果，对于三个直接测量列有

$$m = 28.04 \pm 0.02[g]$$
$$m_1 = 19.95 \pm 0.01[g]$$
$$\rho_0 = 0.9991 \pm 0.0003[g/cm^3]$$

(4)由上面的结果可算出

$$\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - \bar{m}_1}\bar{\rho}_0 = \frac{28.04}{28.04 - 19.95}\,0.9991$$
$$= 3.463[g/cm^3]$$

(5)计算误差时，由于 ρ 的函数式为积商形式，计算相对误差较为简便。

先取对数，再求全微分

$$\ln\rho = \ln m - \ln(m - m_1) + \ln\rho_0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dm - dm_1}{m - m_1} + \frac{d\rho_0}{\rho_0}$$

$$= \frac{-m_1}{m(m-m_1)} dm + \frac{1}{m-m_1} dm_1 + \frac{1}{\rho_0} d\rho_0$$

变微分符号为误差符号，取平方和后再开方，即得

$$E = \frac{\sigma_{\rho n-1}}{\rho} = \left[\frac{m_1^2}{m^2(m-m_1)^2} \sigma_{m\,n-1}^2 + \frac{1}{(m-m_1)^2} \sigma_{m_1 n-1}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_0^2} \sigma_{\rho_0 n-1}^2 \right]^{1/2}$$

（此关系式可由公式(18)直接得出）

代入前面的结果，得

$$E = \frac{\sigma_{\rho n-1}}{\rho} = \left[\frac{19.95^2}{28.04^2(28.04-19.95)^2} 0.02^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{0.01^2}{(28.04-19.95)^2} + \frac{1}{0.9990^2} 0.0003^2 \right]$$

$$= [3\times10^{-6} + 2\times10^{-6} + 9\times10^{-8}]^{1/2}$$

$$= 0.23\times10^{-3} = 0.3\%$$

$$\Delta\rho = \bar{\rho}\cdot E = 3.463\times0.0023 = 0.008[g/cm^3]$$

（6）最后可将结果表达为

$$\begin{cases} \rho = 3.363 \pm 0.008[g/cm^3] \\ E_0 = 0.3\% \end{cases}$$

3．系统误差和偶然误差的综合处理

如前所述，教学实验中有时系统误差是主要的，有时偶然误差是主要的，但也有些实验系统误差和偶然误差同时存在，并且有相同的量级，在这种情况下，就必须将二者加以综合处理。但是若将两者简单地加起来则是不妥当的，因为用最大误差处理的系统误差和用标准差处理的偶然误差的置信几率是不相同的，前者为 99.7%，而后者为 68.3%，不过若取三倍的标准差，即 $3\sigma_{n-1}$，其置信几率将和用最大误差处理的系统误差的置信几率相当。则可将综合误差表示为

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} \Delta N_i + 3\sigma_{n-1} \tag{21}$$

式中 $\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i$ 为各项系统误差之和。

在不明确偶然误差和系统误差哪一种重要，或者二者的量级相近的情况下，就必须将偶然误差和系统误差的结果先算出来后，再加以比较。但是计算标准差是比较麻烦的，而所得结果最后还不一定使用。为了不至于浪费时间，常以 $3\sigma_{n-1}$ 的估计值 $(N_{max}-N_{min})/2$ 进行上面的判断（其中 N_{max} 和 N_{min} 分别为测量列 N_1，N_2，$\cdots N_n$ 中的最大值和最小值）。判断方法是：

如果

$$(N_{max}-N_{min})/2 \gg \Delta N$$

则只计算偶然误差。

如果

$$(N_{max}-N_{min})/2 \ll \Delta N$$

则只计算系统误差。

当

$$(N_{max}-N_{min})/2 \approx \Delta N$$

时，则应将偶然误差和系统误差作综合处理。

这里我们只是进行数量级的判断，所以用 $(N_{max}-N_{min})/2$ 代替 $3\sigma_{n-1}$ 是可以的。但是判断之前必须先去除粗差，即明显的是由过失造成的误差很大的（即残差比平均误差大得多的）那些数据。

综上所述，对误差的估算，可在三种方式中选择一种进行处理，这三种方式是

(1)仪器精密度低，偶然误差可以略而不计，或者只作一次测量的场合中，就只计算系统误差，并且用取最大误差的原理处理，即用公式(4)进行计算。在粗略的情况下，也可以取仪器额定误差作为绝对误差就行了。

(2)仪器精密度较高，原理和方法确当，系统误差可以忽略，就只须计算其偶然误差。偶然误差的计算，粗略一点是按公式(7)求算术平均误差，精确的处理是用(10)或(11)式[直接测量，若测量次数不多，一般用(11)式]，或者(19)或(20)式[间接测量，测量次数不多时，一般用(20)式]计算标准差。

(3)如果系统误差和偶然误差同时存在，并且三倍标准差和系统误差的量级相近，即 $3\sigma_{n-1} \approx \Delta N$[注意 $3\sigma_{n-1}$ 的估计值为 $(N_{max}-N_{min})/2$，而 $\Delta N=\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i$ 是总系统误差)，就须将两种误差综合处理。

$\Delta N =$ 公差 + $\frac{最小分度值}{4}$ 对游标一位 无估

二、有效数字及其运算

有效数字简单地说就是有意义的数字。为了说明什么数字是有意义的，而什么数字又是没有意义的，我们看看下面的例子。

例五，用三角板测量出一长方形的边长分别为 5.43cm 和 12.16cm，用计算器计算其面积应为 66.0288cm²。下面再用笔算一遍，但必须注意，用三角板量出的两个数据的最后一位都是估读出来的，是有误差的，我们称之为可疑数字，为了和准确数字加以区别，计算时将在可疑数字的下面划上一横杆。另外还应该注意到，可疑数字和任何数字（准确的或可疑的）运算，其结果仍是可疑的。其算式应为

$$\begin{array}{r}
12.1\underline{6} \\
5.4\underline{3} \\
\hline
\underline{36}\ \underline{48} \\
4\ 8\underline{6}\ \underline{4} \\
60\ \underline{80} \\
\hline
66.\underline{02}\ \underline{88}
\end{array}$$

可见得数中从 0 开始，即从小数点以后第一位起全都是可疑数字，既然小数点后第一位已是可疑的，即有误差的数字，那它后面的三个数字(即 2，8，8)还有什么意义呢？因此对这一计算结果，我们只能保留下来三位有意义的数字，即 66.$\underline{0}$，上面的演算可以写成

$$S=ld=12.16\times 5.43=66.0\text{cm}^2$$

这一结果是个有效数字，它的最后一位是有误差的，即可疑的，其余数字都是准确的，即全都是有意义，所以，有效数字，也就是最后一位是可疑的，其余均为准确的数字构成的数。

今后在实验中所遇到的或由你自己提供的每一个数字，包括原始记录，正式数据，以及计算所得结果，全都应当是有效数字，即最后一位是有误差的。比如你记下两个测量长度的数据 53.52cm 和 53.5223cm，别人就理解为，前一测量准确到毫米级，最后一位数 2 是估读的，是用米尺或钢卷尺测量得的。后一个数据准确到百分之一毫米级，最后一位数 3 是估读的，可见是用螺旋测微计测得的。我们把有效数字的数字的个数，称为有效数位，前面测得的数据中，53.52 是四位有效数字，而 53.5223 则是六位有效数字。还应当注意，有效数字与小数点的位置无关，例如 3.41，34.1，341 都是三位有效数字。关于“0”是不是有效数字，我们先看一个数据 0.005430，前边的三个“0”只起定位作用，没有其它意义，故不是有效数字，后边一个“0”是有意义的，表明测量时估读到这一位，因而是有效数字。关于“0”是不是有效数字，可严格叙述为：从左往右第一个不为 0 的数字为准，左边的 0 不是有效数字，右边的 0 是有效数字。

为了表达简洁，有时应当用指数形式书写有效数字。例如 0.00019[g]，可书写为 1.9×10^{-4}[g]，有时为了正确表达数据的精确度，就必须用指数形式书写，例如 5.6 千克，若用克作单位，就应书写为 5.6×10^{3}[g] 而不能写为 5600[g]，因为数字 6 已经是可疑的了。

在明确了有效数字的意义后，就可将它们之间的运算加以简化，我们先看一个例子。

例六，

$$x=\frac{7.4364-0.694+3.7\times10^{2}}{9.714-9.712}\times8.912+6.34 \qquad (\mathrm{I})$$

$$=\frac{7-1+3.7\times10^{2}}{0.002}\times8.912+6.34 \qquad (\mathrm{II})$$

$$=\frac{3.8\times10^{2}}{0.002}\times8.9+6.34 \qquad (\mathrm{III})$$

多保留一位

$$=2\times10^{6}+6.34 \qquad (\mathrm{IV})$$

$$=2\times10^{6} \qquad (\mathrm{V})$$

计算简化过程如下

(1) 从（Ⅰ）到（Ⅱ）分子中三数相加减，根据“有效数字相加减，所得结果的可疑数字的位置以加减数中可疑数字最靠前的那一个数的可疑数字的位置为准”的原则，我们看到，3.7×10^{2} 的可疑数字是在“+”位上，最为靠前，其结果的可疑数字也只能在“+”位上，据此可对另外两个数进行简化。根据“运算过程有效数字可多保留一位的”原则，简化时我们将另外两个数只保留到“个”位上，以下的数四舍五入。

(2) 从（Ⅱ）到（Ⅲ）的乘除运算，根据“有效数字经乘除运算后，其结果的有效数位与乘除数中有效数位最少的相同”的原则，将各数进行简化，式中分母 0.002 为一位有效数字，根据“运算过程有效数字可多保留一位”的原则，分子上的两数均只保留二位有效数字，其余数字四舍五入。

(3) 由（Ⅳ）到（Ⅴ）同（Ⅰ）到（Ⅱ）