经/典/教/材/配/套/丛/书

配套·高教社·同济大学·《微积分(第三版·下册)》(面向21世纪课程教材)

◆知识结构更清晰 ◆重点难点更突出 ◆例题解析更典型 ◆习题全解更全面

微积分

同步辅导与习题全解

(高教社·同济大学·第三版·下册)

附赠近年考研数学试题选解

李红英◎主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

微积分同步辅导与习题全解

（高教社·同济大学·第三版·下册）

李红英　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与习题全解(高教社·同济大学·第三版·下册)/李红英主编.
—上海:华东理工大学出版社,2014.2
ISBN 978-7-5628-3454-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 020434 号

微积分同步辅导与习题全解(高教社·同济大学·第三版·下册)

主　　编 / 李红英
策划编辑 / 周永斌
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 金慧娟
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 14.75
字　　数 / 395 千字
版　　次 / 2014 年 2 月第 1 版
印　　次 / 2014 年 2 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-3454-0
定　　价 / 35.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
淘宝官网 http://shop61951206.taobao.com

前　言

微积分是高等院校理工科和经济管理类学科相关专业的一门重要基础课，为了帮助广大在校生和自学者学好这门课程，掌握这个有力的数学工具，我们总结了在教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套同济大学数学系主编的《微积分(第三版·下册)》的同步辅导书.本书对原教材内容进行了归纳总结并逐章编写，对部分知识点做了有益的扩展延伸，对重点难点进行了剖析，对所有的习题进行了详尽的解答.本书每章包括：教学基本要求、内容要点、主要方法、典型例题分析、习题全解、近年考研数学试题选解等栏目.

教学基本要求——符合国家教育部制定的《微积分课程教学基本要求》，同时根据教学实践做了个别适当修改.

内容要点——按照既"由浅入深、系统全面、脉络清晰"，又"突出重点、简明扼要、详略得当"的理念，对内容和方法进行归纳总结.

主要方法——总结归纳了针对每章内容的题目的解题方法、步骤及注意点.

典型例题分析——对每章的重点、难点内容进行具体分析，并通过对具有代表性的典型例题的分析、求解，使抽象的知识变得具体.

习题全解——对每章的习题均给出了详细解答，解答过程跳跃度很小，大部分题目在解答之前给出了"解题指导".同时，对部分题目给出了两种或三种不同的解法，从不同的角度对同一个问题进行不同的求解，有利于知识的综合、交叉应用，从而使读者开阔视野，真正地锻炼数学思维，提高对知识掌握的熟练程度.

近年考研数学试题选解——精选近年考研数学试题，进行解答与分析，适合学有余力以及准备考研的学生参考.

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，还望各位专家、读者不吝赐教，斧正谬误，以期本书能及时进行修正并不断完善.

目　录

第五章　向量代数与空间解析几何

一、教学基本要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积).

3. 理解向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 了解向量平行的充要条件、垂直的充要条件、共面的充要条件,以及向量积和混合积的几何意义.

5. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

6. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角.

7. 会求点到平面、点到直线的距离.

8. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

9. 了解常用二次曲面的方程及其图形,能根据方程画出它们的图形.

10. 掌握母线平行于坐标轴的柱面及平面曲线绕坐标轴旋转所成旋转曲面的方程.

11. 了解空间曲线的一般方程,了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求该投影曲线的方程.

二、内容要点

1. 向量的概念及其运算

(1) **向量**　既有大小又有方向的量称为向量或矢量.

(2) **模**　向量的大小称为向量的模.

(3) **向量的加法**　设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为邻边作平行四边形,称以点 A 为起点的对角线向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量加法满足下列运算规律:

(i) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ii) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(4) **向量的减法**　设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

(5) 数与向量的乘法

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,当 $\lambda>0$ 时它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反,当 $\lambda=0$ 时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向是任意的.

向量与数的乘法满足下列运算规律：

(i) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(ii) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

定理　设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda$ 是非零实数.

(6) 向量在轴上的投影

定义 1　设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称 $\varphi=\angle AOB$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，约定 $\varphi\in[0,\pi]$，记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

定义 2　设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{ON}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.过点 M 作平面垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线并交该直线于点 M'(图 5－1)，则称有向线段$\overrightarrow{OM'}$为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，且有

$$\overrightarrow{OM'}=(|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_b=(|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_b.$$

并称上式中的$|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$.

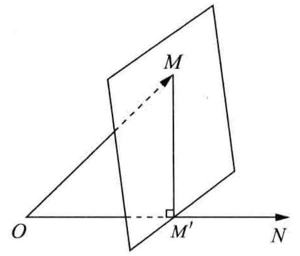

图 5－1

(7) 向量的数量积(内积、点积)

定义　设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$，称$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$.

数量积符合下列运算规律：

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(ii) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(iii) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(iv) 数乘结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

定理　两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(8) 向量的向量积(外积、叉积)

定义　设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

向量积符合下列运算规律：

(i) $\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；

(ii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(iii) 反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(iv) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(v) 数乘结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

定理　两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

几何意义　$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(9) 向量的混合积

定义　设三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积，得到的数$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

混合积符合下列运算规律：

(i) 轮换不变性　$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$；

(ii) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]$.

几何意义　混合积$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$的绝对值是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为相邻三条棱的平行六面体的体积.

（10）向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，任给向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),$$

其中 a_x,a_y,a_z 是点 M 的坐标.

（11）向量的模、方向角与方向余弦

（i）向量的模

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

（ii）方向角和方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦称为方向余弦，则有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，并且方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，以及 $\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

（12）向量代数运算

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，$\lambda$、$\mu$ 为实数.

（i）线性运算　$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(\lambda a_x+\mu b_x,\lambda a_y+\mu b_y,\lambda a_z+\mu b_z)$；

（ii）数量积　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

（iii）两非零向量的夹角

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}};$$

（iv）向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b;$$

（v）向量积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix};$$

（vi）混合积

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

2. 平面

（1）**法线向量**　垂直于平面的非零向量称为该平面的法向量，简称法向.

（2）平面方程

（i）点法式方程　设平面过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

(ii) 一般式方程　方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般式方程，其中法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$；

(iii) 截距式方程　设 a、b、$c(a,b,c\neq 0)$ 分别为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距，则平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

(3) 点到平面的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 空间直线

(1) **方向向量**　平行于直线的非零向量称为该直线的方向向量(或简称为直线的方向).

(2) 直线方程

(i) 一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}\quad 其中\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}不成立；$$

(ii) 对称式方程(或点向式方程)

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为方向向量的直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$

(iii) 参数方程

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为方向向量的直线 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt,\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

(3) 过直线的平面束

直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ 则通过直线 L 的平面束方程为

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0;$$

注：上述平面束方程不含过 L 的平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

(4) 点到直线的距离

点 M_0 是直线 L 外的一点，点 M 是直线 L 上的任一点，且直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，则点 M_0 到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{MM_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

4. 直线和平面间相互关系

设平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$；法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$；直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，过点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

(1) 夹角

(i) 平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 定义为两平面法向量的夹角(不取钝角)，即

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

(ii) 直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ 定义为两直线方向向量的夹角(不取钝角)，即

$$\cos\varphi=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}\right|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}};$$

(iii) 直线 L_1 和平面 Π_1 的夹角定义为直线 L_1 与平面 Π_1 的法线之间的夹角 θ 的余角 φ，即

$$\sin\varphi=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}\right|=\frac{|m_1A_1+n_1B_1+p_1C_1|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

(2) 平行条件

(i) 平面 Π_1 与 Π_2 平行，则 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，即 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

(ii) 直线 L_1 与 L_2 平行，则 $\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2$，即$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

(iii) 直线 L_1 与平面 Π_1 平行，则 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{n}_1$，即 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n}_1=m_1A_1+n_1B_1+p_1C_1=0$.

(3) 垂直条件

(i) 平面 Π_1 与 Π_2 垂直，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，即 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(ii) 直线 L_1 与 L_2 垂直，则 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$，即 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(iii) 直线 L_1 与平面 Π_1 垂直，则 $\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{n}_1$，即$\dfrac{m_1}{A_1}=\dfrac{n_1}{B_1}=\dfrac{p_1}{C_1}$.

5. 空间曲面

(1) 柱面

(i) **定义**　平行于直线 L 并沿空间一条定曲线 C 移动的直线所形成的曲面称为柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线叫做柱面的母线.

(ii) 只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线为 xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$；

只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面，其准线为 zOx 面上的曲线 $G(x,z)=0$；

只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面，其准线为 yOz 面上的曲线 $H(y,z)=0$.

(2) 旋转曲面

(i) **定义**　平面上的曲线 C 绕该平面上一条定直线 l 旋转而形成的曲面称为旋转曲面，该平面曲线 C 叫做旋转曲面的母线，定直线 l 叫做旋转曲面的轴.

(ii) 平面曲线 $C:\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$，曲线 C 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$；

平面曲线 $C:\begin{cases} f(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴(或 z 轴)旋转而成的旋转曲面方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0 \quad (\text{或 } f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0)；$$

平面曲线 $C:\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴(或 z 轴)旋转而成的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \quad (\text{或 } f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

(3) 常见的二次曲面

(i) 球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，其中球心为 (a,b,c)，半径为 R(图 5-2)；

(ii) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中心为 $(0,0,0)$，半轴长分别为 a,b,c(图 5-3)；

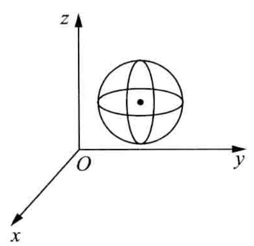

图 5-2

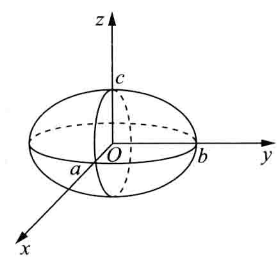

图 5-3

(iii) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中心为 $(0,0,0)$(图 5-4)；

(iv) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (图 5-5)；

(v) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$，其顶点为 $(0,0,0)$，对称轴为 z 轴(图 5-6)；

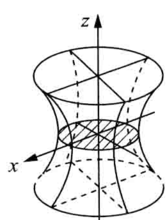

图 5-4

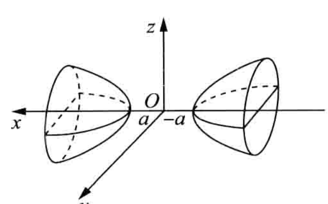

图 5-5

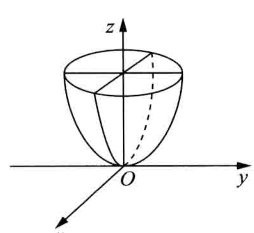

图 5-6

(vi) 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (图 5-7)；

(vii) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$(图 5-8).

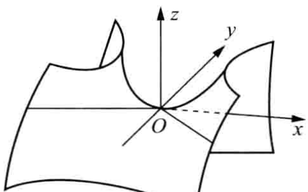

图 5-7

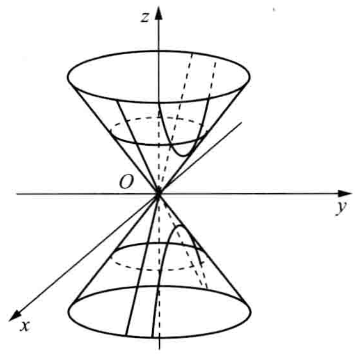

图 5-8

6. 空间曲线及其投影曲线

（1）空间曲线的一般方程

用两个曲面的交线来表示曲线：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

（2）空间曲线的参数方程

曲线上动点的坐标 x、y、z 分别表示成参数 t 的函数

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$$

（3）空间曲线在坐标面上的投影

（i）**定义**　以空间曲线 C 为准线，母线垂直于 xOy 面的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线称为曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线，简称投影.

（ii）设空间曲线 C：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$由方程组消去 z 后所得方程为 $H(x,y)=0$，它包含了曲线 C，从而曲线$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$包含了空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线.

类似地，在曲线 C 的一般方程中消去 x（或 y），得方程 $R(y,z)=0$（或 $T(x,z)=0$），则

$$\begin{cases}R(y,z)=0,\\x=0\end{cases}\quad\left(\text{或}\begin{cases}T(x,z)=0,\\y=0\end{cases}\right)$$

包含了空间曲线 C 在 yOz 面（或 xOz 面）上的投影曲线.

三、主要方法

1. 求曲面方程的方法

（1）利用公式求坐标平面曲线绕坐标轴旋转而成的旋转曲面；

（2）利用母线平行于坐标轴的柱面特点求柱面方程，例如母线平行于 z 轴的柱面方程不含变量 z 等；

(3) 利用常见二次曲面的标准形式判别三元二次方程所表示的曲面类型.

2. 空间曲线在坐标面上的投影

求空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在 xOy 面上的投影方法是:由方程组中消去变量 z,得投影柱面方程 $H(x,y)=0$,则$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$就是所求投影方程.

曲线在其他坐标面上的投影可类似求得.

3. 平面方程的求法

(1) 利用平面的一般式方程;
(2) 利用平面的点法式方程;
(3) 利用平面的截距式方程.

4. 直线方程的求法

(1) 利用直线的点向式方程;
(2) 利用直线的一般式方程.

5. 求距离的方法

(1) 点到平面的距离:点 $M(x_0,y_0,z_0)$到平面 Π:$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

(2) 两平行平面的距离:设两平行平面 Π_1: $Ax+By+Cz+D_1=0$, Π_2: $Ax+By+Cz+D_2=0$, 则 Π_1 与 Π_2 的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

(3) 点到直线的距离:设直线 L 过点 M_0,方向向量为 $\boldsymbol{s}$,则点 M 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|};$$

(4) 异面直线之间的距离:设直线 L_1 过点 M_1,方向向量为 $\boldsymbol{s}_1$,直线 L_2 过点 M_2,方向向量为 $\boldsymbol{s}_2$.

(i) 利用向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 L_1 与 L_2 的公垂线方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$ 上的投影,则两直线的距离为

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{M_1M_2}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

(ii) 经过直线 L_1 作平面 Π 平行于直线 L_2,则直线 L_2 上点 M_2 到平面 Π 的距离就是直线 L_1

与 L_2 的距离.

四、典型例题分析

例 1　设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=21$，求 $\boldsymbol{r}$.

分析　利用两向量垂直的充要条件和向量的投影求解.

解　设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，得 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=2x-3y+z=0$，　①

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=x-2y+3z=0$，　②

由 $\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=21$，得 $\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{1}{3}(2x+y+2z)=21$，　③

联立式 ①、式②、式③，解得 $x=21$，$y=15$，$z=3$. 故 $\boldsymbol{r}=(21,15,3)$.

例 2　已知三点 $M_1(-5,10,3)$，$M_2(1,10,-6)$ 和 $M_3(1,-2,-2)$. 试求一平面，使它与 $\triangle M_1M_2M_3$ 所在平面平行，且相距为 2 个单位.

分析　由于所求平面与三角形所在平面平行，因此可先利用三角形的顶点坐标确定其所在平面的法向量，再利用点到平面的距离公式最终确定所求平面方程.

解　因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(6,0,-9)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-12,4)$.

所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=-12(9,2,6)$.

设所求平面方程为 Π：$9x+2y+6z+D=0$，

则点 M_3 到平面 Π 的距离为 $d=\dfrac{|D-7|}{11}=2$，解得 $D=-15$ 和 $D=29$.

故所求平面方程为 $9x+2y+6z-15=0$ 和 $9x+2y+6z+29=0$.

例 3　一平面过平面 Π_1：$x+5y+z=0$ 和平面 Π_2：$x-z+4=0$ 的交线，且与平面 Π_3：$x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角，求其方程.

分析　本题可先利用平面束方程设出所求平面的方程形式，再利用两平面夹角的计算公式最终确定平面方程.

解　设所求平面方程为 $\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0$，则其法向量为 $\boldsymbol{n}=(\lambda+\mu,5\lambda,\lambda-\mu)$，而平面 Π_3 的法向量为 $\boldsymbol{n}_3=(1,-4,-8)$.

所以有 $\cos\dfrac{\pi}{4}=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_3})|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_3|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_3|}=\dfrac{|27\lambda-9\mu|}{9\sqrt{27\lambda^2+2\mu^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda:\mu=-4:3$.

故平面方程为 $x-z+4=0$ 或 $x+20y+7z-12=0$.

例 4　设 l_1：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$，$l_2$：$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$，试求与直线 l_1，l_2 都垂直且相交的直线的方程.

分析　设所求交线为 l，则由题意可知 l 就是 l 和 l_1 所确定的平面及 l 和 l_2 所确定的平面的交线.

解 设所求交线为 l. 因为 l 和 l_1 及 l_2 都垂直相交，因此直线 l 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,-1,1)\times(2,1,3)=(-4,-1,3).$$

由 l，l_1 所确定平面 Π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-4,-1,3)\times(1,-1,1)=(2,7,5)$.

又 Π_1 经过 l_1 上的点 $M_1(-2,3,-1)$，所以 Π_1 的方程为 $2x+7y+5z-12=0$.

由 l,l_2 所确定的平面 Π_2 法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-4,-1,3)\times(2,1,3)=-2(3,-9,1)$.

又 Π_2 经过 l_2 上的点 $M_2(-4,0,4)$，所以 Π_2 的方程为 $3x-9y+z+8=0$.

由于 l 为 Π_1 与 Π_2 交线，所以其方程为 $\begin{cases}2x+7y+5z-12=0,\\3x-9y+z+8=0.\end{cases}$

例 5 若球面过点 $M_1(1,3,3)$ 和 $M_2(5,2,0)$，且球心在直线 $l:\begin{cases}x+2y+z=-1,\\2x-y+3z=3\end{cases}$ 上，求球面方程.

分析 本题的关键在于确定球心的坐标.为了计算方便，可以先将直线方程转换为参数方程形式，再利用此参数方程给出球心坐标的参数形式.最后利用球面的几何特征确定球心的坐标.

解 易见直线 l 经过点$(1,-1,0)$，而直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,2,1)\times(2,-1,3)=(7,-1,-5).$$

所以直线的参数方程为$\begin{cases}x=1+7t,\\y=-1-t,\\z=-5t.\end{cases}$

故可设球心为 $P(1+7t,-1-t,-5t)$.设球的半径为 R，则有 $|PM_1|=|PM_2|=R$，即

$$(7t)^2+(-4-t)^2+(-5t-3)^2=(7t-4)^2+(-3-t)^2+(-5t)^2=R^2.$$

解得 $t=0,R=5$.于是球心为 $P(1,-1,0)$，半径为 5.故球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25.$$

五、习题全解

习题 5－1（见原书 P7）

1. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点，求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

解 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

2. 已给正六边形 $ABCDEF$（字母顺序按逆时针向），记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$和 $\overrightarrow{CB}$.

解 如图 5－9 所示，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，

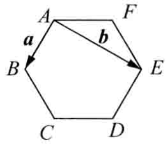

图 5－9

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$，

$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}$.

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
$=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$
$=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$.

4. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

证　如图 5-10 所示，E、F 分别是边 AB 和 AC 的中点，由向量的运算规则知：

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

所以 EF 平行于 BC，且 EF 的长度是 BC 的一半.

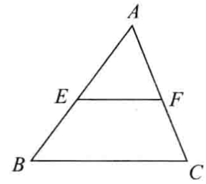

图 5-10

5. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB|=2|AC|$，O 为 AB 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

解　如图 5-11 所示，由 $|CB|=2|AC|$，可知 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，则

$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{b}}{3}+\frac{2\boldsymbol{a}}{3}$.

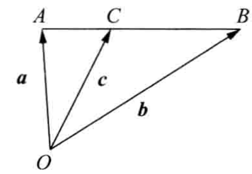

图 5-11

习题 5-2(见原书 P14)

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点的坐标有什么特征？指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-3,2)$；　$B(3,-2,-4)$；　$C(-1,-2,-3)$；　$D(-3,2,-1)$.

解　各卦限中点的坐标有如下特点：

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
(x,y,z)	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

点 A 在第Ⅳ卦限，点 B 在Ⅷ卦限，点 C 为Ⅶ卦限，点 D 在第Ⅵ卦限.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

解

xOy 面	yOz 面	zOx 面	x 轴	y 轴	z 轴
$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$

点 P 在 yOz 面上，点 Q 在 xOy 面上，点 R 在 x 轴上，点 S 在 y 轴上.

3. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 关于 xOy 面，yOz 面和 zOx 面的对称点分别是 $(a,b,-c)$、$(-a,b,c)$、$(a,-b,c)$；

(2) 关于 x 轴、y 轴和 z 轴的对称点分别为 $(a,-b,-c)$、$(-a,b,-c)$、$(-a,-b,c)$；

(3) 关于原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求出 P_0 到各坐标面和各坐标轴的距离.

解　P_0 在 xOy 面的垂足为 $(x_0,y_0,0)$，距离为 $d=|z_0|$；

P_0 在 yOz 面的垂足为 $(0,y_0,z_0)$，距离为 $d=|x_0|$；

P_0 在 zOx 面的垂足为 $(x_0,0,z_0)$，距离为 $d=|y_0|$；

P_0 在 x 轴上的垂足为 $(x_0,0,0)$，距离为 $d=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$；

P_0 在 y 轴上的垂足为$(0,y_0,0)$，距离为 $d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$；

P_0 在 z 轴上的垂足为$(0,0,z_0)$，距离为 $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特征？

解 平行于 z 轴的直线上的点：(x_0,y_0,z)；平行于 xOy 面的平面上的点：(x,y,z_0).

6. 已知点 $A(2,1,4)$，$B(4,3,10)$，写出以线段 AB 为直径的球面方程.

解 球面的球心为 AB 的中点$\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2},\frac{4+10}{2}\right)=(3,2,7)$，

半径为 $\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}=\sqrt{11}$，故球面方程为

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11.$$

7. 设长方体的各棱与坐标平行，已知长方体的两个顶点的坐标，试写出其余六个顶点的坐标：

(1) $(1,1,2)$，$(3,4,5)$；　　(2) $(4,3,0)$，$(1,6,-4)$.

解 (1) 由题意知，长方体的各面都平行于坐标面，并且点$(1,1,2)$与$(3,4,5)$不在同一面上，所以长方体上平行于 xOy 面且含点$(1,1,2)$的一面上的另三个顶点坐标依次为$(3,1,2)$，$(3,4,2)$和$(1,4,2)$；平行于 xOy 面且含点$(3,4,5)$的一面上的另三个顶点坐标依次为$(3,1,5)$，$(1,1,5)$和$(1,4,5)$.

(2) 由题意知，长方体的各面都平行于坐标面，并且点$(4,3,0)$与$(1,6,-4)$不在同一面上，所以长方体上平行于 xOy 面且含点$(4,3,0)$的一面上的另三个顶点坐标依次为$(1,3,0)$，$(1,6,0)$和$(4,6,0)$；平行于 xOy 面且含点$(1,6,-4)$的一面上的另三个顶点坐标依次为$(1,3,-4)$，$(4,3,-4)$和$(4,6,-4)$.

8. 证明：三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$共线.

证 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,-6,-9)$，显然

$$\overrightarrow{BC}=(-3,-6,-9)=-3(1,2,3)=-\frac{3}{2}(2,4,6)=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB},$$

则 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AB}$，即 A、B、C 三点共线.

9. 证明：以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2=98,$$
$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$

有 $|AB|=|AC|$，且$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，故$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

10. 已知点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，试求点 D，使得以 A、B、C、D 为顶点的四边形为平行四边形.

解 设 $D(x,y,z)$，假设平行四边形的 4 个顶点依次为 A、B、C、D，由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，于是

$$(1-3,2-(-1),-4-2)=(-1-x,1-y,2-z),$$

所以 $x=1$，$y=-2$，$z=8$，即 $D(1,-2,8)$.

同理，若平行四边形的 4 个顶点依次为 A、C、B、D 和 A、C、D、B，则由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ 与 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 可得 $D(5,0,-4)$与 $D(-3,4,-4)$. 本题有且仅有这三解，而且三种情况下分别以$\triangle ABC$ 的三条边为平行四边形的对角线.

11. 设向量的方向余弦分别满足：(1) $\cos\gamma=0$；(2) $\cos\alpha=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\gamma=0$，问这些向量与