受驗準備用書

立體幾何學要覽

商務印書館出版

中華民國八年十一月初版

（立體幾何學要覽一册）

（每册定價大洋貳角伍分）

（外埠酌加運費匯費）

編纂者 泰和匡文濤

校訂者 紹興駱師曾

發行者 商務印書館

印刷所 商務印書館
上海北河南路北首寶山路

總發行所 商務印書館
上海棋盤街中市

分售處 商務印書分館
北京 濟南 杭州 天津 太原 蘭谿 保定 開封 安慶 奉天 洛陽 蕪湖 吉林 西安 南昌 龍江 南京 漢口
長沙 廣州 貴陽 常德 潮州 成都 香港 張家口 重慶 桂林 瀘縣 梧州 福州 雲南 新嘉坡

八八九四白

立體幾何學要覽

目次

定　　義

〔立體幾何學〕 立體幾何學者論不在同一平面上之圖形之幾何學也

〔平面〕 平面者通過其面上任意二點之直線全含於其表面上者也

〔平面與直線之交〕 平面與直線僅相會於一點則曰此平面與直線相交其點曰交點

〔二平面之交〕 二平面僅相會於一直線則此二平面曰相交其直線曰交線或簡稱交

〔直線與平面之平行〕 直線與平面任何延長決不相會者則曰此直線與平面互爲平行

〔二平面之平行〕 二平面任何延長決不相會者則曰此二平面互爲平行

〔垂線〕 一直線交於一平面過其交點於平面內引一切直線均垂直於此直線者則此直線曰其平面之垂線或曰此直線與平面互爲垂直而其交點曰垂線之足

〔斜線〕 不垂直於平面而與平面相交之直線是謂斜線其交點曰斜線之足

（注意） 平面與其垂線稱爲互相交於直角或曰互爲正交其斜線則曰互爲斜交一直線斜交於平面則過其交點在其平面上任意引一直線亦必斜交

〔不在同一平面上二直線之角〕 不在同一平面上二直線所成之角卽從任意一點與此直線平行引二直線所成之角

〔點與平面之距離〕 平面外一點與其平面之距離卽從其點向平面所作垂線之長

平面及直線之定義(其二)

定義

〔不在同一平面上之二直線之距離〕 不在同一平面上二直線之距離卽與此二直線相交且垂直之直線夾於兩直線間之有限部分也

〔直線與其平行之平面之距離〕 直線與其平行平面之距離卽垂直於此直線與平面之直線夾於兩者之間之有限部分也

〔平行二平面間之距離〕 平行二平面間之距離卽其公垂線夾於其間之有限部分也

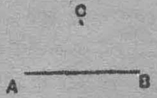
〔點之正射影〕 從平面外一點至其平面上引垂線此垂線在此平面上相會之點曰此點在此平面上之正射影

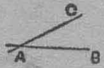
〔線之正射影〕 一線在一平面上之正射影卽其線上之點在其平面上正射影之軌跡也

〔直線與平面所成之角〕 一直線與一平面所成之角卽此直線與其在平面上之正射影所成之角

(注意) 平面雖可無限增廣但本書皆以平行四邊形表之

關於平面及直線之定理及問題（其一）（立體幾何學 3）

<table>
<tr><th>定理</th><th>證明</th><th>問題</th></tr>
<tr>
<td>（定理 1）含一直線及此直線外之一點祇能作一平面</td>
<td>

（題意）含直線 AB 及點 C 作平面祇能作一平面
（證明）含 AB 作任意之平面以 AB 爲軸而迴轉之將其所作之平面無限增廣得過任何點故得過 C 點故含 AB 直線及 C 點有一平面而此平面之前後均不含 C 點故題云云</td>
<td rowspan="2">（1）含一定直線或二定點有無數平面
（2）相交於三點中每二點之三直線必在同一平面上
（3）互相平行之多數直線相交於一直線時則此等直線均在同一平面上
（4）凡在空間二直線位置之關係若何試列舉之</td>
</tr>
<tr>
<td>系（甲）不在同一直線上之三點
（乙）相交二直線
（丙）平行二直線
任用以上三條件之一卽可決定平面</td>
<td>（證明）（甲）凡含 A,B 二點之平面必含 AB 直線（定義）故（甲）可由定理（1）證明之


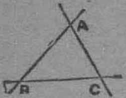
（乙）從 AC 上任意取一點 C 作含 AB 及 C 之平面此平面含 AC 上之二點 A 及 C 必含直線 AC 故（乙）亦可用定理（1）證明之


（丙）AB, CD 由平行線之定義知其在同一平面上而此平面含 AB 與 CD 上任意一點 C 故此平面祇以一爲限</td>
</tr>
</table>

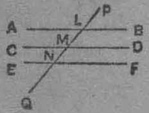
(立體幾何學 4) 關於平面及直線之問題解答 (其一)

(1) (證明) 一定直線爲 AB 試過 AB 作任意之平面考之則以 AB 爲軸而迴轉其一切位置之平面均含 AB 故含 AB 直線有無數平面二定點可決定一直線故與上同

(2) (證明) 交於三點中每二點之直線爲 AB, BC, CA 因不在同一直線上之三點 A, B, C 可決定一平面則三直線 AB, BC, CA 各線上之二點在此平面上故此三直線不得不在此平面上卽交於三點中之二之三直線在同一平面上



(3) (證明) AB//CD 故可決定一平面而 PQ 上之二點 L, M 在此平面上由是直線 PQ 亦在此平面上換言之 CD 在 AB, PQ 所定之平面上同樣 EF 亦在 AB, PQ 所定之平面上同樣任何平行線均在此平面上



(4) (解說) 二直線在空間位置之關係如下

(甲) 在同一平面上

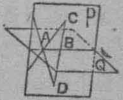
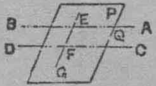
(*a*) 相交 (*b*) 平行

(乙) 不在同一平面上

(*c*) 不相交亦不平行

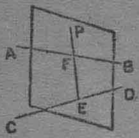
(注意) 故欲證明二直線平行但證明其不相交而在同一平面上可矣

關於平面及直線之定理及問題（其二）（立體幾何學 5）

定　　理	證　　　明	問　　題
（定理 2） 二平面相交其交處爲一直線	 （證明）P, Q 爲二平面共有一點 A 則共有過 A 點之一直線此直線以外之點則非共有在 P 平面上通過 A 點任意引二直線 AC, AD 若其一在 Q 面上則二平面共有過 A 之一直線否則連結 CD 與 Q 面交於 B 點而 CD 在 P 上卽 B 點亦在 P 上故兩平面共有 A, B 二點由是共有 AB 直線又若共有 AB 直線外之點則含一直線與其外一點有二平面 P, Q 是與定理 1 不合故二平面之交處爲直線	(1) 試過定點作一直線令與不在同一平面上之二定直線相交 (2) 三平面能會於一點然亦有不能者其狀如何 (3) 多直線同在 A 點相交時則含其中任意二直線之諸平面之交必過 A 點
（定理 3） 一平面交於二平行線之一則亦必交於他一	 （題意） AB//CD 平面 P 交其一 AB 於 E 亦必交於 CD （證明 平行線 AB, CD 之面 Q 與 P 共有 E 點故共有直線 EG 而 EG 交於 AB 故交於 CD 其交點爲 F 卽平面 P 與 CD 共有 F 故 CD 上 F 以外之點在 P 面外若在 P 面內則 CD 含於 P 面	

關於平面及直線之問題解答（其二）

(1)　(作法) 過 AB 與 P 點作平面此平面與 CD 相交其交點爲 E 則 PE 卽所求之直線



(證明)　P, E 共在此平面上關於 AB 在反對之側故連結 P, E 與 AB 相交

但直線 CD 若與面 PAB 平行則不能得交點 E 卽不能得所求之直線

(2)　(證明) 三平面爲 P, Q, R 其 P, Q 之交爲一直線 AB 其 P, R 之交爲一直線 CD 而 AB, CD 二直線共在 P 面上卽爲相交故三平面一般會於一點其不能者之狀如次

(*a*)　三平面互爲平行之時則不相交

(*b*)　二平面平行惟與他之一平面不平行時亦不相交（參照定理 13）

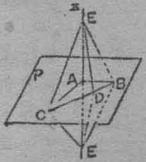
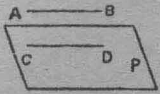
(*c*)　三平面不平行而交線互爲平行時

(*d*)　相交皆相合時

(3)　(證明) 在一點 A 相交之多數直線爲 AB, AC, AD 等含 AB, AC 之平面必含 A 點又含 AD, AE 之平面亦含 A 點明甚故此等二平面共有 A 點卽二平面之交通過 A 點

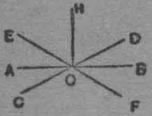
與此同樣他平面之交亦過 A 點

關於平面及直線之定理及問題(其三)(立體幾何學 7)

定理	證明	問題
(定理 4) 一直線與一平面相交若垂直於通過其交點之二直線則必垂直於其平面上過交點之一切直線	 (題意) XA 直線與 P 平面交於 A 若垂直於 P 平面上過 A 之二直線 AB, AC 則必垂直於 P 平面上凡過 A 之直線 (證明) 過 A 且在 P 面上任意引一直線 AD 又於 P 面上作一直線與 AB, AC, AD 交於 B, D, C 於 XA 上取 E 點延長 XA 令 $AE=AE'$ 以 E, E′ 與 B, D, C 連結則 $EA=E'A$, $AB\perp EE'$ $\therefore EB=E'B$ 又 $CA\perp EE'$ $\therefore EC=E'C$ 於 $\triangle EBC$, $\triangle E'BC$ 其 BC 爲共有 $EB=E'B$, $EC=E'C$ $\therefore \triangle EBC\equiv\triangle E'BC$ 依 BC 反折而疊之則 E′ 重於 E, E′D 重於 ED $\therefore ED=E'D$ 即 $\triangle EE'D$ 爲二等邊三角形而 $EA=E'A$ $\therefore AD\perp EE'$	(1) 三直線同會於一點從其點作直線若同垂直於三線則三此直線在同一平面上 (2) 直線及平面若垂於同一直線則此直線及平面互爲平行 (3) 含一直線且與不在同平面上之一直線平行祇可作一平面
(定理 5) 二直線平行則含其一之平面必與他一直線平行	 (證明) P 平面含 CD 則 P 平面 $/\!/AB$ 何則 $AB/\!/CD$ 即在同一平面上設此平面爲 Q 則 CD 在 P 及 Q 之上故爲 P, Q 之交線即 AB 不得交 P 於不在 CD 上之點 (定理 2) 但 AB, CD 不相交 $\therefore$ P 平面 $/\!/AB$	

(立體幾何學 8) 關於平面及直線之問題解答 (其三)

(1) (題意) AB, CD, EF 三直線各垂直於過 O 點之直線 OH 則此三直線在同一平面上

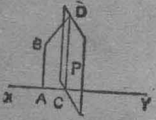


(證明) EF, CD 共垂直於 OH 則 OH 垂直於含 EF, CD 之平面 P (參照定義及定理 4)

次 OH 與 AB 之定平面設交 P 於 A′OB′ 則 A′OB′ 在 P 平面上故垂直於 OH

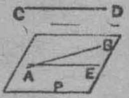
故於 OH 與 AB 之定平面上過 O 得引 OH 之二垂線 AOB, A′OB′ 是不合理卽 A′OB′ 與 AOB 合而爲一卽 AB, CD, EF 三直線在同一平面上

(2) (題意) AB 及 P 平面爲垂直於 XY 之直線及平面則 P 平面 //AB



(證明) 若相交其交點爲 D 連結 DC 則 DC 在 P 平面上因 P 平面⊥XY ∴ DC⊥XY 故從 D 點得引 XY 之二垂線 DC, DBA 是不合理故 P 平面不能與 AB 相交卽互爲平行

(3) (題意) 含 AB 直線作平面與不在同一平面上之直線 CD 平行祗能作一平面



(證明) 過 AB 上之一點 A 作 CD 之平行直線 AE 又作 AB, AE 之定平面 P 卽 P 平面 //CD 何則因 P 平面含有平行於 CD 之 AE 故也 (定理 5) 若含 AB 平行於 CD 尙有平面 P′ 是從 A 得引二直線平行於 CD 爲不合理故祗能作一平面

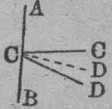
關於平面及直線之定理及問題(其四)(立體幾何學 9)

定理

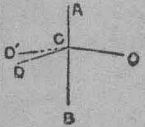
(定理 6) 通過一定點且垂直於一定直線祇能作一平面

證明

(證明)(甲)定點 O 在定直線上者



於含 AB 之任意平面上從 O 引 AB 之垂線 OC 又於含 AB 之他平面上從 O 引 AB 之垂線 OD 則 $AB\perp OC$, $AB\perp OD$ ∴ AB 垂直於 OC, OD 之定平面若過 O 垂直於 AB 有他平面 Q 則 Q 得含 OC, OD 二線至少不含其一線今以 Q 含 OC 不含 OD 而 AB, OD 所定之面與 Q 之交線為 OD' 則 OD' 在 Q 面上 ∴ $OD'\perp AB$ 卽於同一平面上從 O 得引 OD, OD' 二垂線是不合理故所定之面惟一



(乙) O 在 AB 外者

於 AB 及 O 之定平面上從 O 引 AB 之垂線 OC 又就含 AB 之他平面上作 AB 之垂線 CD 則 OC, CD 之定平面垂直於 AB 若有他平面垂直於 AB 則亦可與前同樣作交線 CD' 而證其不能

問題

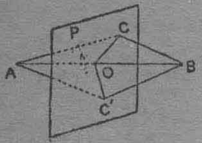
(1) 與二定點等距離之點之軌跡為二點連結直線中點之垂直面

(2) 與一平面外二定點等距離且在此平面上之點之軌跡如何

(3) 從平面外二定點向此面上一點引二直線令其和為最短則其面上一點之位置如何

(立體幾何學 10) 關於平面及直線之問題解答 (其四)

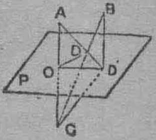
(1) (證明) A, B 爲二定點 O 爲 AB 之中點 P 爲在 O 而垂直於 AB 之平面



今從 A, B 等距離之點 C 連結 CA, CB 又連結 OC 則於 $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ 其 $AC=BC$, $AO=BO$, OC 共有 ∴ $\angle AOC=\angle BOC=\angle R$ ∴ OC 在 P 平面上故 C 點亦在 P 平面上次取 P 面上任意一點 C' 連結 AC', BC', OC' 則於 $\triangle AOC'$, $\triangle BOC'$ 其 $AO=BO$, OC' 共有而 $\angle AOC'=\angle BOC'=\angle R$ ∴ $AC'=BC'$ 故平面 P 爲與 A, B 二點等距離之點之軌跡

(2) (證明) 一平面爲 P 二定點爲 A, B 從 A, B 二點等距離之點之軌跡爲過 AB 之中點而垂直之平面 (前題) 設此面爲 Q 則 P, Q 之交線卽所求之軌跡卽此交線在 P 面上適於要件不在交線上之點不適於要件由是可得其證若 $P//Q$ 則無所求之軌跡

(3) A, B 爲二定點 P 爲所設之平面



(作法) 從 A 向 P 作垂線其垂線之足爲 O 延長 AO 至 C 令 $AO=OC$ 連結 CB 與 P 之交點爲 D 則 D 卽所求之點

(證明) 連結 AO, OD 則於 $\triangle ADO$, $\triangle CDO$ 其 $AO=CO$, OD 共有 $\angle AOD=\angle DOC=\angle R$ ∴ $AD=DC$ ∴ $AD+BD=DC+BD=BC$ 又於 P 平面上任取他點 D' 與前同樣知 $AD'=D'C$ ∴ $AD'+BD'=D'C+BD'$ 就 $\triangle BCD'$ 論 $BC<BD'+D'C$

∴ D 爲所求之點

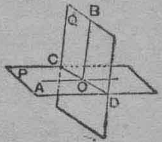
關於平面及直線之定理及問題（其五）（立體幾何學 11）

定理

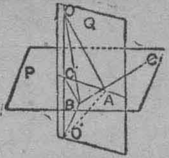
（定理 7） 通過一定點且垂直於一平面祇能作一直線

證明

（證明）（甲）一定點 O 在平面內者



就 P 面上過 O 任意引一直線 OA 過 O 作垂直於 OA 之平面 Q 其 P, Q 之交線爲 CD 在 Q 面上作 OB 垂直於 CD 則 OB 垂直於 CD 及 AO 故垂直於平面 P 若有他之垂直線 OB′ 則就 OB, OB′ 所定之平面上得從一點作二垂線於此面與 P 之交是不合理故祇有 OB 一直線



（乙）一定點 O 在平面外者
於 P 面上任意引一直線 BC 過 O 且垂直於 BC 作平面 Q 其 P,Q 之交線爲 AC′ 從 O 向 AC 作垂線 OC′ 則 OC′ 垂直於 P 作 $O'C'=OC'$ 連結 O′B, O′A, OB, OA, BC′ 則 $AO=AO'$ $\angle OAB=\angle O'AB=\angle R$ ∴ $OB=BO'$ ∴ 就 $\triangle OC'B$ 與 $\triangle O'BC'$ 論 $\angle OC'B=\angle O'C'B=\angle R$ ∴ $OC'\perp C'B$ 又 $OC'\perp C'A$ ∴ $OC'\perp P$ 是祇有一直線得與前同樣證之

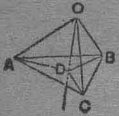
問題

（1）與三點等距離之點在過三點連成三角形之外心且垂直於其平面之直線上

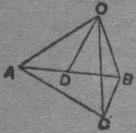
（2）與直角三角形各頂等距離之點在三角形之平面外則此點與斜邊中點之連線垂直於三角形之平面

（3）試過一點作平面令與不在同一平面上之二直線平行

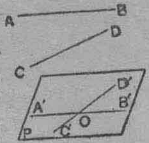
(1) (證明) 三點爲 A, B, C 與此三點等距離之點爲 O 從 O 向 △ABC 之面作垂線 OD 是與平面交於 D 連結 AD, BD, CD 則於 △ADO, △BDO 其 AO=BO ∠ODA=∠ODB=∠R OD 共有故相等 ∴ AD=BD 又於 △BDO, △CDO 亦同樣證之知 BD=CD ∴ AD=BD=CD 卽 D 爲 △ABC 之外心



(2) (證明) ABC 爲直角三角形 D 爲斜邊 AB 之中點 O 爲與 A, B, C 三點等距離之點由前題知 O 在過 △ABC 之外心且垂直於此平面之直線上但 D 爲 △ABC 之外心故 OD 垂直於 △ABC 之平面



(3) (證明) 一定點爲 O 二直線爲 AB, CD 過 O 點作 A′B′//AB C′D′//CD 則 A′B′ 與 C′D′ 所定之平面卽所求之平面設此平面爲 P 則 P 平行於 AB 且含 A′B′ 又平行於 CD 且含 C′D′ (定理 5) 則 P 平行於 AB′ CD 且過 O 點明甚



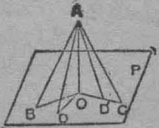
關於平面及直線之定理及問題（其六）（立體幾何學 13）

定理

（定理 8） 從平面外之一點向此平面作垂線及斜線則垂線比斜線短又斜線之足去垂線之足距離相等者則此斜線互等若距離不等則距離較大者其斜線亦較長

證明

（證明） AO 爲向 P 面之垂線 AB, AC, AD 爲斜線 $BO=CO$, $DO<BO$



就 AO, DO 所定之平面論 AO 爲向 DO 之垂線 AD 爲斜線故由平面幾何之定理 $AC<AD$ 卽垂線<斜線

次就 $\triangle ABO$, $\triangle ACO$ 論 $BO=CO$ $\angle AOB=\angle AOC=\angle R$ 而 AO 共有故由 $\triangle ABO=\triangle ACO$ 知 $AB=AC$ 卽去垂線之足距離相等者其斜線亦相等

次就 OC 上取 $OD'=OD$ 則依前之證明知 $AD=AD'$

又就 AC, AO 所定之平面上論 $OC>OD'$ $\therefore AC>AD'$ 卽 $AC>AD$ 卽去垂線之足距離較大者其斜線亦較長

問題

（1） 從平面外一點向平面引相等之斜線則此斜線之足之軌跡如何

（2） 從平面外一點向平面引諸斜線其中與該點所引之垂線成等角者則相等

（3） 三直線 AB, BC, CD 順次成直角若 AB 垂直於平面 BCD 則 CD 垂直於平面 ABC