北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练

高二数学

主编/邓 均 蒋大凤

东师教辅

东北师范大学出版社

北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练

高二数学

主编/邓　均　蒋大凤

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

海淀题链——解题思维能力发散训练．高二数学/邓　均　蒋大凤主编．—长春：东北师范大学出版社，2001.6
ISBN 7-5602-2778-3

Ⅰ．海…　Ⅱ．①邓…②蒋…　Ⅲ．数学课—高中—解题　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 028168 号

□出 版 人：贾国祥
□责任编辑：曲春波　□封面设计：李金锋
□责任校对：袁　奕　□责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号（130024）
销售热线：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nnup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印刷
沈阳市铁西区建设中路 30 号（110021）
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
开本：880 mm×1230 mm 1/32　印张：12.25　字数：442 千
印数：00 001 — 10 000 册

定价：13.50 元

在题的链接中寻求一种解题的大智慧

《海淀题链——解题思维能力发散训练》前言

《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书是以发散思维为主线而编写的一套重在揭示初高中数学、物理、化学等学科内在联系和规律的新书，目的在于通过对原型题及其变型题之间的无穷变化的解剖和训练，使得中学生能够掌握一种用联系的眼光去看待一个个看似孤单零散的题，从而学会用一种凌厉的思维去击穿每一个无从下手的难题，学会用灵活多变的方法优化解决每一个问题的方式。

一些高水平的教师在课堂教学过程中经常使用的有效方法是：充分利用发散思维，探索数、理、化学科内部规律的相互关联，在两个和两个以上的题目之间，寻求其中的内在的变化和发展，挖掘其间隐藏着的看不见的联系和规律。同时，这更是一些尖子生接受速度快、解题能力强的核心因素。实际上，这种做法的关键就在于把一个个看上去相对封闭的题目放到一个相对宽泛的视野中，目的在于寻求一种解题的质量，寻求一种在掌握学科内在规律之上的解题大智慧，从而摒弃了那种见题就解，就题论题，全然不顾题目之间的相互联系和变化的机械式做法。教学效果自然漂亮，学生的学习水平和解题能力也得到了大幅度的提高。

所谓“条条大路通罗马”，是说通往罗马的道路是完全不同的。但如果你只知道一条路，你又如何知道你走的这条路就是最佳的路径呢？所谓“知己知彼，百战不殆”，是在告诉你常胜将军的秘诀是：不仅仅要了解你自己，更要了解你的对手。对于学习数、理、化而言，如果你不了解它，你又如何能“百战不殆”呢？从这一点来说，《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书不仅仅能够帮助你快速提高自己的学习水平，更多地掌握解题技巧和方法，更重要的是能够真正提高你自己的素质和能力，也就是说《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书中所蕴涵着的思维可以使你受益一生，因为那是一种大智慧！

创造能力的形成有两个必要条件：一是扎实的基础；二是创造性思维。其中创造性思维的一个核心思维就是发散思维。

发散思维是一种以某一问题为发散源，从横向和纵向多方位地进行辐射状态的积极思考和联想，广泛地搜集与发散源有关的知识和方法，从而使问题得以解决、升华的思维方式。发散思维是一种不依赖常规寻找变异的思维，它具有三个互相联系的特征，即流畅性、变通性和独特性。

流畅性是指思维畅通，一个表面看似一般但内涵十分丰富的问题，一个可以发展的问题，只要深入地思考就能将其向纵深拓展得到更多、更巧妙的结果，得到新的发现，即达到一题多变的效果。

变通性是指思维灵活多变，从不同的角度去探索、开拓思路，打破消极思维定势的束缚，不拘泥于已有的范例和模式，使一题多解。

独特性是指思维超乎寻常，标新立异，对于一些构思巧妙、条件隐蔽的问题，在熟练掌握常规思维方法的同时，探索一些不同寻常的非常规解法，使解题过程简捷、明了。以数学为例，如“数形结合法”、“赋值法”、“代换法”、“构造法”等。

为了培养学生的发散思维能力和创新能力，我们组织了一批具有丰富教学经验和创新精神，具有较高编写水平的老师编写了这套《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书。丛书以国家初中、高中（数学、

物理、化学)新教学大纲的教学必修章节、篇目为依据,具体地说以数学、物理、化学教学大纲规定的知识点为统辖,选择了能够代表数、理、化学科知识网络中重要的知识点作为例题,以[核心知识大盘点]、[典型例题大剖析]、[巩固练习大提高]、[参考答案大揭底]四大栏目构筑丛书编写体例,指导学生通过纵横发散思维深入探索数、理、化概念的内涵和外延,认识不同概念、定理、定律的发展与联系;学会运用数、理、化公式、概念、定理、定律,用不同的观点、方法归纳出解决问题的一般途径、方法及技巧。

希望同学们通过阅读这套丛书,学会用新角度、新观点、多层次地思考问题,从而达到掌握知识、创新知识、提高能力的目的。

参加本书编写的有:于静、邓均、邓兰萍、王建民、王晓萍、王爱莲、付仑、田玉凤、卢青青、乐进军、刘鸿、刘天华、刘汉昭、刘志诚、刘建业、刘桂兰、刘宏军、刘爱军、刘树桐、刘继群、刘淑贤、闫达伟、闫梦醒、朱志勇、朱万森、孙家麟、李里、李公月、李若松、李新黔、何小泊、吴琼、吴建兵、张立雄、张兆然、张宝云、张绍田、张振来、张淑芬、陆剑鸣、陈恒华、陈继蟾、金仲鸣、庞长海、庞炳北、姜杉、姚桂珠、赵汝兴、赵茹芳、柯育璧、高书贤、贾秋荣、徐淑琴、黄万端、韩乐琴、蒋大凤、蒋金利、程秋安、谭翠江、管建新、樊福、霍永生、魏新华。

由于时间仓促,书中难免有一些差错和不足之处,望读者朋友不吝赐教。

编　者

2001年6月于北京

《海淀题链——解题思维能力发散训练》编委会

目 录

代数部分

第五章　不　等　式

核心知识大盘点 ●●●

1. 知识框图

不等式性质 → 证明不等式 → 不等式应用

不等式性质 → 解不等式 → 不等式应用

2. 不等式性质

不等式性质是不等式变形、解不等式、证明不等式的理论基础.

不等式性质包括：

①$a>b\Leftrightarrow a-b>0, a=b\Leftrightarrow a-b=0, a<b\Leftrightarrow a-b<0$；

②$a>b, b>c\Rightarrow a>c$；

③$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$；

④$a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

⑤$a>b, c>d\Rightarrow a-d>b-c$；

⑥$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$；

⑦$a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

⑧$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

⑨$a>b>0, c>d>0\Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}$；

⑩$a>b>0, n\in \mathbf{N}\Rightarrow a^n>b^n$；

⑪$a>b>0, n\in \mathbf{N}\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

使用不等式性质进行变形时，应注意的事项有：

i)注意性质中的“⇔”与“⇒”；

ii)注意性质命题的适用范围.

3. 证明不等式

证明不等式常见的方法有:比较法(作差法、作商法);综合法;分析法;反证法;放缩法;数学归纳法;三角代换法;判别式法;构造函数,利用函数的单调性证明不等式;以及数形转化证明不等式.

例 1 已知:$a,b,c,d\in\mathbf{R}$.

求证:$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

证法 1 (比较法、作差法)

$\because ac+bd-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$\leqslant|ac+bd|-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\dfrac{(ac+bd)^2-(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{|ac+bd|+\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$

$=\dfrac{-(ad-bc)^2}{|ac+bd|+\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}\leqslant 0$,

$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

作差法证题步骤:$\boxed{\text{作差}}\to\boxed{\text{变形}}\to\boxed{\text{与零比较大小}}$.

证法 2 (综合法)

$\because a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $2abcd\leqslant a^2d^2+c^2b^2$,

从而 $a^2c^2+b^2d^2+2abcd\leqslant a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+c^2b^2$,

整理$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$,

$\therefore |ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

从而得 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

综合法证题步骤:从已知条件,或公理,或已知定理、定义出发,利用不等式性质,演绎推理得出结论.

证法 3 (分析法)

要使 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$成立,

$\because ac+bd\leqslant|ac+bd|$,

只要使$|ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$成立

$\Leftarrow(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\Leftarrow 2abcd\leqslant a^2d^2+b^2c^2$.

$\because (ad-bc)^2\geqslant 0$, $\therefore a^2d^2+b^2c^2\geqslant 2abcd$.

$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

分析法证题步骤:从结论 B 出发,演绎推理,逐步寻找使结论成立的充分条件

A'，再由条件 A 证明 A' 成立.

证法 4 (放缩法)

$$\begin{aligned}右边&=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\\&\geqslant\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+2abcd}\\&=\sqrt{(ac+bd)^2}\\&=|ac+bd|\\&\geqslant ac+bd=左边.\end{aligned}$$

放缩法的证题思路：欲证 $A>B$，把 A 缩小到 C(或把 B 放大到 C)，证明 $C>B$(或证明 $A>C$)，从而，利用“$a>b,b>c\Rightarrow a>c$”证明 $A>B$ 成立.

证法 5 (三角代换法)

设 $m^2=a^2+b^2,n^2=c^2+d^2,m,n\in[0,+\infty)$.

即 $a=m\cos\alpha,b=m\sin\alpha,c=n\cos\beta,d=n\sin\beta$.

$$\begin{aligned}\therefore 左&=mn\cos\alpha\cdot\cos\beta+mn\sin\alpha\cdot\sin\beta\\&=mn\cos(\alpha-\beta)\\&\leqslant mn=右.\end{aligned}$$

$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

三角代换法的证题思路：利用三角式换掉代数式中的字母，把代数式转化为三角式的证明.

证法 6 (数形结合)

若 $a^2+b^2=0$，显然 $ac+bd=0=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

若 $a^2+b^2\neq0$，构造直线 $l:ax+by=0$，点 $M(c,d)$. 从而，可得：原点 $O\in l$，$|MO|=\sqrt{c^2+d^2}$，点 M 到 l 的距离 $d=\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

由点到直线的距离，可知 $d\leqslant|OM|$.

$\therefore\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$，也就是 $|ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$，

$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

证法 7 (判别式法)

若 $a^2+b^2=0$，显然 $ac+bd=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

若 $a^2+b^2\neq0$，构造二次函数

$f(x)=(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)$，

从而，可得 $f(x)=(ax+c)^2+(bx+d)^2\geqslant0$ 恒成立.

$\therefore\Delta\leqslant0\quad(\because a^2+b^2>0)$，

即 $4(ac+bd)^2\leqslant4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，

$\therefore |ac+bd| \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$,

从而,得 $ac+bd \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

判别式法证题思路:利用一元二次方程根的存在性,或二次函数图像与 x 轴是否有交点,与判别式 $\Delta \geqslant 0$ 或 $\Delta < 0$ 之间的充要关系,建立字母系数的制约关系.

例 2 设 $0<a<1$,且 $f(\log_a x)=\dfrac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}(x>0)$.

求证:对于任意大于 1 的自然数 n,都有 $f(n)>n$.

思路分析:采用数学归纳法证明 $f(n)>n(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$.

证明:令 $t=\log_a x$,则 $x=a^t$,

$\therefore f(t)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^{2t}-1}{a^t}$,

即 $f(x)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^{2x}-1}{a^x}$.

当 $n=2$ 时,$f(2)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^4-1}{a^2}=a+\dfrac{1}{a}$.

$\because 0<a<1$,$\therefore a+\dfrac{1}{a}>2$,$\therefore f(2)>2$.

假设 $n=k$ 时,$f(k)>k$ 成立,即 $\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^{2k}-1}{a^k}>k$,

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
f(k+1)&=\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2k+2}-1}{a^{k+1}}\\
&=\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2k+2}-a^2+a^2-1}{a^{k+1}}\\
&=a\cdot\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2k}-1}{a^k}+\frac{1}{a^k}>ak+\frac{1}{a^k}\\
&=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{k个}+\frac{1}{a^k}\\
&\geqslant (k+1)\sqrt[k+1]{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots a}_{k个}\cdot a^{-k}}=k+1.
\end{aligned}$$

由 $n=2$ 及 $n=k+1$ 成立,可得 $n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}$ 时,$f(n)>n$ 成立.

例 3 设 $f(x)=x^2+px+q$.

求证:$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

证题思路:采用反证法.

证明:假设 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 都小于 $\dfrac{1}{2}$,

即 $\begin{cases} -\frac{1}{2}<1+p+q<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}<4+2p+q<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}<9+3p+q<\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} -\frac{3}{2}<p+q<-\frac{1}{2}, & ① \\ -\frac{9}{2}<2p+q<-\frac{7}{2}, & ② \\ -\frac{19}{2}<3p+q<-\frac{17}{2}. & ③ \end{cases}$

$\because \frac{①+③}{2}$ 得 $-\frac{11}{2}<2p+q<-\frac{9}{2}$，

与②式 $-\frac{9}{2}<2p+q<-\frac{7}{2}$ 矛盾，

∴假设不成立.

从而，得 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

例 4　已知：$x\in\mathbf{R}$.

求证：$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}\leqslant 3$.

证明：设 $y=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$，

去分母，整理，得

$(y-1)x^2+(2y+2)x+4y-4=0$.

如果 $y=1$，则 $x=0$.

如果 $y\neq 1$，$\because x\in\mathbf{R}$，

$\therefore \Delta=[2(y+1)]^2-16(y-1)^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(3y-1)(y-3)\leqslant 0$，

$\therefore \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

当 $y=\frac{1}{3}$ 时，方程为 $-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}=0$，解得 $x=2$；

当 $y=3$ 时，方程为 $2x^2+8x+8=0$，解得 $x=-2$.

$\therefore \frac{1}{3}\leqslant y<1$，或 $1<y\leqslant 3$.

当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{3}$ 成立，当 $x=-2$ 时，$y=3$ 成立，

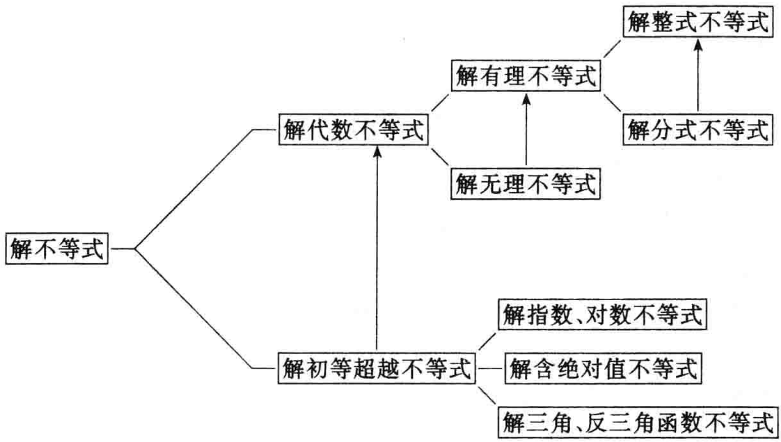
与 $y=1$ 求并集，

$\therefore \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$，也就是 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}\leqslant 3$.

点评　此法是判别式(Δ)法，证明此法的步骤：先将不等式 $f(x)>0$，转化为函数 $y=f(x)$，于是，证明 $f(x)>0$，也就是证明函数的值域为正实数；其次，再将函数 $y=f(x)$ 转化为关于 x 的一元二次方程，利用方程有解的充要条件，建立关于 y 的不等式；解之，求出 y 的取值范围.

4. 解不等式

解不等式的常规题型.



其中箭头所指的方向是在解不等式时，将矛盾转化的方向，下面即具体转化的技巧.

不等式转化的技巧：

①穿线法解高次不等式

此法解题程序：

i)整理，化归

把整式不等式 $f(x)>0$，通过同解变形转化为：$a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}>0$(其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{N}$).

ii)标根

把 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 标在数轴上(其中，$x_1,x_2,\cdots x_r$ 是方程 $a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}=0$ 的根).

iii)穿线

设 $x_1<x_2<\cdots<x_r$，

从最右侧的根 x_r 的右上方开始，任取一点引出一条曲线 C，

若 k_i 是偶数($i=1,2,3,\cdots,r$)，曲线 C 不穿过相应的根 x_i；若 k_j 是奇数($j=1,2,3,\cdots,r$)，曲线 C 穿过相应的根 x_j.

直至从最左端穿出.

iv)读解

设 $a>0$,由 $a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}>0$,读曲线 C 在上半平面内的部分,在数轴上的投影区间,也就是原不等式的解的区间.

②分式不等式的转化策略

策略 1(分类讨论)

$$\frac{f(x)}{g(x)}>h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)>h(x)\cdot g(x);\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)<h(x)\cdot g(x).\end{cases}$$

策略 2(利符号运算法则)

$$\frac{f(x)}{g(x)}>h(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)-h(x)\cdot g(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow[f(x)-h(x)g(x)]g(x)>0.$$

③无理不等式的等价不等式组

i) $\sqrt[2n+1]{f(x)}\underset{(<)}{>}g(x)\Leftrightarrow f(x)\underset{(<)}{>}[g(x)]^{2n+1}\quad(n\in\mathbf{N})$;

ii) $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>[g(x)]^{2n},\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geqslant 0,\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$

iii) $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<[g(x)]^{2n}.\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$

④指数、对数不等式的转化策略

i)利用指数、对数函数的单调性转化

$a>1$,

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$,

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,g(x)>0,\\ f(x)>g(x);\end{cases}$

若 $0<a<1$,

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$,

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,g(x)>0,\\ f(x)<g(x).\end{cases}$

ii)利用换元法,分步解指数、对数不等式.

例 5　解不等式

$\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1\ (a>0,a\neq 1)$

解:令 $y=\log_a x$,

原不等式转化为:

$$\sqrt{3y-2}<2y-1\Leftrightarrow\begin{cases}2y-1>0\\ 3y-2\geqslant 0\\ 3y-2<(2y-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant\frac{2}{3}\\ (4y-3)(y-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\geqslant\frac{2}{3}, \\ y>1, 或\ y<\frac{3}{4}. \end{cases}$$

$\therefore y>1$,或$\frac{2}{3}\leqslant y<\frac{3}{4}$,

也就是 $\log_a x>1$,或$\frac{2}{3}\leqslant\log_a x<\frac{3}{4}$.

若 $a>1$,$x>a$,或 $a^{\frac{2}{3}}\leqslant x<a^{\frac{3}{4}}$;

若 $0<a<1$,$a^{\frac{3}{4}}<x\leqslant a^{\frac{2}{3}}$,或 $0<x<a$.

⑤去绝对值符号的技巧

i) $c>0$,$|x|>c\Leftrightarrow x>c$,或 $x<-c$;

$|x|<c\Leftrightarrow -c<x<c$.

ii) $|a|^2=a^2$.

iii) $|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

例 6 解关于 x 的不等式:

$|(\log_a x)^2-1|>2a-1$,其中 $a>0$,且 $a\neq 1$.

解法 1 (使用技巧 i)

Ⅰ.若 $0<a<\frac{1}{2}$, $x>0$;

Ⅱ.若 $a=\frac{1}{2}$, $(\log_a x)^2-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases} x>0, \\ x\neq 2, 且\ x\neq\frac{1}{2}. \end{cases}$

$\therefore$解区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

Ⅲ.若 $2a-1>0$ 且 $a\neq 1$,

$(\log_a x)^2-1>2a-1$,或$(\log_a x)^2-1<-2a+1$,

即$(\log_a x)^2>2a$,或$(\log_a x)^2<2-2a$.

i) $\frac{1}{2}<a<1$ 时,$\log_a x>\sqrt{2a}$,或 $\log_a x<-\sqrt{2a}$;

或$-\sqrt{2-2a}<\log_a x<\sqrt{2-2a}$.

$\therefore 0<x<a^{\sqrt{2a}}$,或 $x>a^{-\sqrt{2a}}$;或 $a^{\sqrt{2-2a}}<x<a^{-\sqrt{2-2a}}$.

ii) $a>1$ 时,$(\log_a x)^2<2-2a$ 无解,

$\therefore \log_a x<-\sqrt{2a}$,或 $\log_a x>\sqrt{2a}$,

$\therefore 0<x<a^{-\sqrt{2a}}$,或 $x>a^{\sqrt{2a}}$.

综上所述,不等式的解为:

$0<a<\frac{1}{2}$时，　　　$x>0$；

$a=\frac{1}{2}$时，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$；

$\frac{1}{2}<a<1$ 时，$x\in\left(0,a^{\sqrt{2a}}\right)\cup\left(a^{\sqrt{2-2a}},a^{-\sqrt{2-2a}}\right)\cup\left(a^{-\sqrt{2a}},+\infty\right)$；

$a>1$ 时，$x\in\left(0,a^{-\sqrt{2a}}\right)\cup\left(a^{\sqrt{2a}},+\infty\right)$.

解法 2　$0<a<\frac{1}{2}$，$a=\frac{1}{2}$的解法同解法 1.

$a>\frac{1}{2}$且 $a\neq1$ 时，令 $y=(\log_a x)^2$，

$|y-1|>2a-1\Leftrightarrow(y-1)^2>(2a-1)^2\Leftrightarrow$

$[(y-1)-(2a-1)][(y-1)+(2a-1)]>0\Leftrightarrow(y-2a)(y+2a-2)>0$，

若$\frac{1}{2}<a<1$，$y>2a$，或 $y<2-2a$.

也就是$(\log_a x)^2>2a$，或$(\log_a x)^2<2-2a\Leftrightarrow\log_a x<-\sqrt{2a}$，或 $\log_a x>\sqrt{2a}$；

或$-\sqrt{2-2a}<\log_a x<\sqrt{2-2a}$.

$\therefore 0<x<a^{\sqrt{2a}}$，或 $a^{\sqrt{2-2a}}<x<a^{-\sqrt{2-2a}}$，或 $x>a^{-\sqrt{2a}}$.

若 $a>1$，$y>2a$ 或 $y<2-2a$.

也就是$(\log_a x)^2>2a$，或$(\log_a x)^2<2-2a$.

$\because 2-2a<0$，$\therefore(\log_a x)^2<2-2a$ 的解集为$\varnothing$.

由$(\log_a x)^2>2a$ 得 $\log_a x<-\sqrt{2a}$，或 $\log_a x>\sqrt{2a}$，

从而，得 $0<x<a^{-\sqrt{2a}}$，或 $x>a^{\sqrt{2a}}$.

解法 3

令 $y=\log_a x$，

原不等式转化为$|y^2-1|>2a-1$.

$0<a<\frac{1}{2}$，$a=\frac{1}{2}$，同解法 1.

$2a-1>0$，且 $a\neq1$ 时，

Ⅰ. $y\geqslant1$，或 $y\leqslant-1$ 时，

$|y^2-1|>2a-1\Leftrightarrow y^2>2a\Leftrightarrow y<-\sqrt{2a}$或 $y>\sqrt{2a}$.

与 $y\geqslant1$，或 $y\leqslant-1$ 求交.

i)　$\frac{1}{2}<a<1$ 时，$y>\sqrt{2a}$，或 $y<-\sqrt{2a}$；

ii)　$a>1$ 时，$y>\sqrt{2a}$，或 $y<-\sqrt{2a}$.

Ⅱ. $-1<y<1$ 时，

$|y^2-1|>2a-1\Leftrightarrow-y^2+1>2a-1\Leftrightarrow y^2<2-2a$，