初中数学竞赛同步辅导

第一分册

主　编　刘汉文
副主编　南秀全

华中师范大学出版社

初中数学竞赛同步辅导

第　分册

（修订本）

主　编　刘汉文
副主编　南秀全

华中师范大学出版社

(鄂)新登字11号

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛同步辅导 第一分册/刘汉文主编。
—武汉：华中师范大学出版社，1996.11.
ISBN 7—5622—0882—4

Ⅰ．初…
Ⅱ．刘…
Ⅲ．数学—初中—教学参考资料
Ⅳ．G 633·6

初中数学竞赛同步辅导

第一分册

（修订本）

华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山 邮编：430070）

新华书店湖北发行所经销 通山县印刷厂印刷

责任编辑：曹艳丽 责任校对：罗少琳 封面设计：蔡跃华

开本：787×1092 1/32 印张：9 字数：224千字
版次：1994年9月第2版 1996年11月第9次印刷
印数：185 801—205 900 定价：6.80元

本书如有印装质量问题，可向承印厂调换。

序

数学奥林匹克不仅成为数学界的热门话题，甚至整个教育界、科学界也是一个重要议题。究其原因不外乎有：中国的中学生在国际数学奥林匹克中取得了极为优异的成绩；中国的数学界已提出要在21世纪初率先赶上世界先进水平，并寄希望于年轻一代数学才子。近几年来，湖北省，尤其是湖北黄冈地区，在各类各级数学奥林匹克竞赛中成绩十分突出，引起了全国乃至全世界的注视。

本书是中国数学奥林匹克高级教练员、特级教师、黄冈地区教研室副主任刘汉文同志主编的。全书有以下鲜明特点：

（一）严格按照初中数学课本的内容及其顺序编写，但不重复课本内容，对课本有关内容进行适当的加深拓宽。对于竞赛必需的知识，而课本中很少涉及或是空白，则依据学生知识和能力的实际，分别安排在不同年级，并对其最基本的理论作必要的阐述。因而本书是与课堂教学同步开展课外活动的极好辅导读物。

（二）依据《数学竞赛大纲》，阐述竞赛知识、方法和能力培养。各讲多数例题选自近几年国内外数学竞赛题，通过对例题解前的分析和解后的说明，系统归纳了整个初中数学竞赛范围内的知识方法和技巧，同当前数学竞赛命题热点相吻合，因而本书能使读者受到系统的奥林匹克数学基本理论教育和解题技巧的训练。

（三）书中各讲配备的练习、模拟题，都是作者多年辅导竞赛选手时用过的训练题中精选出来的，所以本书具有很强的实用性。

本书的作者既有国家奥林匹克集训队的专家，又有中学特级教师，他们都是数学竞赛的优秀教练员。这些同志既有丰富的中学教学经验，又有训练数学才子的高超办法。可以说，通过阅读此书，在一定程度上可以回答：为什么黄冈地区高中数学竞赛自 1983 年以来连续九年荣获湖北团体总分第一名、初中数学竞赛连续三年蝉联团体冠军。

相信本书的出版有助于进一步提高我国的初中数学竞赛的水平。

邓宗琦

1992 年 2 月

再版前言

本书自1992年冬出版发行以来，行销全国各地，深受广大读者的欢迎，普遍称赞这套书好在同步，贵在实用。特别是1993年全国初中数学联赛后，发现这届联赛试题不仅有几道小题，而且还有二试的二、三两道大题与本书中的例习题雷同，有的几乎完全一样。无疑的，这从一个侧面又一次证实了：本书是一套符合我国目前初中数学竞赛实际且与中学各年级数学教学同步的实用性极强的竞赛辅导丛书。因此，本书问世几个月，第一版接连重印四次，印数达数十万册，且仍不能满足广大读者的需求。

从去年秋季起，全国各地初中开始使用了义务教育三年制新教材，笔者根据广大读者的要求和建议，力求使本书的特色更加鲜明，又在实验的基础上对此书在以下几个方面作了较大篇幅的修改：

1. 调整了某些内容顺序，严格按照1994年修改后的竞赛大纲和义务教育新教材内容及其顺序编写，使之更好地与课堂教学同步。

2. 对于目前初中数学竞赛中的重要内容(如三角形的四心等)增设专讲或作专题论述，并大量吸收了近几年国内外数学竞赛的最新优秀试题，同时还注意增加了联系实际的应用问题。

3. 删去了不符合目前初中数学竞赛要求的诸如平面几何的梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理等内容和一些陈旧的过难的试题，以便与全国联赛要求保持一致。

为了给学有余力的学生每节课提供三道与教学同步的竞赛训练题，我们把多年在教学中积累的一——三年级训练题编成第四分册。现在，本套书一、二、三分册分别供初一、初二、初三年级使用，四分册可供三个年级课堂同步训练使用。

全书由特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员刘汉文老师和高级教师、优秀教练员南秀全老师修改，由本书主编统稿审定。

由于时间仓促，书中不妥或错误之处在所难免，我们热忱期待广大读者提出改进意见，以便今后再版时加以改正。

这里借再版之机，再次向广大读者表示衷心的感谢！

为本书（第一分册）原版提供初稿的有（以姓氏笔画为序）：

卞清胜　甘超一　刘汉文　刘　辉

吴远伦　洪伯阳　段　云　南秀全

姜文清

1994 年 2 月

目　录

第一讲　整数的基本知识

关于整数的研究，在数学里占有极为重要的地位。由于整数问题的解法灵活多变，技巧独特，易于考察学生的能力和智力，因此，在各种数学竞赛中，涉及整数的问题是很多的。

按照初中数学竞赛大纲的要求，本讲将介绍十进制整数及表示方法，最大公约数与最小公倍数，质数与合数，因数分解的表示法，约数个数的计算，整数的末位数字等有关知识。

一　十进制整数及表示方法

我们通常所说的整数都是十进制的. 例如，对于二位数，可以表示为$\overline{ab}$或 $10a+b$，对于三位数，可以表示为$\overline{abc}$或 $100a+10b+c$，其中 a,b,c 是 $0,1,\cdots\cdots,9$ 中的数，且 $a\neq0$.

一般地，一个十进制的 $n+1$ 位自然数 N 可以表示为

$$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$$
$$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0.$$

其中 $a_i(i=0,1,2\cdots,n)$都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant9$ 且 $a_n\neq0$. 自然数最左边的一位数字 a_n 叫做这个自然数的首位数字，最右边的一位数字 a_0 叫做这个自然数的末位数字.

例如：$1994=1\times10^3+9\times10^2+9\times10+4$.

例 1　一个六位数，如果它的前三位数与后三位数的数字完全相同，顺序也相同，则 7，11，13 必为此六位数的约数. (1983 年湖北省初中数学竞赛题)*

---

* "1983 年湖北省初中数学竞赛题"，本书以后简写成"(湖北省，1983 年)"，下同。

解 设此六位数为 $N=\overline{abcabc}, a\neq 0$,则有

$$
\begin{aligned}
N &= a\times 10^5+b\times 10^4+c\times 10^3+a\times 10^2+b\times 10+c \\
&= 100100\times a+10010b+1001c \\
&= 1001\times(100a+10b+c) \\
&= 7\times 11\times 13\times(100a+10b+c).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 7,11,13 是六位数 N 的约数.

例 2 设有六位数 $\overline{1abcde}$ 乘以 3 后,变为 $\overline{abcde1}$,求这个数.

分析 由 $\overline{abcde}$ 在变形中顺序没有变化,因此,可设 $\overline{abcde}=x$. 于是,$\overline{1abcde}=10^5+x$,

$\overline{abcde1}=10x+1$,即 $3(10^5+x)=10x+1$,

从而易得 $x=42857$. 故这个数为 142857.

例 3 大于 10 小于 100 的自然数中,当数字交换位置后所得的数比原数增加 9 的数共有几个?这些数各是多少?(河北省,1983 年)

解 设原数为 $10x+y$ $(1\leqslant x\leqslant 9, 1\leqslant y\leqslant 9$,$x$、$y$ 均为自然数),则新数为 $10y+x$. 根据题意,有

$10x+y+9=10y+x$,即 $x+1=y$. 而 x 可取 1,2,3,4,5,6,7,8 这八个数,故共得八个数,它们分别是 12,23,34,45,56,67,78,89.

例 4 把一个四位数的数码作相反顺序排列后,变为原数的 4 倍,求原数.

解 设原数为 $\overline{abcd}$,依题意有

$$4\times\overline{abcd}=\overline{dcba}. \qquad ①$$

因为两个数的位数相同,所以 $1\leqslant a\leqslant 2$ 且 a 为偶数,故 $a=2$,此时 d 只能是 9 或 8. 但 $d=9$ 不可能,否则①左边的个位数为 9,而右边的个位数为 2,因此,$d=8$,故有

$$32+40c+400b=2+10b+100c,$$

即 $\quad 13b+1=2c$. 则 $b=1,c=7$.

故原数为 2178.

例 5 把 1,2,3……,100 这一百个数顺次连接成一个数:

$$Z=12345678910111213\cdots99100.$$

(1) Z 是多少位数?

(2) 从数 Z 中划去 100 个数字,把剩下的数字顺次写成一个数 Z',并要求数 Z' 尽可能大,应当划去哪些数字?

解 (1)1,2,3,4…,99,100 中间共有一位数 9 个,二位数 90 个,三位数 1 个. 因此,Z 共有 $1\times9+2\times90+3\times1=192$ 位.

(2)数 Z 有 192 位,划去 100 个数字后,剩下 92 个数,所以 Z' 只有 92 个数位.

对于两个同为 92 位的数来说,前面的数字都是 9 的数位多的那个数显然比较大,按照本题的要求,Z' 前面应当尽可能多的数字是 9.

在数 Z 中划去第一个数字"9"前面的 8 个数字,再划去第 2 个"9"前面的 19 个数字,再分别划去第三个、第四个和第五个"9"前面的 19 个数字,这时,从数 Z 中已经划去了$(8+19\times4)=84$ 个数字,以后还要划去 16 个数字. 划去 84 个数字后得到的数是

$$99999505152535455565758596061\cdots99100.$$

此数第 6 个数字"9"前面有 19 个小于 9 的数字,所以不能把它们全部划去. 如果保留"8",那么前面要划去 17 个数字,因此,Z'的第六位只能选取数字"7",前面划去 15 个数字,再划去"7"后面的一个数字"5". 这样总共划去 16 个数字,加上前面划去的 84 个,共计划去了 100 个数字,最后得出的数是

$$Z' = 99999785960616 2\cdots 99100.$$

二　最大公约数与最小公倍数

若 a,b 是整数,$b\neq 0$,存在一个整数 c,使得 $a=bc$,则 a 称为 b 的倍数,b 称为 a 的约数(因数).

几个整数公有的约数,叫做这几个数的公约数.

几个正整数的所有公约数中最大的一个,叫做这几个整数的最大公约数. 几个整数的最大公约数总是存在的.

若正整数 d 是正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(整数 $n\geqslant 2$)的最大公约数,则记作

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d.$$

若一个数同时是几个数的倍数,则称这个数为这几个数的公倍数.

几个正整数的公倍数中,除 0 以外,最小的一个,叫做这几个正整数的最小公倍数.

若正整数 m 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$的最小公倍数,则记作

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m.$$

任何两个自然数的乘积等于它们的最小公倍数与最大公约数的乘积. 即

$$ab=[a,b]\cdot(a,b).$$

如何求出二整数 a,b 的最大公约数和最小公倍数呢? 如果能找出 a,b 的质因子分解式,就很简单了. 只要分别取相应质因子的最低次相乘即可得最大公约数,而求最小公倍数则取相应质因子的最高次数相乘.

例 6　有三根圆木材,其中第一根的长度是第二根的 1.2 倍,是第三根的一半,第三根比第二根长 280 厘米. 现在把三根圆木截成尽可能长而又相等的小段,可截成多少这样的小

段？

分析　要求共截的段数，必须求出三根圆木的长度和每小段的长度. 根据题意每小段的长度应是三根圆木长度的最大公约数.

解　设第二根圆木长为 x 厘米，则第一根圆木长为 $1.2x$ 厘米，第三根圆木长为 $x+280$ 厘米，从而有 $1.2x=\frac{x+280}{2}$，解之得 $x=200$(厘米).

所以，第二根圆木长为 200 厘米，第一根圆木长为 240 厘米，第三根圆木长为 480 厘米.

而 200，240，480 的最大公约数为 40，所以每小段长度为 40 厘米. 因而，可截成小段的总数为

$$(200+240+480)\div 40=23(\text{段}).$$

例 7　电子钟每 9 分钟亮一次灯，整点响铃. 12 点既亮灯又响铃以后，下次在几点既亮灯又响铃？

解　此题显然是求 9 分与 60 分的最小公倍数，而 9 分与 60 分的最小公倍数是 180 分. 所以下次在 3 点整既亮灯又响铃.

例 8　指挥员在操场上指挥一些士兵操练队形，当他命令站成二路纵队时(即每两人一排，排列下去)，最后一排只有一个人；于是他又命令站成三路纵队，结果最后一排剩二人；他再改变命令站成四路纵队，最后一排剩三人；为了能使队形整齐，他又命令站成五路纵队，但最后一排却剩下四人；命令站成六路纵队，最后一排剩五人；命令站成七路纵队，最后一排剩六人. 问这些士兵的人数至少是多少？

解　假设我们添一名士兵到这个队伍里去，那么无论站成 2 路至 7 路纵队中哪一路纵队，结果都是整齐的. 这时的士

兵数至少应该是2、3、4、5、6、7的最小公倍数，容易求得它是420.故操场上的士兵总数是419人

三　质数与合数

一个大于1的正整数a，若仅有1与a这两个正约数，则a叫做质数(又叫素数).质数有无穷多个；不存在最大质数；2为质数中唯一的偶数，且是最小质数.

若一个正整数a除了1与a这两个约数外还有其它正约数，则a叫做合数.

1既不是质数，也不是合数.全体正整数可以分为数1、质数和合数三类.

若一个正整数a的一个约数p是质数，则约数p就叫做a的质约数(又叫质因数).

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正整数，若有

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1,$$

则称$a_1,a_2,\cdots,a_n$是互质的数，或简称互质.

互质的数不一定都是质数，如$(8,9,14)=1$.但几个质数一定是互质的数.

特别，若$a_1,a_2,\cdots,a_n$中任意两个数都互质，即任意两个数的最大公约数都是1，则称这几个数两两互质.

例9　写出小于20的三个自然数，使它们的最大公约数是1，且两两均不互质.试问这样的三个自然数有几组？

解　因为三个自然数两两均不互质，所以三个数中不可能有质数.把这三个合数分解质因数.因为这三个自然数都小于20，而最小的三个质数的积$2\times3\times5=30$，已大于20，所以，这三个数中的每一个数在分解质因数时至多只有两个不同的质因数.于是，这三个自然数是：$2\times3=6$，$3\times5=15$，2×5

$=10$.

因为允许有相同的质因数，所以，还可有 12、10、15、10、15、18.

例 10 两个正整数的最大公约数是 7，最小公倍数是 105，求这两个数.

解 设两个数为 A、B $(A<B)$，它们除以 7 的商分别是 x、y，显然 x、y 是正整数且 x、y 是互质的. 于是

$$A=7x, B=7Y,$$

由最大公约数与最小公倍数的关系，知

$$7x \cdot 7y=7\times105. \quad \therefore \quad xy=15.$$

把 15 分成两个互质的因数相乘，则知 1×15 和 3×5.

故 $A=7, B=105$ 或 $A=21, B=35$.

例 11 对于每个自然数 n，数 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}2\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 是合数吗？为什么？（1987 年全俄中学生竞赛题）

解 因 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}2\underbrace{11\cdots1}_{n个}=\underbrace{11\cdots1}_{n+1个}\underbrace{00\cdots0}_{n个}+\underbrace{11\cdots1}_{n+1个}$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n+1个}(10^n+1)$$

对于 $n\geqslant1$ 的自然数，上两个因数均大于 1，所以所给的数是合数.

例 12 写出十个连续自然数，使其中每一个数都是合数.

解 这十个连续的自然数可以写成 $k+2, k+3, k+4, \cdots, k+11$ 的形式，如果这十个数都是合数，那 k 必须是 2，3，4 $\cdots$，11 的倍数. 因而可令 $k=2\times3\times4\times\cdots\times11$（记 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times11=11!$）. 那么 $11!+2, 11!+3, 11!+4, \cdots, 11!+11$ 就是十个连续的合数.

一般地，在给定一个任意大的自然数 n 后，可取 $k=(n+1)!$，那么 $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$ 这 n

个连续的自然数都是合数.

说明 这种解法中的 k 是我们“构造”出来的。构造思想和方法是数学中的一个重要思想方法,往往能出奇制胜地解决一些难题.

四 算术基本定理

算术基本定理:每个不等于 1 的自然数都可以分解为质因数的积的形式,并且这种分法是唯一的,即大于 1 的自然数 N 可以分解为 $N=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$.
其中 n 是 $\geqslant 1$ 的自然数,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是互不相同的质数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是自然数.上述分解称为自然数 N 的标准分解.

由算术基本定理可得到下列两个性质:

性质 1 (约数个数定理)N 的正约数(因数)的个数为 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$其中包括 1 和 n 这两个约数.

性质 2 (约数之和的定理)若用 $S(N)$表示自然数 N 的全部约数之和,则有

$$S(N)=\frac{P_1^{a_1+1}-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^{a_2+1}-1}{P_2-1}\cdots\frac{P_n^{a_n+1}-1}{P_n-1}.$$

例 13 30^4 的相异正约数的个数为____个.(合肥市,1989 年)

解 $30=2\times3\times5$ $\therefore$ $30^4=2^4\cdot3^4\cdot5^4$,由性质 1 知,30^4 的正约数的个数为

$$(4+1)(4+1)(4+1)=125 \text{ 个}$$

例 14 在一次射箭比赛中,已知小王与小张三次中靶的环数之积都是 36,二人总环数相等,且知小王的最高环数比小张的最高环数多(中靶的环数是不超过 10 的自然数),则小王的三次射箭的环数从小到大排列是____.(上海市,1986 年)

解 因 $36=1\times2\times2\times3\times3$，且小张的最高环数不为 9，故小张三次可能为 2，3，6 或 4，3，3 或 6，6，1. 又 $2+3+6=11$，$4+3+3=10$，$6+6+1=13$. 而小王三次可能为 9，4，1 或 9，2，2. 又 $9+4+1=14$，$9+2+2=13$，因为两人的总环数相等，所以只有总环数为 13 符合.

故小王的三次射靶的环数为 2，2，9.

例 15 设 $[r,s]$ 表示正整数 r 和 s 最小公倍数. 求使得 $[a,b]=1000$，$[b,c]=2000$，$[c,a]=2000$ 的正整数的有序三数组 (a,b,c) 的个数.（美国第 5 届数学邀请赛题）

解 由 $[a,b]=2^3\cdot5^3$，$[b,c]=[c,a]=2^4\cdot5^3$，可知 c 是 2^4 的倍数.

当 c 是 2^4 或 $2^4\cdot5$ 或 $2^4\cdot5^2$ 时，b,a 都是 5^3 的倍数：若 $b=5^3$ 或 $2\cdot5^3$ 或 $2^2\cdot5^3$，则 $a=2^3\cdot5^3$；若 $a=5^2$ 或 $2\cdot5^3$ 或 $2^2\cdot5^3$，则 $b=2^3\cdot5^3$；还有 $a=b=2^3\cdot5^3$. 这样的 (a,b,c) 有 $3\times7=21$ 个.

当 $c=2^4\cdot5^3$ 时，a,b 中至少有一个是 2^3 的倍数，且至少有一个是 5^3 的倍数：若 a,b 都不是 $2^3\cdot5^3$，则其一为 2^3 或 $2^3\cdot5$ 或 $2^3\cdot5^2$ 时，另一个为 5^3 或 $2\cdot5^3$ 或 $2^2\cdot5^3$；若 a,b 恰有一个是 $2^3\cdot5^3$，则另一个可以是 $2^3\cdot5^3$ 的任何因数，但 $2^3\cdot5^3$ 本身除外；还有 $a=b=2^3\cdot5^3$. 这样的 (a,b,c) 有 $(3\times3+4\times4-1)\times2+1=49$ 个.

故共有 $21+49=70$ 个 (a,b,c).

例 16 设 n 是满足下列条件的最小正整数，它们是 75 的倍数且恰有 75 个正整数因子（包括 1 和本身），求 $\frac{n}{75}$.（美国第八届数学邀请赛试题）

解 由已知条件，知 $n=75k=3\times5^2k$，欲使 n 尽可能小，