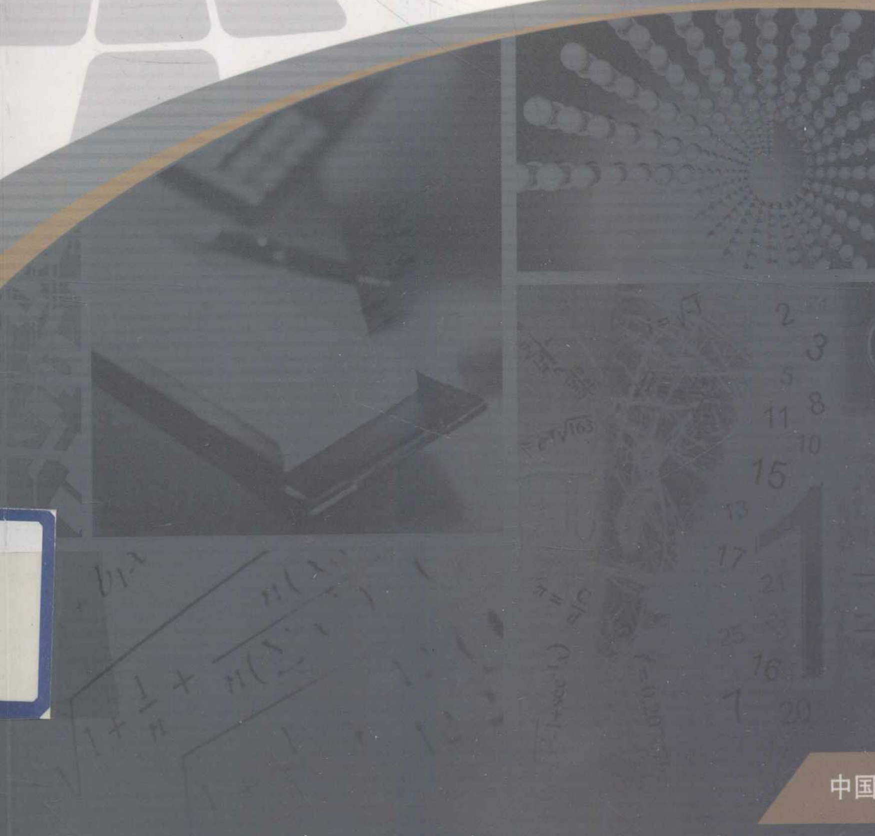
应用型本科教育数学基础教材

线性代数

宁 群 ◎ 编著



中国科学技术大学出版社

3

应用型本科教育数学基础教材

线性代数

宁 群 ◎ 编著

227

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书根据安徽省应用型本科高校联盟对应用型本科教育数学基础教材的编写要求编写.全书贯穿着“问题驱动”“案例教学”“注重数学的思想方法、淡化严谨的数学理论”的应用型本科公共数学课程的教学理念，力求内容陈述自然直观，语言叙述通俗易懂.本书以“初等变换”为主要工具，介绍了矩阵，线性方程组，向量空间，行列式，矩阵的等价、相似与合同等，结合应用实例，重点揭示这些数学内容中所蕴含的数学思想方法.本书的每一节都选配了一定量的典型习题，其中不乏来自实际的应用问题.

本书适合应用型本科高校理工、经管类专业选作教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/宁群主编.—合肥：中国科学技术大学出版社，2013.8

(应用型本科教育数学基础教材)

ISBN 978-7-312-03294-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.宁…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 170351 号

出版　中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

印刷　合肥华星印务有限责任公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×960 mm　1/16

印张　12

字数　228 千

版次　2013 年 8 月第 1 版

印次　2013 年 8 月第 1 次印刷

定价　22.00 元

应用型本科教育数学基础教材
编 委 会

总 序

1998 年以来，出现了一大批以培养应用型人才为主要目标的地方本科院校，且办学规模日益扩大，已经成为我国高等教育的主体，为实现高等教育大众化作出了突出贡献. 但是，作为知识与技能重要载体的教材建设没能及时跟上高等学校人才培养规格的变化，较长时间以来，应用型本科院校仍然使用精英教育模式下培养学术型人才的教材，人才培养目标和教材体系明显不对应，影响了应用型人才培养质量. 因此，认真研究应用型本科教育教学的特点，加强应用型教材研发，是摆在应用型本科院校广大教师面前的迫切任务.

安徽省应用型本科高校联盟组织联盟内 13 所学校共同开展应用数学类教材建设工作，成立了"安徽省应用型高校联盟数学类教材建设委员会"，于 2009 年 8 月在皖西学院召开了应用型本科数学类教材建设研讨会，会议邀请了中国高等教育学著名专家潘懋元教授作应用型课程建设专题报告，研讨数学类基础课程教材的现状和建设思路. 先后多次召开课程建设会议，讨论大纲，论证编写方案，并落实工作任务，使应用型本科数学类基础课程教材建设工作迈出了探索的步伐.

即将出版的这套丛书共计 6 本，包括《高等数学(文科类)》、《高等数学(工程类)》、《高等数学(经管类)》、《高等数学(生化类)》、《应用概率与数理统计》和《线性代数》，已在参编学校使用两届，并经过多次修改. 教材明确定位于"应用型人才培养"目标，其内容体现了教学改革的成果和教学内容的优化，具有以下主要特点：

1. 强调"学以致用". 教材突破了学术型本科教育的知识体系，降低了理论深度，弱化了理论推导和运算技巧的训练，加强对"应用能力"的培养.

2. 突出"问题驱动". 把解决实际工程问题作为学习理论知识的出发点和落脚点，增强案例与专业的关联度，把解决应用型习题作为教学内容的有效补充.

3. 增加"实践教学". 教材中融入了数学建模的思想和方法，把数学应用软件的学习和实践作为必修内容.

4. 改革"教学方法". 教材力求通俗表达，要求教师重点讲透思想方法，开展课堂讨论，引导学生掌握解决问题的精要.

这套丛书是安徽省应用型本科高校联盟几年来大胆实践的成果. 在此，我要感谢这套丛书的主编单位以及编写组的各位老师，感谢他们这几年在编写过程中的付出与贡献，同时感谢中国科学技术大学出版社为这套教材的出版提供了服务和平台，也希望我省的应用型本科教育多为国家培养应用型人才.

当然，开展应用型本科教育的研究和实践，是我省应用型本科高校联盟光荣而又艰巨的历史任务，这套丛书的出版，用毛泽东同志的话来说，只是万里长征走完了第一步，今后任重而道远，需要大家继续共同努力，创造更好的成绩！

2013 年 7 月

前　　言

线性代数是理工、经管类专业必修的一门专业基础课程，也是一门学科工具课程. 这门课程主要是以矩阵、行列式、数组向量空间等为主要工具，来研究一般线性方程组解的存在性和解的表示，同时考虑其他数学对象的矩阵表示以及相互关系等. 本书的撰写也是围绕着上述内容展开的.

在第 1 章我们使用了“开门见山”的方式对矩阵展开了讨论. 首先通过一些实例，给出了矩阵的数学表示，定义了矩阵的基本关系和运算，讨论了矩阵的求逆等. 对于矩阵的求逆，我们尝试了另外一种处理方式，即直接引入矩阵的初等变换，将初等变换作为一种“基本算法”，利用初等变换、初等矩阵与矩阵乘积的关系，给出矩阵求逆的初等(行)变换法.

第 2 章主要利用初等变换讨论一般的线性方程组，引入了“高斯消元法”，解决了线性方程组有解的判定和通解的表示问题.

第 3 章从线性方程组的表示入手，给出了一般数组向量空间的结构. 在这一章中，我们重点讨论了向量组的线性相关性和向量组的秩概念，利用向量组的线性相关性和秩概念讨论了一般线性方程组解的判定和解的表示问题.

行列式作为线性代数的基本教学内容，我们将其安排在了第 4 章. 在这一章中，我们采用了“非传统”的行列式定义方式，利用“初等变换”来定义行列式. 初等变换是对矩阵(行列式)的一种变形操作，是通常情况下计算行列式的主要方法，利用初等变换定义行列式，可以淡化“抽象的行列式”概念，使得行列式变得具体. 基于行列式的初等变换定义，重点讨论了行列式的性质以及行列式的计算，并利用初等变换证明了“积的行列式等于行列式的积”、“转置不改变行列式的值”、“行列式的按行(列)展开定理”等，最后给出了线性方程组的克莱姆法则.

第 5 章主要讨论了矩阵的等价、合同、相似关系，给出了两个矩阵等价、合同、相似的若干条件. 作为矩阵合同和相似的应用，最后一节讨论了二次型.

撰写本书的主要出发点是突出线性代数知识的应用. 在编写过程中，我们尽可能地突出以下几点：

(1) 将“初等变换”作为线性代数的“基本算法”. 第 1 章的矩阵求逆、第 2 章的线性方程组的有解判定、第 3 章的线性相关性判定和秩的求法、第 4 章的行列式以

及第 5 章的矩阵等价与合同等，都是利用“初等变换”来进行讨论的. 强化“初等变换”的作用，可以使得抽象的理论变成一种可以通过“变形操作”来实现的具体过程，实现线性代数内容的“具体化”.

(2) 尽可能利用“实际案例或问题”来引入“抽象概念”，突出理论的应用背景. 我们以统计表格为案例引入了矩阵，以线性方程组的表示为问题，引入了数组向量空间.

(3) “问题驱动”是引导学生思考的最好方法. 在编写的过程中，我们将后面要解决的“问题”在前面相关的内容或问题解决中自然地提出，使整个内容都围绕解决问题而展开，以“问题”和“问题解决”将线性代数的内容构成了一个有机整体.

(4) 尽可能多地选择具有应用背景的实际问题作为习题. 为了突出线性代数知识的应用，我们尽可能地选配了具有应用背景的问题作为相应章节的习题. 利用线性代数知识解决具有实际背景的问题，可以促进学生利用代数知识进行数学建模的能力的提高和意识水平的提升.

本书体现了作者个人对线性代数的知识体系和蕴含在其中的数学思想方法的理解. 限于作者水平，书中所陈述的知识体系以及对蕴含在知识体系中的数学思想方法的揭示，可能都没有达到预期目的. 但尝试着去革新传统的线性代数知识体系，尽可能地去揭示线性代数中蕴含的数学思想方法总是有益的.

本书编写过程中，参阅了大量的相关文献，在此向它们的作者表示感谢!

作者衷心感谢巢湖学院祝家贵院长对本书进行的审校工作，衷收感谢林永博士为本书写作提出的宝贵意见和建议，衷心感谢刘钢老师、杜玉霞老师、郝家芹老师为本书的习题选配所付出的劳动.

宁　群

2013 年 4 月于宿州学院

目录

第 1 章　矩阵及其运算

1.1　矩阵的概念

矩阵是线性代数研究的主要对象之一．英国数学家凯莱（A. Cayley，1821～1895）被公认是矩阵论的创立者．1858 年，他发表《矩阵论的研究报告》一文，定义了矩阵相等、矩阵运算法则、矩阵转置以及矩阵的逆等一系列基本概念，这可以看作矩阵作为数学研究对象和研究内容的标志．

什么是矩阵？如何定义矩阵的关系与运算？矩阵概念的最简单的表述是：由 $m\times n$ 个数构成 m 行 n 列的矩形数表即为 m 行 n 列的矩阵．其数学表达为：

设 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是 $m\times n$ 个数，将其排成 m 行 n 列，构成矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列矩阵，也称为 $m\times n$ 阶矩阵．

矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示，也可用符号 $(a_{ij})_{m\times n}$ 表示上述矩阵．a_{ij} 称为矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 第 i 行第 j 列的元素，$(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{in})$ 称为矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 行，$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列．数集 F 上 $m\times n$ 阶矩阵的全体记作 $F^{m\times n}$．

矩阵作为一种工具，在工程技术、通信技术、信息传输、图像识别、经济等领域中有着广泛的应用，这也促使矩阵理论成为了线性代数的主要内容．下面我们给出

几个实例.

例 1.1 安徽省是我国重要的煤炭基地之一,境内的淮南矿业、淮北矿业、皖北煤电矿业等集团公司年生产能力均在亿吨的水平.其产品除自给外,主要供应上海、浙江、江苏等地.假设各矿业集团均生产甲、乙两种等级的煤,我们以 a_{ij} 记 i 集团供应给 j 销地甲级煤的年销售量(单位:万吨),以 b_{ij} 记 i 集团供应给 j 销地乙级煤的年销售量(单位:万吨),以 c_{ij} 记 i 销地购买 j 集团甲级煤的价格(单位:万元/万吨),以 d_{ij} 记 i 销地购买 j 集团乙级煤的价格(单位:万元/万吨),则上述数据我们可以简洁地用数表(表 1.1～表 1.4)表示.

表 1.1 甲级煤销量图表

集团＼销地	本地	上海	浙江	江苏
淮南矿业	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
淮北矿业	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
皖北煤电矿业	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

表 1.2 乙级煤销量图表

集团＼销地	本地	上海	浙江	江苏
淮南矿业	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
淮北矿业	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
皖北煤电矿业	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}

表 1.3 甲级煤销售价格

销地＼集团	淮南矿业	淮北矿业	皖北煤电矿业
本地	c_{11}	c_{12}	c_{13}
上海	c_{21}	c_{22}	c_{23}
浙江	c_{31}	c_{32}	c_{33}
江苏	c_{41}	c_{42}	c_{43}

表1.4　乙级煤销售价格

销地 \ 集团	淮南矿业	淮北矿业	皖北煤电矿业
本地	d_{11}	d_{12}	d_{13}
上海	d_{21}	d_{22}	d_{23}
浙江	d_{31}	d_{32}	d_{33}
江苏	d_{41}	d_{42}	d_{43}

表1.1～表1.4实际上就是四个矩形数表，其分别对应3行4列和4行3列的矩阵，即我们可以用矩阵分别将表1.1～表1.4简单地表示如下：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{pmatrix}.$$

依据 a_{ij}、b_{ij} 的符号意义，$a_{ij}+b_{ij}$ 应为 i 集团供应给 j 销地的煤总量，其对应的矩形数表如表1.5所示.

表1.5　煤炭销售总量图表

集团 \ 销地	本地	上海	浙江	江苏
淮南矿业	$a_{11}+b_{11}$	$a_{12}+b_{12}$	$a_{13}+b_{13}$	$a_{14}+b_{14}$
淮北矿业	$a_{21}+b_{21}$	$a_{22}+b_{22}$	$a_{23}+b_{23}$	$a_{24}+b_{24}$
皖北煤电矿业	$a_{31}+b_{31}$	$a_{32}+b_{32}$	$a_{33}+b_{33}$	$a_{34}+b_{34}$

表1.5用矩阵表示即为

$$E=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}.$$

显然，表1.5是表1.1和表1.2的汇总.我们也称矩阵 E 为矩阵 A 与矩阵 B

的和.用数学符号表示即为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}.$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}.$$

取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行的元素$(a_{k1} \quad a_{k2} \quad a_{k3} \quad a_{k4})$,取矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 l 列的元素 $\begin{pmatrix} c_{1l} \\ c_{2l} \\ c_{3l} \\ c_{4l} \end{pmatrix}$,将其对应位置元素相乘并相加,结果记为 f_{kl},即

$$f_{kl}=a_{k1}c_{1l}+a_{k2}c_{2l}+a_{k3}c_{3l}+a_{k4}c_{4l} \quad (k=1,2,3;l=1,2,3).$$

以 f_{kl} 为元素,可以定义一个 3×3 阶的矩阵 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$.

在矩阵 $\boldsymbol{F}$ 中,元素 $f_{11}=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31}+a_{14}c_{41}$, $f_{22}=a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+a_{23}c_{32}+a_{24}c_{42}$, $f_{33}=a_{31}c_{13}+a_{32}c_{23}+a_{33}c_{33}+a_{34}c_{43}$ 的实际意义分别是淮南矿业、淮北矿业、皖北煤电矿业销售甲级煤炭的总收入.而 $f_{11}+f_{22}+f_{33}$ 的实际意义则是三大集团公司销售甲级煤炭的年总收入,我们称其为矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的迹,记作 $\operatorname{tr}\boldsymbol{F}$,即 $\operatorname{tr}\boldsymbol{F}=f_{11}+f_{22}+f_{33}$.

同样,取矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行的元素$(b_{k1} \quad b_{k2} \quad b_{k3} \quad b_{k4})$,取矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的第 l 列的元素 $\begin{pmatrix} d_{1l} \\ d_{2l} \\ d_{3l} \\ d_{4l} \end{pmatrix}$,将其对应位置元素相乘并相加,结果记为 g_{kl},即

$$g_{kl}=b_{k1}d_{1l}+b_{k2}d_{2l}+b_{k3}d_{3l}+b_{k4}d_{4l} \quad (k=1,2,3;l=1,2,3).$$

以 g_{kl} 为元素,也可以定义一个 3×3 阶的矩阵 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$.

在矩阵 G 中，元素 $g_{11}=b_{11}d_{11}+b_{12}d_{21}+b_{13}d_{31}+b_{14}d_{41}$，$g_{22}=b_{21}d_{12}+b_{22}d_{22}+b_{23}d_{32}+b_{24}d_{42}$，$g_{33}=b_{31}d_{13}+b_{32}d_{23}+b_{33}d_{33}+b_{34}d_{43}$ 的实际意义分别是淮南矿业、淮北矿业、皖北煤电矿业销售乙级煤炭的总收入. $\operatorname{tr}G=g_{11}+g_{22}+g_{33}$ 的实际意义则是三大集团公司销售乙级煤炭的年总收入.

由矩阵 A 和矩阵 C 按上述法则所确定的矩阵 F 称为矩阵 A 与 C 的乘积，记为 $F=AC$. 同样，矩阵 G 则是矩阵 B 与 D 的乘积，记作 $G=BD$.

例 1.2　某股份公司生产四种产品，各种产品在生产过程中的生产成本以及在各季度的产量分别由表 1.6 和表 1.7 给出.

表 1.6　产品生产成本　　（单位：万元/吨）

	产品			
消耗	A	B	C	D
原材料	0.5	0.8	0.7	0.65
劳动力	0.8	1.05	0.9	0.85
经营管理	0.3	0.6	0.7	0.5

表 1.7　各季度产量　　（单位：吨）

	季度			
产品	春	夏	秋	冬
A	9 000	10 500	11 000	8 500
B	6 500	6 000	5 500	7 000
C	10 500	9 500	9 500	10 000
D	8 500	9 500	9 000	8 500

在年度股东大会上，公司总裁准备用一个简单的数表向股东们介绍所有产品在各个季度的各项生产成本，各个季度的总成本，以及全年各项的总成本. 假设你就是这个公司的“总裁”，你如何来制作这个表格？

解　表 1.6 是一个 3 行 4 列的数表，用矩阵表示为

$$M=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.65\\ 0.8 & 1.05 & 0.9 & 0.85\\ 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.5\end{pmatrix},$$

表 1.7 是一个 4 行 4 列的数表，用矩阵表示为

$$N=\begin{pmatrix}9\,000 & 10\,500 & 11\,000 & 8\,500\\ 6\,500 & 6\,000 & 5\,500 & 7\,000\\ 10\,500 & 9\,500 & 9\,500 & 10\,000\\ 8\,500 & 9\,500 & 9\,000 & 8\,500\end{pmatrix}.$$

在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中取消耗品对应的行，取矩阵 $\boldsymbol{N}$ 中季节对应的列，将其相应位置元素对应相乘并相加，则可以得到某种消耗品在某个季节的总成本.

例如，取矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第一行与矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的第一列，将其对应位置元素相乘并相加，即

$$0.5\times 9\,000+0.8\times 6\,500+0.7\times 10\,500+0.65\times 8\,500=22\,575,$$

所得就是春季原材料的总成本.

也就是说，将矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 相乘，即可得到各种消耗品在各个季节消耗的总成本：

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}22\,575 & 22\,875 & 22\,400 & 22\,375\\ 30\,700 & 31\,325 & 30\,775 & 30\,375\\ 18\,200 & 18\,150 & 17\,750 & 18\,000\end{pmatrix}.$$

将矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 各行元素相加，即可分别得到原材料、劳动力、经营管理的全年总成本，分别是 90 225 万元、123 175 万元、72 100 万元.

取一个 4 行 1 列的矩阵 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，将积矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 与矩阵 $\boldsymbol{L}$ 相乘，得到一个 3 行 1 列的矩阵，其元素分别为矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 各行元素之和，即

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}22\,575 & 22\,875 & 22\,400 & 22\,375\\ 30\,700 & 31\,325 & 30\,775 & 30\,375\\ 18\,200 & 18\,150 & 17\,750 & 18\,000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\,225\\ 123\,175\\ 72\,100\end{pmatrix}.$$

取一个 1 行 3 列的矩阵 $\boldsymbol{K}=(1\quad 1\quad 1)$，将矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 相乘，得到一个 1 行 4 列的矩阵，其元素分别为矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 各列元素之和，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{MN})&=(1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}22\,575 & 22\,875 & 22\,400 & 22\,375\\ 30\,700 & 31\,325 & 30\,775 & 30\,375\\ 18\,200 & 18\,150 & 17\,750 & 18\,000\end{pmatrix}\\ &=(71\,475\quad 72\,350\quad 70\,925\quad 70\,750).\end{aligned}$$

而矩阵 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{MN}$、$\boldsymbol{L}$ 的乘积是一个 1 行 1 列的矩阵，其元素为矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 所有元

素之和,也就是全年的所有消耗的总成本,即

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{L}=(1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}22\,575 & 22\,875 & 22\,400 & 22\,375\\ 30\,700 & 31\,325 & 30\,775 & 30\,375\\ 18\,200 & 18\,150 & 17\,750 & 18\,000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=(285\,500).$$

将上述计算所得数据绘制成表1.8,此表格可直观反映出本公司全年消耗成本的总体情况.

表1.8 成本汇总 (单位:万元)

	春	夏	秋	冬	全年
原材料	22 575	22 875	22 400	22 375	90 225
劳动力	30 700	31 325	30 775	30 375	123 175
经营管理	18 200	18 150	17 750	18 000	721 000
总成本	71 475	72 350	70 925	70 750	285 500

本节最后,我们给出一些结构特殊的矩阵.这些矩阵将在以后的讨论中用到.

1. 对角矩阵

若 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times n}$ 中,有 $d_{ij}=0(i\neq j)$,即 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}\end{bmatrix}$,

则称矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵.

特别地,若对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的对角元素 d_{ii} 均相等,即 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d\end{bmatrix}$,则

称 $\boldsymbol{D}$ 是由数 d 所确定的数量阵.

由 $d=1$ 所确定的数量阵称为单位矩阵,记为 $\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$.