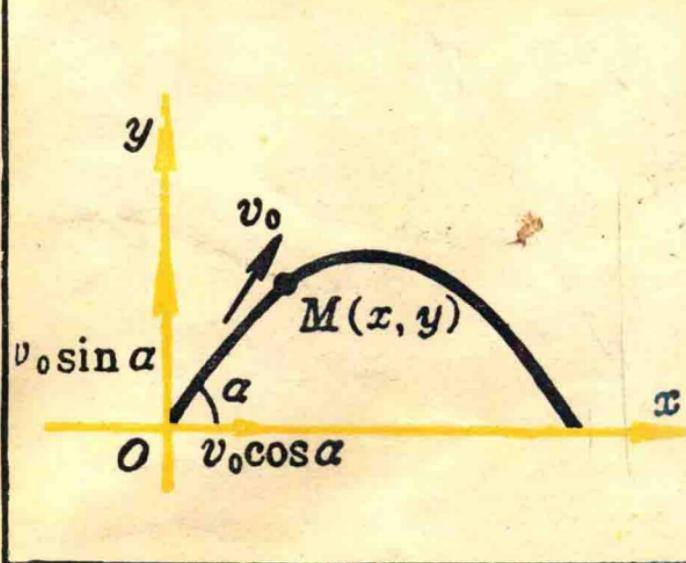


数学 IV (上册)



说 明

为了适应我国四化建设对人才类型的不同需求，高中数学教学在要求上应分成几种不同的水平。为了摸索进行这种改革的经验，同时为了探讨教材的编写怎样才能有利于提高学生的能力，取得较好的教学效益，我们参考现行高级中学数学课本（甲种本），试编了这套教学要求较高的高中试验课本《数学》，主要

这套教材在内容
案）较高要求内容》
要（草
用比较广
泛的向量、逻辑等初步知识。为了便于学生系统复习整个高
中阶段内容，将这些内容融为一体，在全书的最后安排了总
复习教材。为便于因材施教，本书安排了部分选学内容。

编写本书时，我们注意对已学内容的循环加深和知识间的内在联系。注意将知识的学习和能力的培养紧密结合起来，努力在知识发生过程中和运用知识解决问题的过程中培养学生能力。注意理论与实际相结合，使学生受到从实际问题中抽取数学模型和运用知识解决力所能及的应用问题的训练。教材在提出问题时力求富有启发性，解决问题时注意分析，使学生学会思考问题的方法。为适合中学生特点，教材的叙述既注意准确、简明，又力求通俗、生动，具有可读性。为便于进行阶段复习，各章末或大节末安排了一段复习课教材。

本书的习题分为以下四类：

习题 主要供课堂练习和课外作业用。

复习题 按章安排，主要供复习全章内容时用。

思考题 紧密结合正文，具有一定的思考性，但为一般学生力所能及。这类题灵活穿插正文之中，旨在加深对知识的理解。

研究题 与所讲内容有一定的联系，问题的提法带有研究性，题量少但有一定难度，主要供少数水平较高的学生选用。

为便于检查核对，每一册书的最后附有该册的部分习题答案或提示。

全套书包括七本：

数学 I	代数	高中一年级
数学 II	代数（包括平面向量、三角）	
数学 III	立体几何	高中二年级
数学 IV（上、下）	平面解析几何、复数、行列式	
数学 V	代数	高中三年级
数学 VI（上、下）	微积分初步	
数学总复习		

本书的使用顺序也可不受上述安排的约束，而可以根据实际情况和教师的意见灵活掌握。例如，数学 III 立体几何也可放在高一下学期学习。如果将《数学 III》放在高中二年级学习，可以《数学 III》（每周 2 课时）与《数学 IV》（每周 3 课时）两条线并进，也可以学完《数学 III》后再学习《数学 IV》。

《数学Ⅳ》(上册)内容包括：曲线与方程、直线、圆锥曲线。

全书由吕学礼先生任顾问。参加编写本书《数学Ⅳ》的有曾宪源、刘坤、明知白、方明一，李慧君对书稿提出了不少修改意见，责任编辑是饶汉昌、方明一。

由于时间仓促，水平有限，本书仍难免存在不少缺点，诚恳希望参加试验的教师和学生提出宝贵意见，以便改进。

人民教育出版社数学室

1989年5月

第二章 直线	101
1. 直线的一般方程	101
2. 直线的交点	102
3. 平行与垂直	103
4. 点到直线的距离	104
5. 曲线与方程	105
6. 圆锥曲线	106
7. 双曲线	107
8. 抛物线	108
9. 椭圆	109
10. 圆	110
11. 直线与圆锥曲线	111
12. 圆锥曲线的极坐标方程	112
13. 圆锥曲线的参数方程	113
14. 圆锥曲线的切线	114
15. 圆锥曲线的渐近线	115
16. 圆锥曲线的中心对称性	116
17. 圆锥曲线的统一定义	117
18. 圆锥曲线的统一方程	118
19. 圆锥曲线的统一极坐标方程	119
20. 圆锥曲线的统一参数方程	120
21. 圆锥曲线的统一渐近线方程	121
22. 圆锥曲线的统一中心对称性	122
23. 圆锥曲线的统一切线方程	123
24. 圆锥曲线的统一渐近线方程	124
25. 圆锥曲线的统一中心对称性	125
26. 圆锥曲线的统一切线方程	126
27. 圆锥曲线的统一渐近线方程	127
28. 圆锥曲线的统一中心对称性	128
29. 圆锥曲线的统一切线方程	129
30. 圆锥曲线的统一渐近线方程	130
31. 圆锥曲线的统一中心对称性	131
32. 圆锥曲线的统一切线方程	132
33. 圆锥曲线的统一渐近线方程	133
34. 圆锥曲线的统一中心对称性	134
35. 圆锥曲线的统一切线方程	135
36. 圆锥曲线的统一渐近线方程	136
37. 圆锥曲线的统一中心对称性	137
38. 圆锥曲线的统一切线方程	138
39. 圆锥曲线的统一渐近线方程	139
40. 圆锥曲线的统一中心对称性	140
41. 圆锥曲线的统一切线方程	141
42. 圆锥曲线的统一渐近线方程	142
43. 圆锥曲线的统一中心对称性	143
44. 圆锥曲线的统一切线方程	144
45. 圆锥曲线的统一渐近线方程	145
46. 圆锥曲线的统一中心对称性	146
47. 圆锥曲线的统一切线方程	147
48. 圆锥曲线的统一渐近线方程	148
49. 圆锥曲线的统一中心对称性	149
50. 圆锥曲线的统一切线方程	150
51. 圆锥曲线的统一渐近线方程	151
52. 圆锥曲线的统一中心对称性	152
53. 圆锥曲线的统一切线方程	153
54. 圆锥曲线的统一渐近线方程	154
55. 圆锥曲线的统一中心对称性	155
56. 圆锥曲线的统一切线方程	156
57. 圆锥曲线的统一渐近线方程	157
58. 圆锥曲线的统一中心对称性	158
59. 圆锥曲线的统一切线方程	159
60. 圆锥曲线的统一渐近线方程	160
61. 圆锥曲线的统一中心对称性	161
62. 圆锥曲线的统一切线方程	162
63. 圆锥曲线的统一渐近线方程	163
64. 圆锥曲线的统一中心对称性	164
65. 圆锥曲线的统一切线方程	165
66. 圆锥曲线的统一渐近线方程	166
67. 圆锥曲线的统一中心对称性	167
68. 圆锥曲线的统一切线方程	168
69. 圆锥曲线的统一渐近线方程	169
70. 圆锥曲线的统一中心对称性	170
71. 圆锥曲线的统一切线方程	171
72. 圆锥曲线的统一渐近线方程	172
73. 圆锥曲线的统一中心对称性	173
74. 圆锥曲线的统一切线方程	174
75. 圆锥曲线的统一渐近线方程	175
76. 圆锥曲线的统一中心对称性	176
77. 圆锥曲线的统一切线方程	177
78. 圆锥曲线的统一渐近线方程	178
79. 圆锥曲线的统一中心对称性	179
80. 圆锥曲线的统一切线方程	180
81. 圆锥曲线的统一渐近线方程	181
82. 圆锥曲线的统一中心对称性	182
83. 圆锥曲线的统一切线方程	183
84. 圆锥曲线的统一渐近线方程	184
85. 圆锥曲线的统一中心对称性	185
86. 圆锥曲线的统一切线方程	186
87. 圆锥曲线的统一渐近线方程	187
88. 圆锥曲线的统一中心对称性	188
89. 圆锥曲线的统一切线方程	189
90. 圆锥曲线的统一渐近线方程	190
91. 圆锥曲线的统一中心对称性	191
92. 圆锥曲线的统一切线方程	192
93. 圆锥曲线的统一渐近线方程	193
94. 圆锥曲线的统一中心对称性	194
95. 圆锥曲线的统一切线方程	195
96. 圆锥曲线的统一渐近线方程	196
97. 圆锥曲线的统一中心对称性	197
98. 圆锥曲线的统一切线方程	198
99. 圆锥曲线的统一渐近线方程	199
100. 圆锥曲线的统一中心对称性	200
101. 圆锥曲线的统一切线方程	201
102. 圆锥曲线的统一渐近线方程	202
103. 圆锥曲线的统一中心对称性	203
104. 圆锥曲线的统一切线方程	204
105. 圆锥曲线的统一渐近线方程	205
106. 圆锥曲线的统一中心对称性	206
107. 圆锥曲线的统一切线方程	207
108. 圆锥曲线的统一渐近线方程	208
109. 圆锥曲线的统一中心对称性	209
110. 圆锥曲线的统一切线方程	210
111. 圆锥曲线的统一渐近线方程	211
112. 圆锥曲线的统一中心对称性	212
113. 圆锥曲线的统一切线方程	213
114. 圆锥曲线的统一渐近线方程	214
115. 圆锥曲线的统一中心对称性	215
116. 圆锥曲线的统一切线方程	216
117. 圆锥曲线的统一渐近线方程	217
118. 圆锥曲线的统一中心对称性	218
119. 圆锥曲线的统一切线方程	219
120. 圆锥曲线的统一渐近线方程	220
121. 圆锥曲线的统一中心对称性	221
122. 圆锥曲线的统一切线方程	222
123. 圆锥曲线的统一渐近线方程	223
124. 圆锥曲线的统一中心对称性	224
125. 圆锥曲线的统一切线方程	225
126. 圆锥曲线的统一渐近线方程	226
127. 圆锥曲线的统一中心对称性	227
128. 圆锥曲线的统一切线方程	228
129. 圆锥曲线的统一渐近线方程	229
130. 圆锥曲线的统一中心对称性	230
131. 圆锥曲线的统一切线方程	231
132. 圆锥曲线的统一渐近线方程	232
133. 圆锥曲线的统一中心对称性	233
134. 圆锥曲线的统一切线方程	234
135. 圆锥曲线的统一渐近线方程	235
136. 圆锥曲线的统一中心对称性	236
137. 圆锥曲线的统一切线方程	237
138. 圆锥曲线的统一渐近线方程	238
139. 圆锥曲线的统一中心对称性	239
140. 圆锥曲线的统一切线方程	240
141. 圆锥曲线的统一渐近线方程	241
142. 圆锥曲线的统一中心对称性	242
143. 圆锥曲线的统一切线方程	243
144. 圆锥曲线的统一渐近线方程	244
145. 圆锥曲线的统一中心对称性	245
146. 圆锥曲线的统一切线方程	246
147. 圆锥曲线的统一渐近线方程	247
148. 圆锥曲线的统一中心对称性	248
149. 圆锥曲线的统一切线方程	249
150. 圆锥曲线的统一渐近线方程	250
151. 圆锥曲线的统一中心对称性	251
152. 圆锥曲线的统一切线方程	252
153. 圆锥曲线的统一渐近线方程	253
154. 圆锥曲线的统一中心对称性	254
155. 圆锥曲线的统一切线方程	255
156. 圆锥曲线的统一渐近线方程	256
157. 圆锥曲线的统一中心对称性	257
158. 圆锥曲线的统一切线方程	258
159. 圆锥曲线的统一渐近线方程	259
160. 圆锥曲线的统一中心对称性	260
161. 圆锥曲线的统一切线方程	261
162. 圆锥曲线的统一渐近线方程	262
163. 圆锥曲线的统一中心对称性	263
164. 圆锥曲线的统一切线方程	264
165. 圆锥曲线的统一渐近线方程	265
166. 圆锥曲线的统一中心对称性	266
167. 圆锥曲线的统一切线方程	267
168. 圆锥曲线的统一渐近线方程	268
169. 圆锥曲线的统一中心对称性	269
170. 圆锥曲线的统一切线方程	270
171. 圆锥曲线的统一渐近线方程	271
172. 圆锥曲线的统一中心对称性	272
173. 圆锥曲线的统一切线方程	273
174. 圆锥曲线的统一渐近线方程	274
175. 圆锥曲线的统一中心对称性	275
176. 圆锥曲线的统一切线方程	276
177. 圆锥曲线的统一渐近线方程	277
178. 圆锥曲线的统一中心对称性	278
179. 圆锥曲线的统一切线方程	279
180. 圆锥曲线的统一渐近线方程	280
181. 圆锥曲线的统一中心对称性	281
182. 圆锥曲线的统一切线方程	282
183. 圆锥曲线的统一渐近线方程	283
184. 圆锥曲线的统一中心对称性	284
185. 圆锥曲线的统一切线方程	285
186. 圆锥曲线的统一渐近线方程	286
187. 圆锥曲线的统一中心对称性	287
188. 圆锥曲线的统一切线方程	288
189. 圆锥曲线的统一渐近线方程	289
190. 圆锥曲线的统一中心对称性	290
191. 圆锥曲线的统一切线方程	291
192. 圆锥曲线的统一渐近线方程	292
193. 圆锥曲线的统一中心对称性	293
194. 圆锥曲线的统一切线方程	294
195. 圆锥曲线的统一渐近线方程	295
196. 圆锥曲线的统一中心对称性	296
197. 圆锥曲线的统一切线方程	297
198. 圆锥曲线的统一渐近线方程	298
199. 圆锥曲线的统一中心对称性	299
200. 圆锥曲线的统一切线方程	300

前　　言

几何学研究的对象是图形，初中平面几何中，我们通过直接对图形的考察，经过推理得到了一些简单图形——直线形和圆的性质。

十七世纪初，科学技术的迅速发展对数学提出了一些新课题，如凯普勒发现行星运动的轨道是椭圆形；伽利略发现抛射物体沿抛物线轨迹运动等，要彻底解决这些问题，需要对椭圆、抛物线等图形进行深入的研究。用原来的方法研究这些复杂的图形遇到了困难，因此，人们开始寻求新的方法来研究几何学。

在初中我们学过，一个二元一次方程（一次函数）的图象是一条直线，两个二元一次方程组成的方程组的解，在图象上表现为两条直线的交点，因此，研究两条直线的交点的问题（几何问题）可以通过解方程组（代数问题）来解决。又如，给出一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （可以看成二元二次方程），不仅要知道它的图象是一条抛物线，而且还可以根据系数 a,b,c 的值的情况，判断这条抛物线开口的方向、大小，顶点的位置等。以上两个例子说明，当一个几何图形与一个代数方程建立了对应关系后，我们可以通过讨论相应的方程来研究图形的性质，把研究图形的几何问题转化为研究方程的代数问题，使几何问题得以解决。这种利用代数方法来研究几何图形的几何学，叫做解析几何学。专门研究平面图形的解析几何，叫平面解析几何。

根据解析几何的基本思想，平面解析几何研究基本的问题是：

1. 根据已知条件，建立平面曲线的方程；
2. 通过方程，研究平面曲线的性质。

在本书中，我们将运用上述基本思想来研究平面上的直线、二次曲线和其他曲线。

解析几何是十七世纪法国数学家笛卡尔创造的。由于解析几何将数形联系起来，且孕育着一种变动的思想，便于它对数学的发展，特别是对微积分的出现有很大的促进作用。

笛卡尔是法国著名的哲学家、数学家、物理学家，是欧洲科学革命的先驱者之一，他的“普遍方法”是用代数方法解决几何问题的尝试，他提出的坐标几何学，使几何学和代数有机地统一起来，从而形成了一个崭新的数学分支——解析几何。

笛卡尔于1596年9月31日出生在图卢兹附近的小镇拉雷恩，父亲是当地有名的律师。1612年，他进入巴黎的耶稣会学校读书，1619年，他到荷兰游历，开始研究哲学、数学、物理学、天文学等自然科学。1622年，他写成《自然哲学之数学原理》，1628年，写成《折光论》。1637年，他写成《世界新秩序》。同年，他在《哲学报导》上发表《方法论》，提出了著名的“我思故我在”的哲学命题。1641年，他写成《第一哲学沉思录》，1644年，写成《灵魂与身体的关系》。1649年，他被瑞典国王查理十二世聘为宫廷数学家，但因与瑞典王后及大臣发生冲突，被投入监狱，次年1月14日被处死。笛卡尔的著作对后世影响很大，他的“普遍方法”对后来的数学发展产生了深远的影响。

目 录

前 言.....	1
第一章 曲线与方程.....	1
一 有向线段、坐标法.....	1
二 曲线与方程.....	17
第二章 直线.....	36
一 直线的方程.....	36
二 两条直线的位置关系.....	61
第三章 圆锥曲线.....	103
一 圆.....	104
二 椭圆.....	124
三 双曲线.....	138
四 抛物线.....	151
附 录 部分习题答案或提示.....	183

第一章 曲线与方程

一 有向线段、坐标法

我们研究的平面图形，都可以看作平面曲线。用代数方法研究曲线，首先要写出曲线的方程，也就是建立曲线与方程之间的对应关系，而建立曲线与方程的对应关系的媒介是坐标系。引进坐标系后，平面上一个点 P 便与一对有序实数对 (x, y) 建立了对应关系，进而可以建立曲线和方程的对应关系，这样就可以把研究曲线的问题转化为研究方程的问题。这种方法通常叫坐标法，也称解析法。实际上，我们在初中和高中一年级已接触过坐标法，曾用坐标法研究过三角函数的定义，证明了余弦定理等。为了顺利地学习“曲线与方程”，我们要在过去学习的基础上，进一步熟悉坐标法，同时介绍一些后面要用到的有向线段的有关知识。

1.1 有向线段

在学习向量时，提出过有向线段的概念。我们知道，在实际问题中所研究的线段，不仅要考虑它们的大小，往往还要考虑它们的方向。

任意一条直线 l ，都可以规定两个相反的方向。如果把其中一个作为正方向，那么相反的方向就是负方向。规定了正方向的直线叫做有向直线。在图中，一条有向直线 l 正的

方向用箭头表示，如图1-1。



图 1-1

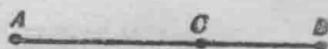


图 1-2

实际上，初中学过的数轴、直角坐标系中的 x 轴、 y 轴就是有向直线。它们不仅规定了直线的正方向，而且还规定了坐标原点和长度单位。

任意一条线段也可以规定两个相反的方向。如图1-2中的线段 AB ，如果以 A 为起点， B 为终点，那么，它的方向是从 A 到 B ；相反，如果以 B 为起点， A 为终点，它的方向就是从 B 到 A 。规定了起点和终点的线段，叫做**有向线段**，从起点到终点的方向就是这条有向线段的方向。

以 A 为起点， B 为终点的有向线段，记作 \overrightarrow{AB} ；以 B 为起点， A 为终点的有向线段，记作 \overrightarrow{BA} 。即表示有向线段时，表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面， \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{BA} 是两条不相同的有向线段，因为它们的方向不同。

在图1-2中， C 点是线段 AB 上的一点， \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{AC} 是方向相同的有向线段， \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{CA} 是方向不同的有向线段。

选定一条线段作为度量的长度单位，我们可以量得一条线段的长度。线段 AB 的长度，就是有向线段 \overrightarrow{AB} 的长度，记作 $|AB|$ 。如图1-3，设线段 e 是长度单位，那么 $|AB|=3$ 。因为有向线段的长度与它的方向无关，所以 $|BA|=|AB|$ 。



图 1-3

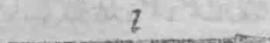


图 1-4

如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行，那么，它的方向与 l 的正方向可能相同也可能相反。例如在图 1-4 中， \overrightarrow{AB} 与 l 的方向相同，而 \overrightarrow{BA} 与 l 的方向相反。

根据 \overrightarrow{AB} 与有向直线 l 的方向相同或是相反，分别把它的长度加上正号或是负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量，或有向线段的值。例如，在

图 1-5 中， \overrightarrow{AB} 的数量是 5， \overrightarrow{BA} 的数量是 -5。有向线段 \overrightarrow{AB} 的数量用 AB 表示①，显然

$$AB = -BA,$$

数轴上以 O 为起点， P 为终点的有向线段 \overrightarrow{OP} 的数量就是点 P 在数轴上所对应的实数 x_0 。事实上数轴上一点 P 的坐标 x_0 就是以有向线段 \overrightarrow{OP} 的数量来定义的， $x_0 = OP$ 。例如，点 P_1 ， P_2 的坐标分别是有向线段

$\overrightarrow{OP_1}$ ， $\overrightarrow{OP_2}$ 的数量，即 $OP_1 = -2$ ，
 $OP_2 = 3$ （图 1-6）。

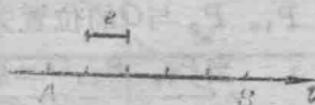


图 1-5

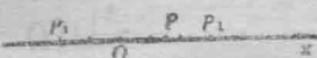


图 1-6

①在引入有向直线以后，线段 AB 的长度一律用 $|AB|$ 表示。

在数轴上，如果有向线段的起点不是坐标原点，如何确定这条有向线段的数量呢？

假定 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是数轴 Ox 上的任意一条线段，且 P_1, P_2 都不与原点 O 重合（图1-6），设点 P_1, P_2 的坐标分别是 x_1, x_2 ，那么 $OP_1 = x_1, OP_2 = x_2$ 。

在图1-6中， $P_1P_2 = |P_1P_2|$ ， $OP_1 = -|OP_1|$ ， $OP_2 = |OP_2|$ ，而 $|P_1P_2| = |OP_1| + |OP_2|$ ，

$$\therefore P_1P_2 = OP_2 - OP_1,$$

即 $P_1P_2 = x_2 - x_1.$

思考题 若变换 P_1, P_2 相对于原点 O 的位置关系，

如图1-7，是否可以得出同样结果？

P_1, P_2 与 O 的位置关系有几种？

当 P_1, P_2, O 三点中任何两点

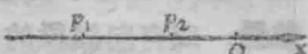


图 1-7

都不重合时，它们的位置关系有且仅有六种（图1-8）。容易验证，对于 P_1, P_2 与 O 的各种位置的情况，都有 $P_1P_2 = x_2 - x_1$ ；当点 P_1 或点 P_2 与点 O 重合时，这个等式同样成立。

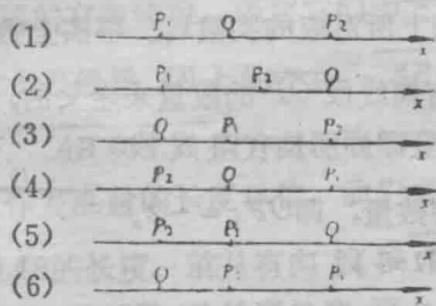


图 1-8

一般地，设 P_1 , P_2 是数轴 Ox 上任意两点，它们的坐标分别是 x_1 , x_2 ，那么有向线段 P_1P_2 的数 ν

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

由这个公式可以得到，数轴上任意两点 P_1 , P_2 的距离公式

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

平面上任意两点 P_1 , P_2 的距离，可以设法化为数轴上的同类问题来求。

在直角坐标系中，已知两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ （图1-9）。从 P_1 , P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1 , P_1N_1 和 P_2M_2 , P_2N_2 ，垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$, $N_1(0, y_1)$, $M_2(x_2, 0)$, $N_2(0, y_2)$ ，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 O 。

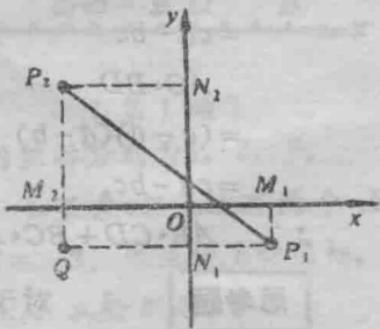


图 1-9

在 $Rt\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

$$\therefore |P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore |P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

例 1 设 A , B , C , D 是同一有向直线上的四个点，求证不论它们的位置如何，总有

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

分析：因为 AB , CD , BC , ... 等都是有向线段的数量，因此可利用有向线段数量的公式 $P_1P_2 = x_2 - x_1$ ，为此要先设出 A , B , C , D 四点的坐标。

证明：取这个有向直线为 Ox 轴，使点 O 与点 A 重合，则点 A 的坐标为 0，设点 B , C , D 的坐标分别为 b , c , d ，则

$$\begin{aligned} & AB \cdot CD + BC \cdot AD \\ &= (b - 0)(d - c) + (c - b)(d - 0) \\ &= -bc + cd \\ &= cd - bc \\ & AC \cdot BD \\ &= (c - 0)(d - b) \\ &= cd - bc, \\ \therefore \quad & AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD. \end{aligned}$$

思考题

1. 对于有向直线上任意三点 A , B , C ，总有 $AB + BC = AC$ 。这就是有名的沙尔公式，你能证明这个公式吗？

2. 怎样把 1 题中的结果推广到有向直线上任意 n 个点的情况？

例 2 已知三角形三个顶点分别为 $A(12, 0)$, $B(9, \sqrt{30})$, $C(-1, 0)$ 。求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

证明：分别计算 $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ 。

$$|AB| = \sqrt{(9 - 12)^2 + 30} = \sqrt{39},$$

$$|BC| = \sqrt{(-1 - 9)^2 + 30} = \sqrt{130},$$

$$|CA| = |12 + 1| = 13.$$

$$\therefore (\sqrt{39})^2 + (\sqrt{130})^2 = 13^2,$$

$$\therefore |AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2.$$

以 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

注：求坐标轴上或平行于坐标轴的直线上两点的距离，也可以用平面上任意两点的距离公式，但直接用数轴上两点的距离公式更简便。解题时应注意简捷。

习 题 一

1. 如图，数轴上每一格等

于一个长度单位，说出

有向线段 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD}

和 \overrightarrow{EA} 的长度和数量。 (第1题)

2. 已知数轴 x 上的点 A , B , C 的坐标分别为1, 2, 3。

(1) 求 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CB} 的数量；(2) 如果在 x 轴上还有两个点 D, E , 且 $AD=2.5$, $CE=-3$. 求点 D, E 的坐标。

3. 已知数轴上 A , B 两点的坐标 x_1 , x_2 分别是：

(1) $x_1=8$, $x_2=6$; (2) $x_1=5$, $x_2=-3$;

(3) $x_1=-4$, $x_2=0$; (4) $x_1=-9$, $x_2=-11$;

(5) $x_1=2a-b$, $x_2=a-2b$;

(6) $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=3+\sqrt{2}$.

求 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{BA} 的数量。

4. A , B 是数轴上两点，点 B 的坐标是 x_2 。根据下列条件，求点 A 的坐标 x_1 ：

(1) $x_2=3$, $AB=5$; (2) $x_2=-5$, $BA=-3$;

(3) $x_2=0$, $|AB|=2$; (4) $x_2=-5$, $|AB|=2$ 。

5. 设点 P 是 A , B , C 三点所在直线上任意一点，求证不论



它们的位置如何，总有

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0.$$

6. 求有下列坐标的两点距离：

(1) $(6, 0), (-2, 0);$ (2) $(0, -4), (0, -1);$

(3) $(6, 0), (0, -2);$ (4) $(2, 1), (5, -1);$

(5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

(6) $(ab^2, 2abc), (ac^2, 0).$

7. 已知点 $A(a, -5)$ 和 $B(0, 10)$ 的距离是 17，求 a 的值。

8. 已知某零件一个面上有 3 个孔，孔中心的坐标分别为：

$A(-10, 30), B(-2, 3), C(0, -1)$. 求每两孔中心的距离。

9. 已知点 $P(x, 2), Q(-2, -3), M(1, 1)$, 且 $|PQ| = |PM|$. 求 x .

10. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 的点的坐标；

(2) 已知点 P 的横坐标是 7，点 P 到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于 10，求点 P 的纵坐标。

1.2 有向线段的定比分点

有向直线 l 上的一点 P , 把 l 上的有向线段 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 分成两条有向线段 $\overrightarrow{P_1 P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$, $\overrightarrow{P_1 P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 数量的比叫做点 P 分 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 所成的比，通常用字母 λ 来表示这个比值，

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P P_2}.$$

点 P 叫做 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 的定比分点。

如果点 P 在线段 P_1P_2 上(图1-10甲), 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点, 这时, 无论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相同, 它们的数量的符号也相同, 所以 λ 为正值. 如果点 P 在线段 P_2P_1 或 P_1P_2 的延长线上(图1-10乙、丙), 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点. 这时无论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相反, 它们的数量的符号也相反, 所以 λ 为负值.

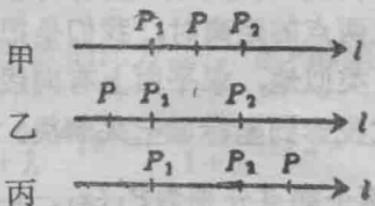


图 1-10

由于点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比与它们所在的直线 l 的方向无关, 为了简便起见, 在以后谈到点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比时, 一般不提它所在的有向直线的方向.

如果有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 在数轴 Ox 上, 点 P_1 , P_2 的坐标分别为 x_1 , x_2 , 点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ (图1-11), 那么, 点 P 的坐标是什么呢?

设点 P 的坐标为 x , 由

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

即 $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$, 当 $\lambda \neq -1$ 时, 得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

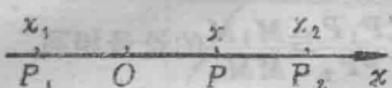


图 1-11

这是数轴上的定比分点公式，注意 x_1 是有向线段起点的坐标， x_2 是有向线段终点的坐标。

思考题 定比 λ 为什么不能为 -1 ，你能说出当 $\lambda = -1$

时， P_1, P, P_2 的位置的情况吗？ λ 能等于零吗？你能说出当 $\lambda = 0$ 时， P_1, P, P_2 的位置情况吗？

下面，我们研究已知平面上有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的两个端点的坐标以及定比 λ ，如何求分点 P 的坐标。

在求平面上两点的距离时，我们是把它化为求数轴上两点的距离来做。类似地，求平面上有向线段的定比分点的坐标，也可以把它投影到坐标轴上来解决。

设 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的两个端点分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ ，点 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 $\lambda (\lambda \neq -1)$ 。如图1-12，过点 P_1, P_2, P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1, P_2M_2, PM ，则垂足分别为 $M_1(x_1, 0), M_2(x_2, 0), M(x, 0)$ 。根据平行线分线段成比例定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点 P 在线段 P_1P_2 上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 上；如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上。

因此 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的符号相同，

所以
$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$\therefore M_1M = x - x_1,$$

$$MM_2 = x_2 - x,$$

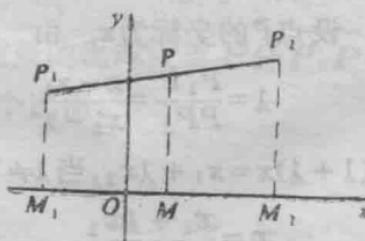


图 1-12