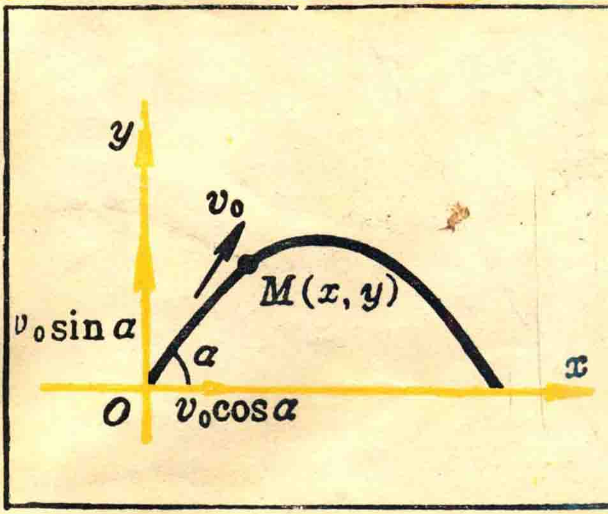
高级中学试验课本

数 学 Ⅳ （上册）



PEP

人民教育出版社

说　明

为了适应我国四化建设对人才类型的不同需求，高中数学教学在要求上应分成几种不同的水平。为了摸索进行这种改革的经验，同时为了探讨教材的编写怎样才能有利于提高学生的能力，取得较好的教学效益，我们参考现行高级中学数学课本（甲种本），试编了这套教学要求较高的高中试验课本《数学》，主要[illegible]

这套教材在内容[illegible]纲要（草案）较高要求内容》[illegible]用比较广泛的向量、逻辑等初步知识。为了便于学生系统复习整个高中阶段内容，将这些内容融为一体，在全书的最后安排了总复习教材。为便于因材施教，本书安排了部分选学内容。

编写本书时，我们注意对已学内容的循环加深和知识间的内在联系。注意将知识的学习和能力的培养紧密结合起来，努力在知识发生过程中和运用知识解决问题的过程中培养学生能力。注意理论与实际相结合，使学生受到从实际问题中抽取数学模型和运用知识解决力所能及的应用问题的训练。教材在提出问题时力求富有启发性，解决问题时注意分析，使学生学会思考问题的方法。为适合中学生特点，教材的叙述既注意准确、简明，又力求通俗、生动，具有可读性。为便于进行阶段复习，各章末或大节末安排了一段复习课教材。

本书的习题分为以下四类：

习题　主要供课堂练习和课外作业用。

复习题　按章安排，主要供复习全章内容时用。

思考题　紧密结合正文，具有一定的思考性，但为一般学生力所能及。这类题灵活穿插正文之中，旨在加深对知识的理解。

研究题　与所讲内容有一定的联系，问题的提法带有研究性，题量少但有一定难度，主要供少数水平较高的学生选用。

为便于检查核对，每一册书的最后附有该册的部分习题答案或提示。

全套书包括七本：

数学Ⅰ	代数	高中一年级
数学Ⅱ	代数（包括平面向量、三角）	
数学Ⅲ	立体几何	高中二年级
数学Ⅳ（上、下）	平面解析几何、复数、行列式	
数学Ⅴ	代数	高中三年级
数学Ⅵ（上、下）	微积分初步	
数学总复习		

本书的使用顺序也可不受上述安排的约束，而可以根据实际情况和教师的意见灵活掌握。例如，数学Ⅲ立体几何也可放在高一下学期学习。如果将《数学Ⅲ》放在高中二年级学习，可以《数学Ⅲ》（每周2课时）与《数学Ⅳ》（每周3课时）两条线并进，也可以学完《数学Ⅲ》后再学习《数学Ⅳ》。

《数学Ⅲ》（上册）内容包括：曲线与方程、直线、圆锥曲线。

全书由吕学礼先生任顾问。参加编写本书《数学Ⅲ》的有曾宪源、刘坤、明知白、方明一，李慧君对书稿提出了不少修改意见，责任编辑是饶汉昌、方明一。

由于时间仓促，水平有限，本书仍难免存在不少缺点，诚恳希望参加试验的教师和学生提出宝贵意见，以便改进。

人民教育出版社数学室

1989年5月

前　言

几何学研究的对象是图形，初中平面几何中，我们通过直接对图形的考察，经过推理得到了一些简单图形——直线形和圆的性质。

十七世纪初，科学技术的迅速发展对数学提出了一些新课题，如凯普勒发现行星运动的轨道是椭圆形；伽利略发现抛射物体沿抛物线轨迹运动等，要彻底解决这些问题，需要对椭圆、抛物线等图形进行深入的研究。用原来的方法研究这些复杂的图形遇到了困难，因此，人们开始寻求新的方法来研究几何学。

在初中我们学过，一个二元一次方程（一次函数）的图象是一条直线，两个二元一次方程组成的方程组的解，在图象上表现为两条直线的交点，因此，研究两条直线的交点的问题（几何问题）可以通过解方程组（代数问题）来解决。又如，给出一个二次函数$y=ax^2+bx+c$（可以看成二元二次方程），不仅可以知道它的图象是一条抛物线，而且还可以根据系数a,b,c的值的情况，判断这条抛物线开口的方向、大小，顶点的位置等。以上两个例子说明，当一个几何图形与一个代数方程建立了对应关系后，我们可以通过讨论相应的方程来研究图形的性质，把研究图形的几何问题转化为研究方程的代数问题，使几何问题得以解决。这种利用代数方法来研究几何图形的几何学，叫做解析几何学。专门研究平面图形的解析几何，叫平面解析几何。

根据解析几何的基本思想，平面解析几何研究基本的问题是：

1．根据已知条件，建立平面曲线的方程；

2．通过方程，研究平面曲线的性质．

在本书中，我们将运用上述基本思想来研究平面上的直线、二次曲线和其他曲线．

解析几何是十七世纪法国数学家笛卡尔创造的．由于解析几何将数形联系起来，且孕育着一种变动的思想，便于它对数学的发展，特别是对微积分的出现有很大的促进作用．

目　录

第一章 曲线与方程

一 有向线段、坐标法

我们研究的平面图形，都可以看作平面曲线．用代数方法研究曲线，首先要写出曲线的方程，也就是建立曲线与方程之间的对应关系，而建立曲线与方程的对应关系的媒介是坐标系．引进坐标系后，平面上一个点P便与一对有序实数对(x, y)建立了对应关系，进而可以建立曲线和方程的对应关系，这样就可以把研究曲线的问题转化为研究方程的问题．这种方法通常叫坐标法，也称解析法．实际上，我们在初中和高中一年级已接触过坐标法，曾用坐标法研究过三角函数的定义，证明了余弦定理等．为了顺利地学习“曲线与方程”，我们要在过去学习的基础上，进一步熟悉坐标法，同时介绍一些后面要用到的有向线段的有关知识．

1.1 有向线段

在学习向量时，提出过有向线段的概念．我们知道，在实际问题中所研究的线段，不仅要考虑它们的大小，往往还要考虑它们的方向．

任意一条直线 l，都可以规定两个相反的方向．如果把其中一个作为正方向，那么相反的方向就是负方向．规定了正方向的直线叫做**有向直线**．在图中，一条有向直线 l 正的

方向用箭头表示，如图1-1。

图 1-1

图 1-2

实际上，初中学过的数轴、直角坐标系中的x轴、y轴就是有向直线。它们不仅规定了直线的正方向，而且还规定了坐标原点和长度单位。

任意一条线段也可以规定两个相反的方向。如图1-2中的线段AB，如果以A为起点，B为终点，那么，它的方向是从A到B；相反，如果以B为起点，A为终点，它的方向就是从B到A。规定了起点和终点的线段，叫做**有向线段**，从起点到终点的方向就是这条有向线段的方向。

以A为起点，B为终点的有向线段，记作$\overline{AB}$；以B为起点，A为终点的有向线段，记作$\overline{BA}$。即表示有向线段时，表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面，$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是两条不相同的有向线段，因为它们的方向不同。

在图1-2中，C点是线段AB上的一点，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$是方向相同的有向线段，$\overline{AB}$和$\overline{CA}$是方向不同的有向线段。

选定一条线段作为度量的长度单位，我们可以量得一条线段的长度。线段AB的长度，就是有向线段$\overline{AB}$的长度，记作$|AB|$。如图1-3，设线段e是长度单位，那么$|AB|=3$。因为有向线段的长度与它的方向无关，所以$|BA|=|AB|$。

图 1-3

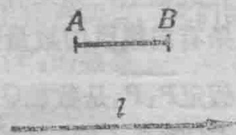


图 1-4

如果有向线段在有向直线l上或与l平行，那么，它的方向与l的正方向可能相同也可能相反。例如在图1-4中，$\overline{AB}$与l的方向相同，而$\overline{BA}$与l的方向相反。

根据$\overline{AB}$与有向直线 l 的方向相同或是相反，分别把它的长度加上正号或是负号，这样所得的数，叫做**有向线段的数量**，或有向线段的值。例如，在图1-5中，$\overline{AB}$的数量是5，$\overline{BA}$的数量是-5。有向线段$\overline{AB}$的数量用AB表示[13]，显然

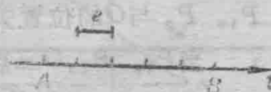


图 1-5

$$AB=-BA.$$

数轴上以O为起点，P为终点的有向线段$\overline{OP}$的数量就是点P在数轴上所对应的实数x_0。事实上数轴上一点P的坐标x_0就是以有向线段$\overline{OP}$的数量来定义的，$x_0=OP$。例如，点P_1，P_2的坐标分别是有向线段$\overline{OP_1}$、$\overline{OP_2}$的数量，即$OP_1=-2$，$OP_2=3$（图1-6）。

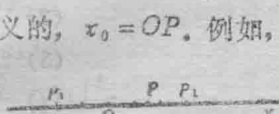


图 1-6

---

[13] 在引入有向直线以后，线段AB的长度一律用$|AB|$表示。

在数轴上，如果有向线段的起点不是坐标原点，如何确定这条有向线段的数量呢？

假定$\overline{P_1P_2}$是数轴Ox上的任意一条线段，且P_1，P_2都不与原点O重合（图1-6），设点P_1,P_2的坐标分别是x_1，x_2，那么$OP_1=x_1$，$OP_2=x_2$。

在图1-6中，$P_1P_2=|P_1P_2|$，$OP_1=-|OP_1|$，$OP_2=|OP_2|$，而$|P_1P_2|=|OP_1|+|OP_2|$，

$\therefore \quad P_1P_2=OP_2-OP_1$，

即 $\quad P_1P_2=x_2-x_1$。

思考题 若变换P_1，P_2相对于原点O的位置关系，如图1-7,是否可以得出同样结果？P_1，P_2与O的位置关系有几种？

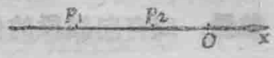


图 1-7

当P_1，P_2,O三点中任何两点都不重合时，它们的位置关系有且仅有六种（图1-8）。容易验证，对于P_1，P_2与O的各种位置的情况，都有$P_1P_2=x_2-x_1$；当点P_1或点P_2与点O重合时，这个等式同样成立。

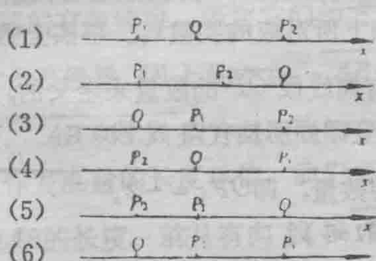


图 1-8

一般地，设P_1，P_2是数轴Ox上任意两点，它们的坐标分别是x_1，x_2，那么有向线段P_1P_2的数量

$$\boxed{P_1P_2 = x_2 - x_1.}$$

由这个公式可以得到，数轴上任意两点P_1，P_2的距离公式

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

平面上任意两点P_1，P_2的距离，可以设法化为数轴上的同类问题来求。

在直角坐标系中，已知两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（图1-9）。从P_1，P_2分别向x轴和y轴作垂线P_1M_1，P_1N_1和P_2M_2，P_2N_2，垂足分别为$M_1(x_1, 0)$，$N_1(0, y_1)$，$M_2(x_2, 0)$、$N_2(0, y_2)$，其中直线P_1N_1和P_2M_2相交于点O。

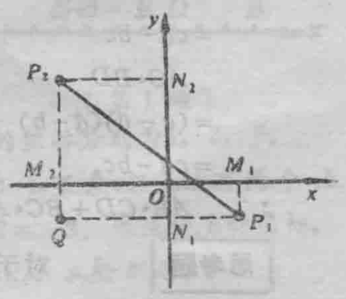


图 1-9

在$Rt\triangle P_1QP_2$中，

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

$$\because \quad |P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

由此得到两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的**距离公式**：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

例1 设A，B，C，D是同一有向直线上的四个点，求证不论它们的位置如何，总有

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

分析：因为AB，CD，BC，…等都是有向线段的数量，因此可利用有向线段数量的公式$P_1P_2 = x_2 - x_1$，为此要先设出A，B，C，D四点的坐标。

证明：取这个有向直线为Ox轴，使点O与点A重合，则点A的坐标为0，设点B，C，D的坐标分别为b，c，d，则

$$
\begin{aligned}
& AB \cdot CD + BC \cdot AD \\
&= (b-0)(d-c) + (c-b)(d-0) \\
&= -bc + cd \\
&= cd - bc \\
& AC \cdot BD \\
&= (c-0)(d-b) \\
&= cd - bc,
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

$\boxed{\text{思考题}}$　1．对于有向直线上任意三点A，B，C，总有$AB + BC = AC$。这就是有名的沙尔公式，你能证明这个公式吗？

2．怎样把1题中的结果推广到有向直线上任意n个点的情况？

例2　已知三角形三个顶点分别为$A(12,0)$，$B(9,\sqrt{30})$，$C(-1,0)$。求证$\triangle ABC$是直角三角形。

证明：分别计算$|AB|$，$|BC|$，$|CA|$。

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{(9-12)^2 + 30} = \sqrt{39}, \\
|BC| &= \sqrt{(-1-9)^2 + 30} = \sqrt{130}, \\
|CA| &= |12+1| = 13.
\end{aligned}
$$

∵　$(\sqrt{39})^2+(\sqrt{130})^2=13^2$,

∴　$|AB|^2+|BC|^2=|CA|^2$.

以△ABC是直所角三角形。

注：求坐标轴上或平行于坐标轴的直线上两点的距离，也可以用平面上任意两点的距离公式，但直接用数轴上两点的距离公式更简便。解题时应注意简捷。

习 题 一

1．如图，数轴上每一格等于一个长度单位，说出有向线段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$和$\overline{EA}$的长度和数量。

（第1题）

2．已知数轴x上的点A，B，C的坐标分别为1，2，3。

(1) 求$\overline{AB}$，$\overline{CB}$的数量；(2) 如果在x轴上还有两个点D，E，且$AD=2.5$，$CE=-3$。求点D，E的坐标。

3．已知数轴上A，B两点的坐标x_1，x_2分别是：

(1) $x_1=8$，$x_2=6$；　(2) $x_1=5$，$x_2=-3$；

(3) $x_1=-4$，$x_2=0$；　(4) $x_1=-9$，$x_2=-11$；

(5) $x_1=2a-b$，$x_2=a-2b$；

(6) $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=3+\sqrt{2}$。

求$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的数量。

4．A，B是数轴上两点，点B的坐标是x_2。根据下列条件，求点A的坐标x_1：

(1) $x_2=3$，$AB=5$；　(2) $x_2=-5$，$BA=-3$；

(3) $x_2=0$，$|AB|=2$；　(4) $x_2=-5$，$|AB|=2$。

5．设点P是A，B，C三点所在直线上任意一点，求证不论

它们的位置如何，总有

$$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0。$$

6．求有下列坐标的两点距离：

(1) $(6,0)$，$(-2,0)$；　　(2) $(0,-4)$，$(0,-1)$；

(3) $(6,0)$，$(0,\ -2)$；　　(4) $(2,1)$，$(5,-1)$；

(5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(6) $(ab^2,\ 2abc)$，$(ac^2,\ 0)$。

7．已知点$A(a,-5)$和$B(0,10)$的距离是17，求a的值。

8．已知某零件一个面上有3个孔，孔中心的坐标分别为：$A(-10,30)$，$B(-2,3)$，$C(0,-1)$。求每两孔中心的距离。

9．已知点$P(x,\ 2)$，$Q(-2,\ -3)$，$M(1,\ 1)$，且$|PQ|=|PM|$。求x。

10．(1) 求在x轴上与点$A(5,\ 12)$的距离为13的点的坐标；

(2) 已知点P的横坐标是7，点P到点$N(-1,5)$的距离等于10，求点P的纵坐标。

1.2　有向线段的定比分点

有向直线l上的一点P，把l上的有向线段$\overline{P_1P_2}$分成两条有向线段$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$，$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$数量的比叫做点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比，通常用字母λ来表示这个比值，

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

点P叫做$\overline{P_1P_2}$的**定比分点**。

如果点P在线段P_1P_2上(图1-10甲)，点P叫做$\overline{P_1P_2}$的**内分点**，这时，无论l的方向如何，$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的方向都相同，它们的数量的符号也相同，所以λ为正值。如果点P在线段P_2P_1或P_1P_2的延长线上(图1-10乙、丙)，点P叫做$\overline{P_1P_2}$的**外分点**。这时无论l的方向如何，$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的方向都相反，它们的数量的符号也相反，所以λ为负值。

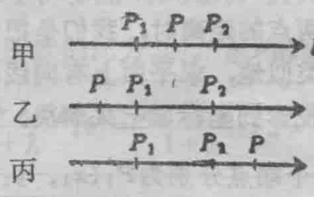


图 1-10

由于点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比与它们所在的直线l的方向无关，为了简便起见，在以后谈到点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比时，一般不提它所在的有向直线的方向。

如果有向线段$\overline{P_1P_2}$在数轴Ox上，点P_1，P_2的坐标分别为x_1，x_2，点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比为λ(图1-11)，那么，点P的坐标是什么呢？

设点P的坐标为x，由

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

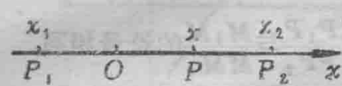


图 1-11

即$(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$，当$\lambda\neq-1$时，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

这是数轴上的定比分点公式，注意x_1是有向线段起点的坐标，x_2是有向线段终点的坐标。

思考题 定比λ为什么不能为-1，你能说出当$\lambda=-1$时，P_1，P，P_2的位置的情况吗？λ能等于零吗？你能说出当$\lambda=0$时，P_1，P，P_2的位置情况吗？

下面，我们研究已知平面上有向线段$\overline{P_1P_2}$的两个端点的坐标以及定比λ，如何求分点P的坐标。

在求平面上两点的距离时，我们是把它化为求数轴上两点的距离来做。类似地，求平面上有向线段的定比分点的坐标，也可以把它投影到坐标轴上来解决。

设$\overline{P_1P_2}$的两个端点分别为$P_1(x_1,\ y_1)$和$P_2(x_2,\ y_2)$，点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比为$\lambda(\lambda\neq-1)$。如图1-12，过点P_1，P_2，P分别作x轴的垂线P_1M_1，P_2M_2，PM，则垂足分别为$M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$，$M(x,0)$。根据平行线分线段成比例定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点P在线段P_1P_2上，那么点M也在线段M_1M_2上；如果点P在线段P_1P_2或P_2P_1的延长线上，那么点M也在线段M_1M_2或M_2M_1的延长线上

因此$\dfrac{P_1P}{PP_2}$与$\dfrac{M_1M}{MM_2}$的符号相同，

所以 $$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

$\because\ M_1M=x-x_1,$

$MM_2=x_2-x,$

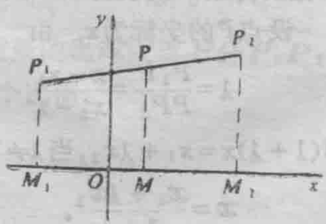


图 1-12