21世纪大学公共数学系列教材

# 大学文科数学简明教程

● 严守权 姚孟臣 编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

# 大学文科数学简明教程

严守权　姚孟臣　编著

Math

中国人民大学出版社
·北京·

**图书在版编目（CIP）数据**

大学文科数学简明教程/严守权，姚孟臣编著．—北京：中国人民大学出版社，2013.11
21世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-18339-8

Ⅰ.①大… Ⅱ.①严…②姚… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第257320号

21世纪大学公共数学系列教材
**大学文科数学简明教程**
严守权 姚孟臣 编著
Daxüe Wenke Shuxue Jianming Jiaocheng

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街31号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511398（质管部） |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京昌联印刷有限公司 | | |
| **规　　格** | 185 mm×260 mm　16开本 | **版　　次** | 2013年12月第1版 |
| **印　　张** | 11.25 插页1 | **印　　次** | 2013年12月第1次印刷 |
| **字　　数** | 267 000 | **定　　价** | 21.00元 |

# 总　序

进入21世纪以来，现代科学技术大潮汹涌澎湃，深刻地影响到人类社会的进步和发展.新的时代呼唤新的高素质的人才，呼唤教育有更多的创新和更大的发展.

在诸多教育中，数学教育具有特殊地位和作用.数学作为科学的“皇后”、一门具有丰富内容的知识体系，在其发展过程中，与其他学科交叉渗透，广泛应用，已成为科学发展的强有力的工具和原动力.数学以其特有的哲学属性，又是人们的思维训练的体操.正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中指出的，“数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号，等等.它们是普遍适用并且强有力的思考方式.运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法.数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用.”同样的，数学是一种文化，一门艺术，同样可以为人们提供美的熏陶.多年来，我国高校的数学教育为了适应新形势，已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科，课程建设和教学改革广泛而深入，硕果累累.

教材建设是教学改革的核心，为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设和发展，我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了“21世纪大学公共数学系列教材”.系列教材的宗旨是，面向世界，面向未来，面向现代化，总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果，更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能.

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多学科，在总体把握数学教育的功能定位的基础上，充分考虑不同学科的特点和需求，区分出不同层次和侧重点，并参照相关专业通行的教学大纲编写.例如，理、工学科的公共数学课同时是专业基础课，更要注重课程的工具功能，更强调与后续课程的有机衔接，而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能.

系列教材力求将传统和创新相结合.相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点.历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材.我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富.

我们深知,一部好的数学教材不仅需要对数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神.我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证.

# 编者的话

20世纪90年代我国高等学校各文科专业开始陆续开设数学课程，如今已经遍地开花，大学文科生要学数学基本上已经形成共识.随着时间的推移，大学文科数学的课程建设和改革也在不断深入，其特点之一是课程设置更加考虑到不同文科专业对数学基础课程要求的差异性，教学内容和教学时数也呈现多样性.《大学文科数学简明教程》(以下简称《简明教程》)正是适应这种变化而编写的一本教材.主要满足学时数为一学期或更少的文科数学课程的需要.本书作者多年在北京大学、中国人民大学从事文科数学的教学和研究工作，以往所编写的文科数学教材均已列入国家级规划教材.因此，《简明教程》也可看作现有规划教材的简写本.

《简明教程》仍定位于大学文科文化素质教育的基础课程，同时也兼顾部分文科专业对于数学应用的需要.在大量调研的基础上，《简明教程》充分考虑到国内各文科专业的特点，最终将课程内容确定为由一元函数微积分和概率论与数理统计两部分构成，其中微积分共分四章，即第一章函数、第二章极限与连续、第三章一元函数微分学、第四章一元函数积分学，其中概率论与数理统计共分两章，即第五章初等概率论、第六章数理统计基础.我们认为，微积分贴近现实生活，又便于对数学知识的再学习和扩展，并且承载了诸多近现代数学文化和数学思想，将其作为不同类型的文科学生学习数学的入门篇和基础篇是适宜的.由于人文社会科学研究的对象绝大多数是随机的，文科学生应该具备一定的观察和研究随机现象的手段和方法，因此，我们把概率论与数理统计作为文科学生学习数学的基础篇和应用篇，也反映了许多文科专业在课程设置时提出的要求.

为了体现文科学生文化素质教育的功能定位，《简明教程》将重点放在对数学的基本思想、基本概念和基本原理的介绍和描述上，并辅以必要的历史的背景、直观背景和应用背景.为了保证数学知识体系的完整性、系统性和严密性，《简明教程》保留了必要的推理证明和基本算法，对其余部分均作弱化处理，如积分部分删去第二换元积分法和分部积分法，以及复杂函数类型的积分运算，只保留用凑微分法作简单的积分运算，在不影响理解和掌握积分概念和应用的前提下，降低了学生学习的难度.

在结构上，采用了模块化处理的方式，全书六章内容相对独立，同时相互间又存在一定的逻辑关系，使用时可根据不同专业特点进行调整组合. 如果周学时为 2～3 学时，可选择前四章微积分部分，其中第一章集合的概念和第四章的无穷积分(主要用于为概率论与数理统计作铺垫)，及第三章的导数应用的去留均可灵活掌握. 如果周学时为 4 学时，则可完成全书的讲授，其中部分内容也可调节，如导数和积分的应用部分. 在内容选择上，《简明教程》充分考虑到学生进一步学习和扩展数学知识的需要，在一些知识点留有一定空间，如在极限部分给出无穷小阶的概念；在导数部分，给出导数应用的基本定理——微分学中值定理的直观表述；在积分部分给出微元法的思想和原理、微分方程的概念；在概率论与数理统计部分给出研究随机现象较为系统的方法和概念、随机变量及其分布的概念和数字特征、数理统计的基本理念及参数估计和假设检验的基本原理等. 这些内容虽然笔墨不多，点到为止，但为基础较好并有一定学习兴趣和能力的学生提供了探研、充实知识的方向.

如何把握《简明教程》难度，也是教材编写过程中必须要认真考虑到的问题. 为了适应绝大多数文科学生的数学基础和学习能力，我们在写作风格上，行文力求简洁、质朴、流畅. 在表述数学概念时，注意既要保证其严密规范，又要更加通俗、清晰并辅以必要的直观背景. 降低难度的着力点是在运算部分，《简明教程》只保留在传统的高等数学中能够体现数学的基本概念、基本思想和基本应用的运算，相对应的习题难度都有较大程度的降低.

多年的教学经验告诉我们，文科学生对大学文科数学的认知程度和学习积极性对于课程的教学效果有很大影响. 在我们编写的导言中说明了文科学生为什么要学习数学以及数学与数学文化、数学与数学思维、数学与人文社会科学、数学与数学教育的关系，现将其相关内容作为本书的导言，希望同学们能够认真一读，我们相信会对了解数学、学习这门课程有所帮助.

在本书的编写出版过程中，张伦传、徐西林老师参与并做了很多工作，提供了很大帮助，中国人民大学出版社的李丽娜也为此做了大量调查研究和前期的准备工作，在此我们一并向他们表示衷心的感谢.

**编　者**

2013 年 12 月

# 导　言

本书是专门为纯文科类，即文史、哲学、法律、语言类等专业编写的大学数学教材. 纯文科类专业的学生为什么要学习数学，数学与我们的专业有什么关系？这是同学们常常提出的一个问题. 长期以来，人们往往习惯上把数学学科看作一门自然学科，或者是一类解决工程技术问题的工具性很强的学科，似乎与人文社科相离甚远. 因此，同学们提出疑问并不难理解. 数学学科究竟是什么学科？数学与人文社会科学究竟有什么关系？数学思维有什么特点？了解相关问题，对于明确大学数学的学习目的、培养学习情趣、增强学习能力是非常必要的.

## 一、关于数学与数学文化

数学是一门历史最悠久、最古老的学科，恩格斯曾经把数学定义为关于现实世界中数量关系与空间形式的科学. 20 世纪 80 年代开始根据现代数学的发展，数学又被定义成内涵更为广泛的关于模式的科学. 根据考古发现，大约 11 000 年前就有人造数字系统存在，但数学作为一门独立的知识体系则起源于公元前 6 世纪的古希腊，当地有一个著名的学派叫毕达哥拉斯学派，在他们看来客观世界是按照数学的法则创造的，数学的规律就是宇宙格局的精髓，数学是开启宇宙奥秘的钥匙. 传说中的学派创建人毕达哥拉斯是古希腊的哲学家、数学家、音乐理论家、天文学家，他的哲学基础就是“万物皆数”，将数看作万物的本源. 学派最具影响的另一个人物是哲学家柏拉图，他突出强调数学对哲学和了解宇宙的重要作用，认为只有数学才能领悟物理世界的实质和精髓. 在毕达哥拉斯学派的影响下，其后延续几百年，一大批古希腊数学家，如亚里士多德、欧几里得、阿基米德等，为了通过揭示数的奥秘来探索宇宙永恒的真理，积极开展广泛的数学研究，他们强调要使数学强有力，就必须在一个抽象概念中表示实物的本质特征. 他们第一次引入独立的数学对象，将数学向理性科学方面迈出了第一步. 他们率先将严密推理系统化，建立了公理化体系，从而使数学研究具备了严密性和抽象性. 他们最早提出了归纳法和反证法，发展了穷竭法，同时在几何学、三角学、代数学等领域取得了一系列重大的成果，直到现在，欧几里得的《几何原本》仍然是学习几何学的范本，是公认的世界上印刷次数最多的教科书. 从源头上说，数学与哲学是相辅相成、交汇发展的，某种程度上，数学也可以看作脱离数量意义的哲学，历史上众多数学家的哲学修养都很

深，不乏哲学名家、大师级人物，如柏拉图、莱布尼茨、笛卡儿、庞加莱、康德等. 这说明数学与人文科学的联系源远流长.

数学源于客观世界，又非物质世界中的真实存在，而是人类抽象思维的产物，因此，数学具备文化特征. 从本质上看，数学对对象的抽象，与文学作品的虚构性十分相似，鲁迅笔下的阿Q、孔乙己，几何学中的点、线、面，在实际生活中未必客观实在，但都是现实世界的反映，同属于创造性的艺术，正如英国作家哈代所说："数学家的作品肯定和画家或诗人的一样美，数学概念一定和颜色或文字一样和谐."实际上，数学家写出传世文学佳作的也不乏其人. 数学的文化特征还表现在不同地域、不同民族的数学发展也能折射出各自的人文差异，例如古希腊注重理性思维的数学传统，而古代中国则注重于实用性的数学方法论的数学传统. 在西方，数学家怀尔德曾经这样描绘过各民族的数学特点："法国数学偏爱函数论，英国数学家对应用感兴趣，德国着重于数学基础，意大利对几何感兴趣，而美国的数学则以其抽象特征著称."另一方面，数学兴衰同样与社会政治环境和文化气氛紧密相关. 西方数学史上最为漫长的黑夜就发生在古希腊之后的中世纪，在长达 1 000 年的时间内，欧洲社会陷入愚昧和宗教狂热之中，数学被禁锢在神学范畴之内，几乎没有新的数学成果出现. 数学发展的新机遇则是在 16 世纪的文艺复兴时期，文艺复兴实质上是古希腊文化的复兴，也是古希腊数学的理性精神的复兴. 文艺复兴以及随后的资本主义产业革命中，力学、天文学、物理学、光学等领域提出的实际问题促成了 17 世纪牛顿、莱布尼茨对微积分的创立，标志着初等数学（常量数学）时代的结束，以及近代数学（即变量数学时代）的开始；到了 19 世纪，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基又创立了非欧几何学，从根本上改变了人们对数学性质的理解以及对它和物质世界关系的理解，把数学的研究从直观、经验的局限中解放出来，推动数学向更广泛、更抽象、更理想化的方向发展，开启了现代数学发展的起点.

因此，无论从源头上说，或是从数学的文化属性上说，数学是一种文化. 正如数学家赫尔希所认为的：数学既不存在于观念世界中，也不存在于人的大脑里，它既不具有物质性质，也不具有精神性质，而是具有社会性质，"如法律、宗教、货币一样，是文化的一部分，历史的一部分". 美国《科学》特约主编斯蒂恩更为明确地指出："数学……在人类特性和人类历史中，它的地位绝不亚于语言、艺术或宗教."因此，就学科分类而言，英国《大不列颠百科全书》把数学和逻辑、历史、人文科学和哲学放在一起，作为人类文化科学知识的几大类别，正是反映了数学学科的文化属性. 关于数学与现代文化的关系，数学家 M. 克莱因指出："数学一直是形成现代文化发展的主要力量，同时也是这种文化极其重要的因素"，"如果我们对数学的本质有一定了解，就会认识到数学在形成现代生活的思想中起重要作用这一断言并不是天方夜谭."我国数学家齐民友则认为："没有现代的数学就不会有现代的文化，没有现代数学的文化是注定要衰落的."显然，作为人文社科专业的学生，了解数学的文化属性，并学习必要的数学知识，是学习人类文化传统和历史的一个重要内容，对于加强专业基础、拓展专业视野是十分必要的.

### 二、数学与数学思维

把数学作为文史各专业必修课程的又一个重要因素，是数学教育对人的思维进行训练的重要性. 数学是对人的思维进行训练的体操，美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中写道，"数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号，等等. 它们是普遍适用并且强有力的

思考方式.运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力,它使人们能批判地阅读,能识别谬误,能探察偏见,能估计风险,能提出变通办法.数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用.”美国国家研究委员会由来自美国科学院、美国工程科学院、美国医学研究院的委员组成,具有很高的权威性,《报告》指出了数学思维的特点及数学能力在人才综合素质中占有的分量,同时强调了数学教育在人才培养中的特殊地位,值得认真思考.那么,数学思维应该包括哪些主要内容?了解这些内容和特点,将有助于我们在学习数学的过程中有意识地加强数学的思维训练,增强数学能力.

1.数学思维的严密性、逻辑性和公理化方法.

逻辑思维是数学思维的主体,逻辑性是数学思维最显著、最重要的特征.从某种程度上说,逻辑也是数学的生命.从数学发展的历史看,许多文明古国在早期数学的发展过程中,都各自有过辉煌的成就,我国古代流传下来的数学巨著《九章算术》记载的许多数学的发现都早于古希腊,即便如此,我们仍然把古希腊定为数学学科产生的源头,其中的一个重要因素是数学与古希腊卓越的逻辑学的结合,形成了严密的逻辑体系.就思维形态而言,数学与文学艺术均属于创造性的艺术,但不同的是数学属于科学的范畴.一种数学概念或理论,最初可能是个人的自由创造,但一旦这些概念或理论的正确性经过逻辑地证明确认,将具有超越个体的普遍性和一义性,与整个数学系统产生前后一贯的逻辑体系.由于整个数学系统是按照逻辑法则建构的,因而数学的发展不是用破坏和取消原有理论的方式进行的,而是用深化和推广原有理论的方式,用以前的发展作准备而提出的概括理论的方式进行的.正如数学家汉克尔所说:“在大多数科学里,一代人要推倒另一代人所修筑的东西,一个人所树立的另一个人要加以摧毁,只有数学,每一代人都能在旧建筑上增添一层楼.”这就是为什么数学能够成为科学的龙头,各种学科都必须在数学的驾驭下发展的根据.

具体地说,数学逻辑思维,就是要求思维过程必须遵循形式逻辑的基本规律,即同一律、矛盾律、排中律、充足理由律.其中同一律要求思维过程中概念的确定性;矛盾律不允许思维中出现矛盾,是形式逻辑的精华.由矛盾律生成的归谬法就是强有力的推理方法,毕达哥拉斯用归谬法很容易地证明了$\sqrt{2}$不是有理数,而罗巴切夫斯基运用归谬法建构了非欧几何学,这些都是归谬法应用的经典范例.排中律,即在同一时间、同一关系下,同一对象对某个性质或者具有或者不具有,不会出现第三种可能性;充足理由律,即只要条件充分,必然有准确的结论.

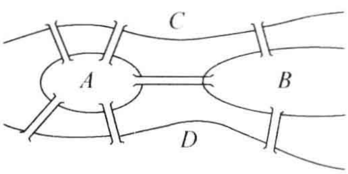
公理化方法,是逻辑思维发展的高级阶段,其特点就是选取尽可能少的一组原始概念和不加证明的一组公理,并以此为出发点,应用逻辑推演,将某个数学分支发展成一个演绎系统.欧几里得,通过收集整理前人的研究成果,巧妙设计构造了欧氏几何,就是这种方法应用的成功范例.数学的严密化正是通过各个分支的公理化来完成的.科学家爱因斯坦曾经指出:“一切科学的伟大目标,要从尽可能少的假说或者公理出发,通过逻辑演绎,概括尽可能多的经验事实.”公理化为实现这一目标提供了一个有效的途径,因此,公理化的方法也被看作是对理论进行整理和表述的最佳形式,目前已广泛地应用于包括人文社科在内的各个领域,其意义已远远超出数学范畴.数学家希尔伯特说:“的确,不管在哪个领域,对任何严正的研究精神来说,公理化方法都是并且始终是一个合适的不可缺少的助手;它在逻辑上是无懈可击的,同时是富有成果的;因此它保证了研究的完全自由.”“在一个理论的建立一旦成熟

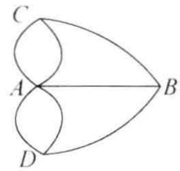
时，就开始服从于公理化方法，……通过突进到公理的更深层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力，并弄清我们的知识的统一性.”

大学数学教育是数学逻辑思维训练的主要途径，通过学习一个数学概念，推导或证明一个命题，求解一个习题，只要我们认真把握，都是增强自身逻辑思维能力的一个机会. 另外，做好数学学习的阶段性总结，及时将知识进行梳理、逻辑建构并形成一个前后一贯的知识系统，也是体验公理化方法、增强学习能力的一次有益尝试.

2. 数学思维的抽象性和符号化方法.

抽象性是数学的基本特征，不仅数学概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的. 因为要使数学更强有力，就必须在一个抽象概念中包含它所表示的实物的本质特征，例如，数学上的直线必须包括拉伸的绳子、直尺边、田地的边和光线的路径，于是，直线没有粗细、颜色、分子结构和绷紧度之分. 正如列宁所说：“一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然.”数学正是运用抽象思维去把握客观实在. 根据抽象层次不同，数学抽象可以进一步分为：弱抽象、强抽象、构象化抽象、公理化抽象四种形式. 数学的发展在很大程度上只能借助更高层次的抽象得以实现. 数学抽象思维的一个应用实例是“哥尼斯堡七桥问题”. 哥尼斯堡地形如图示：




$A,B$ 是河中的两个小岛，小岛与两岸之间有七桥相连，问题是能否不重复地一次走遍这七座桥？数学家欧拉在回答这个问题时，将两座小岛和两岸抽象为四个点，七座桥则变为这四点之间的连线，问题就转化为能否一笔将图形画出来的问题. 其前提是除了起点和终点外，其余各点必须有偶数条线相汇，因此答案是否定的. 数学抽象不仅解决了七桥问题，而且开创了一个新的数学分支——拓扑学研究的先河.

数学的另一特征是它的符号语言. 如同音乐利用符号来代表和传播声音一样，数学也用符号来表示数量关系和空间形式. 由于数学符号具有抽象性、精确性、规范性、通用性、开放性，因而它已经成为一种世界上通用的语言，而且随着社会的数学化程度的提高，数学语言已成为人类社会中交流和贮存信息的重要手段. 数学语言十分严密简洁，不仅有助于提高思维效率，有利于触发人的思维创造性，而且常常是深奥理论的源泉. 也正如莱布尼茨指出的：“数学之所以如此有成效，之所以发展极为迅速，就是因为数学有特制的符号语言.”从某种意义上说，一门学科数学符号化的程度，常常是这门学科是否成熟的标志. 一个人能否准确运用数学符号和进行符号化的思维，也常常是数学思维能力的一种体现，如今数学语言为社会科学语言注入了活力并逐步成为社会科学语言中的重要组成部分，渗透到现代社会的各个信息系统之中，在数学学习的过程中大学应该重视这种能力的培养.

3. 数学思维的模型化方法.

数学模型化方法是对某种事物或现象中数量关系和空间形式进行数学概括、描述和抽象的基本方法，是应用数学最本质的思维方法之一，也是数学科学联结其他非数学科学的中介和桥梁. 由于数学应用的广泛性，许多数学家都把数学看作是模式的科学. 数学家则像画

家和诗人一样,是模式制造家.数学家、哲学家怀特海认为:“模式具有重要性的看法与文明一样古老.每一艺术都奠基于模式的研究.”“社会组织的结合力也依赖于模式的保持;文明的进步也侥幸地依赖于这些行为模式的变更.”“数学对于理解模式和分析模式之间的关系,是最强有力的工具.”“数学的本质特征就是从模式化的个体做抽象的过程中对模式进行研究.”随着社会的进步和数学化程度的提高,数学模型化已经成为把握并预测自然界和人类社会变化与发展的一种趋势.在欧洲,人文科学和社会科学把模型化称为结构主义的运动,并论证了所有范围的人类行为与意识都以某种形式的数学结构为基础,在美国,社会科学自称有更坚实、定量的东西,也是用数学模型来表示的.数学模型化大致要经过建模、解模、应用三个阶段,分别属于归纳思维、演绎思维、发散思维三种不同的思维形式,大学数学将通过典型实例介绍数学建模的过程,同学们也可以在求解应用题的过程中得到相关的训练.

4.数学思维的美学思想.

数学是人类理性思维的产物,是创造性的艺术,这也就奠定了数学的美学基础.数学是美学四大中心建构(史诗、音乐、造型和数学)之一,事实上,数学与艺术之间有许多相通之处,比如,音乐被人称为感性的数学,而数学又被称为理性的音乐.数学美不是什么虚无飘渺、忽有忽无的东西,也不是某种纯粹主观、不可捉摸的东西,而是有确定的客观内容的,从历史角度看,对称美、统一美、简单美、奇异美可被看作数学美的主要内容.长期以来,数学为之努力的目标就是:将杂乱整理为有序、使经验升华为规律、寻求各种物质运动的简洁统一的数学表达等,这都是数学美的体现,是数学中一种公认的评价标准,体现了人类对美感的追求.数学美是人的审美观素质的一部分,对人精神世界的陶冶起到了潜移默化的影响.随着人类文明的发展和科学的进步,数学美学思想正在逐渐被人们认识,这也是今后的数学教育亟待加强的.

5.数学思维的创造性和创新精神.

数学是一门创新的艺术,这是因为数学研究对象并不一定具有明显的直观背景,而是各种量化模式,数学的本质在于自由,这种自由为人们的创造性才能的发挥提供了最为理想的场所.因此,创新精神始终渗透于、体现于整个数学活动之中.数学的创新除了现实社会发展的需要,还源于内在因素,追求数学美就是其中的一个深层动力.真理总是简单的.牛顿和莱布尼茨创立微积分,目的就是要把原散于各种特殊问题的求解方法统一为一种可用的普遍性的方法.在其他科学领域,爱因斯坦创立狭义相对论的动机之一就是希望把牛顿的经典力学与麦克斯韦尔的电动力学统一起来.物理学家狄拉克关于正电子的预言也源于他对对称性的追求.正如数学家冯·诺伊曼指出的:“归结到关键的论点,我认为数学家无论选择题材还是判断成功的标准主要都是美学的.”从思维角度考虑,数学创新过程特别要强调数学的直感、归纳类比、灵感思维和猜想的重要性,因为这是数学创造性思维的最有活力的精华部分.数学大厦常常是修好了楼层再打地基,微积分创立之初,虽在应用领域取得极大成功,但理论基础极不稳固,为完成其严密化,几十位数学家就花费了200多年时间.数学在创新中曾多次出现悖论,遭遇危机,而数学正是在不断对危机和悖论的处理过程中才成熟发展起来的.这其中充满了逻辑思维和非逻辑思维的辩证统一、发散思维和收敛思维的辩证统一.

除了以上列举的数学思维的内容外,还有其他一些内容,如辩证思维、对偶思想等,数学思维方法是解决问题的艺术.我国数学教育家高隆昌指出:一个具有“数学思维”修养的人常

常具有以下特点:①在讨论问题时习惯于强调定义(界定概念),强调问题存在的条件;②在观察问题时,习惯于抓其中的(函数)关系,在微观(局部)认识的基础上进一步作出多因素的全局性(全空间)考虑;③在认识问题时,习惯于将已有的数学概念(如对偶、相关、随机、泛函、非线性、周期性、混沌等概念)广义化,用于认识现实中的问题,比如他们会看出价格是商品的对偶,效益是公司的泛函,等等.

**三、数学与人文社会科学**

马克思曾经指出:"一门科学只有在成功地应用数学时,才算达到了真正完善的地步."马克思所说的科学"真正完善"的时代已经到来.其中最先成功应用数学的是自然科学,尤其是17世纪后,微积分创立不久,就成功地预测了哈雷彗星的再现,准确地说明了行星的运动和图像,在力学、工程学、天文学等领域显示出了强大的威力.以至于人们认为数学是自然科学的一个分支.相对而言,在相当长的一段时间里,人文社科的研究领域中难以见到数学的踪影,人类进入19世纪后,尤其是20世纪,情况发生了变化,数学开始进入几乎所有的学科领域,曾经被恩格斯认为数学"为零"的生物学科,分子生物学、基因理论、生态学、生物动力学等都离不开数学,生物数学已经成为应用数学各分支中最振奋人心的前沿之一.这种变化在人文社科领域同样显得突出,在许多曾经被认为很难用到数学的人文社科领域,数学的应用已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段.1971年美国学者卡尔.多伊奇等人在《科学》杂志上发表了一项研究报告,列举了1900—1965年在世界范围内社会科学方面的62项重大成就,1980年又补充77项,其中数学化的定量研究占相当大的比例.可以说,数学与人文社会科学的联系已不仅仅停留在文化范畴或思维方式方面,如同其他学科一样,人文学科发展到这样一个阶段,要成为名副其实的"现代科学",一个决定步骤就是使自己"数学化".数学已经直接成为人文社会科学研究中必不可少的工具.

在人文社会科学中,与数学结合最广泛、最紧密的是经济学.由于任何经济活动都离不开数字,因此也离不开数学.甚至有的专家认为,经济学要成科学,就必须是一门数学科学.思想家、政治家也同为伟大的经济学家的马克思在研究经济学的过程中,就十分重视数学知识的学习,1865年5月20日,马克思在给恩格斯的一封信中写到:"在工作之余,我就搞搞微分学."他不仅研究了牛顿、莱布尼茨,而且研究了微积分产生后一个多世纪内一批数学家的工作,并有许多精辟的见解.马克思在1882年11月22日给恩格斯的另一封信中就对微积分发展作出过深刻而准确的概括,说到:"这种方法始于牛顿和莱布尼茨的神秘方法,继之以达朗贝尔和欧拉的唯理论的方法,终于拉格朗日的严格代数方法……"马克思在数学方面的极高造诣,无疑对他在哲学、经济学上取得的巨大成就有着重大影响.数学与经济学的结合始于17世纪中叶,以英国古典政治经济学创始人配第的著作《政治算术》发表为标志.19世纪中叶,伴随近代数学的发展,数学与经济学的结合进入"蜜月"期,两个学科相互渗透,产生了许多重要的经济学理论、模型和边缘交叉学科,如数理经济学、计量经济学、经济控制论等.标志着经济学研究最高水平的诺贝尔经济学奖自1969年设立至今共30多届,获奖项目几乎全都与数学相关,而获奖人许多是以数学家身份从事研究的,如凯恩斯,也不乏数学大师,如冯·诺伊曼,其中的数学运用几乎到了极致.

数学与语言学的结合是数学成功应用的又一范例.法国数学家哈答玛曾说:"语言学是数学和人文科学之间的桥梁."利用数学方法可以开展对语言学中字频、词频、方言、写作风格等方面的研究 ,例如,利用统计方法可以鉴定莎士比亚新诗真伪,判断《红楼梦》后四十回

是否为曹雪芹的原作.计算机的出现进一步促进了数学与语言学的研究,数学渗透到了形态学、句法学、词汇学、语言学、文字学等各语言学分支,形成了许多交叉学科,如应用数理语言学、统计语言学、代数语言学等.数学、语言学和计算机的结合,实现了机器对文字和语音的自动翻译.

对于历史学科,有意识地系统地利用数学方法始于20世纪的上半叶至20世纪50年代,统称为计量史学.20世纪60年代以后计算机广泛应用,计量史学的研究领域从最初的人口史、经济史扩大到社会史、政治史、文化史、军事史等方面,应用计量方法的历史学家日益增多,有关计量史学的专业刊物、论文和专著不断涌现,20世纪70年代中期,计量史学已成为国际史学研究中最庞大的流派,发展是极为迅速的.计量化使历史学研究的对象从传统的以个人和事件为中心的政治史向以大众和过程为主体的总体史和综合史的转移成为可能.同时计量化将有助于进一步收集整理、挖掘利用过去不为人重视或不曾很好利用的历史资料,从而开辟研究的新领域.计量化将数学语言和方法引入史学研究,定量和定性方法的有机结合使历史学趋于严谨、精确,无疑将大大推动历史学的研究.

与经济学、语言学、历史学等学科相比,在政治学、社会学、法学等领域数学应用的发展相对比较缓慢,这些领域的成熟有待于数学的进一步高度发展,但也早有了许多有趣和有用的结果.例如,在政治学中,任何一个国家、一个社会团体或者一个股份制企业都会涉及选举权力机构或通过投票决策的问题.利用数学模型,可以使定量与定性相结合,研究比较不同的选举制度和具体的选举方法,以保证选举和投票结果合理公正.在政治社会学科,相关的社会选择、投票体制委员会决策、联盟行为和策略的相互作用等课题的研究,已经形成了数学的一个主要分支.在社会学、人口学领域,早在18世纪中叶,西方的“政治算术学派”就利用统计学研究人的出生与死亡问题,研究了婚姻的数量和居民的密度与富裕程度的依赖性,研究了影响生育能力的各种原因,分析了死亡与城市和农村生活条件、居民密度、流行病的依赖关系.现在社会统计学已经成为社会学研究必备的知识.在法学中,建立在数学基础上的指纹识别和基因测试等现代侦查手段已经成为侦案断案的强有力的工具.数学的逻辑推理、公理化方法和数理统计方法等也广泛地应用于法学研究,法学专业招收数学专业为背景的研究生已不再是新闻.

在其他学科,如哲学、逻辑学、心理学、艺术等领域,数学的应用更是不言而喻的.客观地讲,目前人文社科领域数学的应用是很初步的,一方面是由于人文社科领域包含价值意识等许多不确定的因素,问题远比其他学科复杂,在其他学科得到成功应用的数学工具不能简单地被套用.另一方面由于历史的原因,从事人文社科研究的人员缺乏必要的数学知识,而数学家也很少与人文社科研究人员沟通.很多数学家指出人文社科的基本特征乃至整个社会的基本特征与现代数学的基本特征十分相似,人文社科领域应该是数学,特别是现代数学或未来数学发展的很好的背景空间和应用领地.人文社科的学生应该面向未来,学习掌握必要的数学工具,推动本学科数学化的进程.

**四、数学与数学教育**

数学家兼哲学家怀特黑曾经在1939年预言:“在人类思想领域里具有压倒性的新情况,将是数学地理解问题占统治地位.”人类社会进入21世纪以来,科学技术日新月异,科学的数学化和社会的数学化都在加速,怀特海的预言正在变成现实.邓小平同志提出:“教育要面向未来,面向世界,面向现代化.”鉴于数学对人的综合素质的提高和发展的重要性,许多国

家都因此把加强数学教育作为增强综合国力、推行人才战略的一个重要内容，并逐渐形成共识. 美国国家研究委员会指出，“在技术发达的社会里，扫除数学盲已经代替昔日的扫除文盲的任务”. 我国也强化了数学教育在教育中的地位，大学文科学生不学数学已经成为历史，在一些文科专业，根据自身发展的需要对数学课程的要求难度还在不断提升.

需要指出的是，要将数学教育的功能充分发挥，还需解决许多认识问题. 如谈到数学教育，人们往往关注与专业的结合，即强调其工具功能，这是不容置疑的，但是不够全面. 由于历史的原因，与国外相比，我国人文科学与数学的结合滞后，许多专业教学与研究的内容和方法中数学的应用还是空白，因此有人认为数学无用，而轻视数学教学，显然是无视新时期世界上各学科的数学化趋势，也与邓小平同志关于教育的“三个面向”精神相悖. 还有的人谈到数学教育，就会联想到一连串抽象的定理和推导，或者是变幻莫测的数学技巧，因此有一种畏惧感，显然这是一种误解. 数学家指出：“数学学科并不是一系列的技巧，这些技巧只不过是它微不足道的方面，它们远不能代表数学，就如同调配颜色远不能当作绘画一样. 技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物.”上述种种想法的出现，一方面说明许多人对什么是数学、什么是数学教育缺乏全面的了解，另一方面也反映了长期以来，我们的数学应试教育的弊端，日本数学教育家在谈到数学教育时说，他的学生接受的数学知识由于不用，毕业后一两年就很快忘掉了，然而，不管从事什么业务工作，唯有深深地铭刻于头脑中，数学精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点（若培养了这个素质的话）才能随时随地发生作用，受益终身. 他强调最重要的是数学精神、思想、方法，而数学知识是第二位的，他的话很值得我们思考.

**作　者**

2013 年 12 月

# 目　录