

箭弹空气动力特性 分析与计算

国防工业出版社

V211
4

箭弹空气动力特性分析与计算

《箭弹空气动力特性分析与计算》编写组 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书共分两篇：第一篇为空气动力学基本方程式，可压缩流中常用的关系式、数据和图表。第二篇为箭弹空气动力特性分析与计算，给出了空气动力参量的计算公式和图表。

本书所提供的空气动力计算方法、图表以箭弹产品为主，可供箭弹产品总体设计时选择气动外形、估算气动力参考，亦可供从事箭弹产品研制的有关技术人员参考。

箭弹空气动力特性分析与计算

《箭弹空气动力特性分析与计算》编写组 编

*

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第074号

国防工业出版社印刷厂印装 内部发行

*

787×1092¹/₁₆ 印张20¹/₄ 571千字

1979年5月第一版 1979年5月第一次印刷 印数：0,001—1,500册

统一书号：N15034·1757 定价：2.10元

目 录

前言	1
基本符号	2
第一篇 空气动力学基本方程式; 可压缩流中常用的关系式; 数据和图表	7
第一章 空气动力学基本方程式	8
§ 1 基本概念	8
一、理想气体和粘性气体	8
二、可压缩气体与不可压缩气体	8
三、正压气体	8
四、等熵	8
五、无旋和位流	9
§ 2 热力学关系式	9
一、气体状态方程	9
二、热力学第一定律	9
三、热力学第二定律	10
§ 3 理想气体的伯努利公式	10
§ 4 气体动力学方程	10
一、连续方程	12
二、动量方程	13
三、粘性气体的能量方程	15
四、理想气体在忽略彻体力条件下的定常无旋流的速势方程	16
第二章 可压缩流中常用公式、数据和图表	18
§ 1 一维管流	18
一、基本方程式	18
二、一维管流基本公式	18
§ 2 绕凸角的二元定常超音速流 (普朗特-迈耶流)	21
§ 3 平面激波关系式	22
一、斜激波	22
二、正激波	23
§ 4 锥型流动	25
一、零攻角锥型流	25
二、小攻角锥型流	26
§ 5 特征线方程	28
一、在直角坐标下的平面无旋流动	28
二、在柱坐标下的轴对称有旋流动	29
三、在柱坐标下的小攻角流动	29
附图	30
第二篇 箭弹空气动力特性分析与计算	41
第一章 升力系数的计算	42
§ 1 单独弹翼的升力系数	42
一、二维翼型	42

二、大展弦比弹翼	48
三、中小展弦比弹翼	51
四、单独弹翼的粘性法向力系数	52
§ 2 单独弹体的升力系数	53
一、弹体头部线性法向力系数	53
二、尾部法向力系数	57
三、粘性法向力系数	58
§ 3 翼体组合体的升力系数	59
一、翼体干扰	59
二、翼体干扰系数	60
三、翼片之间的干扰系数	62
四、翼体组合体的升力系数	63
§ 4 弹翼-弹体-尾翼组合体的升力系数	65
一、气流的下洗	65
二、速度阻滞	68
三、弹翼-弹体-尾翼组合体的升力系数	69
附图	70
第二章 阻力系数的计算	114
§ 1 零升阻力系数的计算	114
一、单独弹翼的零升阻力系数	114
二、单独弹体的零升阻力系数	125
三、单独尾翼的零升阻力系数	130
四、弹翼-弹体-尾翼组合体的零升阻力系数	130
§ 2 诱导阻力系数的计算	132
一、单独弹翼的诱导阻力系数	132
二、单独弹体的诱导阻力系数	133
三、单独尾翼的诱导阻力系数	133
四、弹翼-弹体-尾翼组合体的诱导阻力系数	133
§ 3 弹翼-弹体-尾翼组合体阻力系数	135
附图	136
第三章 压力中心的计算	184
§ 1 单独弹翼的压力中心	184
一、平均气动弦	185
二、单独弹翼的压力中心	185
§ 2 单独弹体的压力中心	187
一、头部与圆柱段相组合的法向力的压力中心	187
二、尾部法向力的压力中心	188
三、粘性法向力的压力中心	188
§ 3 弹翼-弹体组合体的压力中心	189
一、有弹体干扰时外露翼的压力中心	189
二、由弹翼干扰在弹体上引起的升力的压力中心	191
三、翼-体组合体的压力中心	191
§ 4 考虑非线性升力时翼-体组合体的压力中心	192
一、单独弹体的压力中心	193
二、单独弹翼的压力中心	193
三、弹体存在时弹翼的压力中心	193
四、弹翼对弹体的干扰升力的压力中心	193
五、弹体旋涡对弹翼的干扰升力的压力中心	193

六、弹翼涡系的洗流作用在弹体上产生的升力的压力中心	194
§ 5 弹翼-弹体-尾翼组合体的压力中心	194
附图	195
第四章 力矩系数的计算	231
§ 1 俯仰力矩系数	231
一、 $\omega_z = 0$ 时的俯仰力矩系数	231
二、考虑非线性升力时翼体组合体的俯仰力矩系数	234
三、俯仰阻尼力矩系数	234
§ 2 滚转力矩系数	236
一、 $\omega_x = 0$ 时的滚转力矩系数	236
二、滚转阻尼力矩系数	239
§ 3 马格努斯力和力矩	240
一、单独弹体的马格努斯效应	241
二、弹翼的马格努斯效应	243
附图	245
第五章 应用与分析	251
§ 1 模型与计算条件	251
一、光弹体模型	251
二、小展弦比翼体组合体	251
三、大展弦比翼体组合体	251
§ 2 计算结果	252
一、阻力系数	252
二、法向力(或升力)系数	252
三、压力中心系数	252
附图	253
附录 I 标准大气	258
附录 II 坐标系	270
附录 III 弹翼几何参数	272
附录 IV 一维管流、平面激波和锥型流参数表	274
参考文献	315

前 言

随着箭弹技术的发展,空气动力研究任务日趋繁重。当前,在箭弹产品设计中,由于总体结构设计上的需要以及加工工艺上的要求,或者受发射装置的限制等等,常常出现大展弦比、钝前缘或钝后缘弹翼;同时,在多数情况下,为改善射击精度,提高战术技术性能,多数箭弹产品绕纵轴以低速或高速旋转;有些高速反坦克穿甲弹的飞行速度也较大,其马赫数大于4。另一方面,在常规兵器箭弹气动力研究中,还经常遇到许多带有特殊性的气动力问题,例如气动弹性、圆弧形弹翼气动力计算、喷流、杆形头部、燃气舵和马格努斯效应等,在产品设计中,这些问题都应予以重视并逐步加以解决。

有鉴于此,我们在国内外现有的一些空气动力文献的基础上,进行了理论研究,编写了这本《箭弹空气动力特性分析与计算》。本书所阐述的箭弹空气动力参量计算方法的应用范围是:马赫数在10以内,大气海拔高度在32公里以下。在弹体的空气动力特性分析中,主要参考了文献〔9〕~〔11〕的方法;而对于弹翼,主要参考文献〔12〕~〔14〕的方法。在编写过程中,我们采用理论与实验相结合的方法,力求使用方便可靠。

参加本书编写工作的有张维全、周南、詹德来、尚辉东、孔庆珍、代章和、岳本祥、汤鸿俊、张有余、蔡喜源、惠有魁等同志。罗时钧、赵世诚、冯亚南、金长江、苗瑞生、蒋范等同志进行了技术校核。本书中的大量计算是由徐梅芝、张村森、姚征、杨志远等同志完成的。在这里并向参加本书编校、计算的其它有关单位表示深忱谢意。但由于我们的水平有限,并且缺乏实践经验,书中缺点错误在所难免,恳请同志们批评指正。

基本符号

a	音速, [米/秒]
A	用方程式 (1-2-108) 确定的系数
b	弹翼弦长, [米]
b_r	外露弹翼根部弦长, [米]
b_i	外露弹翼翼梢弦长, [米]
b_{cp}	外露弹翼平均几何弦长, $b_{cp} = \frac{S_w}{l_w}$, [米]
B	用方程式 (1-2-109) 确定的系数
C	用方程式 (1-2-110) 确定的系数
C_1, C_2 C_3, C'_3 }	波兹曼常数
C_F	吸力系数
C_f	平板表面摩擦阻力系数
C_p	压强系数, $C_p = \frac{1}{q_\infty} (P - P_\infty) = \frac{2}{kM_\infty^2} \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right)$
c_p	定压比热, [米 ² /秒 ² ·度]
c_v	定容比热, [米 ² /秒 ² ·度]
C_x	阻力系数, $C_x = \frac{X}{q_\infty S_B}$
C_{x0}	零升阻力系数
C_{x1}	轴向力系数
C_{xi}	诱导阻力系数
C_y	升力系数, $C_y = \frac{Y}{q_\infty S_B}$
C_{y1}	法向力系数, $C_{y1} = \frac{Y_1}{q_\infty S_B}$
C_{y1}^a	法向力系数斜率, $C_{y1}^a = \left(\frac{\partial C_{y1}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$, [1/度]
C_{z1}	侧向力系数, $C_{z1} = \frac{Z_1}{q_\infty S_B}$
	马格努斯力系数, $C_{z1} = \frac{Z_1}{q_\infty S_B \left(\frac{\omega_z D}{2V_\infty} \right)}$
C_{z1}^a	侧向力系数斜率, $C_{z1}^a = \left(\frac{\partial C_{z1}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$, [1/度]

	马格努斯力系数导数, $C_{z_1}^a = \frac{Z_1}{q_\infty S_B \left(\frac{\omega_x D}{2V_\infty} \right)^\alpha} [1/\text{度}]$
C_r	弹体涡强度系数, $C_r = \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty R}$
D	弹体最大直径, [米]
	用方程式 (1-2-111) 确定的系数
D_b	弹体底部直径, [米]
e	单位质量气体内能, [米 ² /秒 ²]
f	长细比, $f = \frac{l}{D}$
	方程式 (1-2-112) 确定的系数
	作用于单位质量气体上的外力的大小
	翼型弯度
$\bar{f}$	翼型相对弯度
F	气动力合力, [公斤]
	一维管流横截面积, [米 ²]
F_B	弹体的侧表面面积 (不包括弹体底部面积), [米 ²]
g	重力加速度, [米/秒 ²]
H	大气海拔高度, [米]
i	单位质量气体的焓, [米 ² /秒 ²]
k	比热比, 对空气 $k = 1.40$
k_q	速度阻滞系数
l	长度, [米]
l_w	外露弹翼的翼展, [米]
l'_w	毛弹翼的翼展, [米]
m	$m = \text{ctg} \chi_0$
m_x	滚转力矩系数, $m_x = \frac{M_x}{q_\infty S_B l_B}$
m_y	偏航力矩系数, $m_y = \frac{M_y}{q_\infty S_B l_B}$
	马格努斯力矩系数, $m_y = \frac{M_y}{q_\infty S_B \left(\frac{\omega_x D}{2V_\infty} \right) D}$
m_y^a	偏航力矩系数导数, $m_y^a = \frac{\partial m_y}{\partial \alpha}, [1/\text{度}]$
	马格努斯力矩系数导数, $m_y^a = \frac{M_y}{q_\infty S_B \left(\frac{\omega_x D}{2V_\infty} \right) D \alpha}, [1/\text{度}]$

m_z	俯仰力矩系数, $m_z = \frac{M_z}{q_\infty S_B l_B}$
m_z^α	俯仰力矩系数导数, $m_z^\alpha = \frac{\partial m_z}{\partial \alpha}$, [1/度]
M	气动力合力矩, [公斤·米] 马赫数, $M = \frac{V}{a}$
M_x	滚转力矩, $M_x = m_x q_\infty S_B l_B$, [公斤·米]
M_y	偏航力矩, $M_y = m_y^\alpha q_\infty S_B l_B$, [公斤·米] 马格努斯力矩, $M_y = m_y^\alpha \left(\frac{\omega_z D}{2V_\infty} \right) q_\infty S_B D$, [公斤·米]
M_z	俯仰力矩, $M_z = m_z^\alpha q_\infty S_B l_B$, [公斤·米]
P	大气压强, [公斤/米 ²] 物面静压, [公斤/米 ²]
q_∞	来流动压, $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} k M_\infty^2 P_\infty$, [公斤/米 ²]
R	弹体半径, [米] 气体常数, 对于空气 $R = 287.053$ [米 ² /秒 ² ·°K]
Re	雷诺数, $Re = \frac{Vl}{\nu}$
Ret	有热交换时的转捩雷诺数
(Ret) ₀	无热交换时的转捩雷诺数
(r, θ , ω)	球坐标系
S	面积, [米 ²] 单位质量气体的熵, [米 ² /秒 ² ·°K]
T	绝对温度, [°K]
t	弹翼翼型最大厚度, [米]
t_b	弹翼翼型底部厚度, [米]
$\bar{t}$	弹翼翼型相对厚度, $\bar{t} = \frac{t}{b_{ep}}$
V	速度, [米/秒]
(0 - x, y, z)	速度坐标系
(0 - x ₁ , y ₁ , z ₁)	弹体坐标系
X	阻力, $X = C_x q_\infty S_B$, [公斤]
X_i	诱导阻力, $X_i = C_{xi} q_\infty S_B$, [公斤]
x_A	弹体头部顶点到外露弹翼平均气动弦前缘的距离, [米]
x_{br}	弹体头部顶点到外露弹翼根弦前缘的距离, [米]
x_d	弹体头部顶点到压力中心的距离, [米]
$\bar{x}_d$	压力中心系数, $\bar{x}_d = \frac{x_d}{l_B}$

x_T	弹体头部顶点到火箭弹重心的距离, [米]
$\bar{x}_T$	火箭弹重心的无量纲坐标, $\bar{x}_T = \frac{x_T}{l_B}$
Y	升力, $Y = C_y^\alpha q_\infty S_B$, [公斤]
Y_1	法向力, $Y_1 = C_{y1}^\alpha q_\infty S_B$, [公斤]
Z_1	侧向力, $Z_1 = C_{z1} q_\infty S_B$, [公斤]
	马格努斯力, $Z_1 = C_{z1}^\alpha \left(\frac{\omega_z D}{2V_\infty} \right) q_\infty S_B$, [公斤]
α	攻角, [度]
α_0	零升攻角, [度]
β	$\beta = \sqrt{ 1 - M_\infty^2 }$ 侧滑角, [度]
γ	比重, [公斤/米 ³]
Γ	弹体涡强度
δ	弹翼几何安装角 (翼弦平面与弹体纵轴的夹角), [度]
η	弹翼根梢比, $\eta = \frac{b_r}{b_t}$
η_t	弹体尾部收缩比, $\eta_t = \frac{D_b}{D}$
	弹翼翼型相对厚度对摩擦阻力系数的修正系数
ε	气流下洗角, [度]
λ	外露弹翼的展弦比, $\lambda = \frac{l_w^2}{S_w}$
λ'	毛弹翼的展弦比, $\lambda' = \frac{l_w'^2}{S_w}$
μ	粘性系数, [公斤·秒/米 ²] 马赫角, [度]或[弧度]
ν	运动粘性系数, [米 ² /秒] 普朗特-迈耶膨胀角, [度]
ρ	空气密度, [公斤·秒 ² /米 ⁴]
ϕ	绕角流动的膨胀角 速度势
χ_0	弹翼前缘后掠角, [度]
χ_1	弹翼后缘后掠角, [度]
$\chi_{0.5}$	弹翼中弦线后掠角, [度]
χ_t	弹翼最大厚度线后掠角, [度]
ω	角速度, [弧度/秒]
ω_{x1}	} 在弹体坐标系中, 相应于 ox_1 、 oy_1 、 oz_1 轴的角速度分量, [弧度/秒]
ω_{y1}	
ω_{z1}	

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\omega}_{x1} \\ \bar{\omega}_{y1} \\ \bar{\omega}_{z1} \end{array} \right\}$$

在弹体坐标系中, 相应于 ox_1 、 oy_1 、 oz_1 轴的无量纲角速度分量,

$$\bar{\omega}_{x1} = \frac{\omega_{x1} l_B}{2V_\infty}, \quad \bar{\omega}_{y1} = \frac{\omega_{y1} l_B}{2V_\infty}, \quad \bar{\omega}_{z1} = \frac{\omega_{z1} l_B}{V_\infty}$$

脚标

0 $\alpha = 0$ 情况
气流滞止条件
1 $\alpha = 0$ 时的气流参数

激波前参数

2 考虑攻角效应的气流参数

激波后参数

∞ 来流条件

b 底部

B 弹体

c 激波上的条件

圆柱段条件

n 头部

法线方向

s 物面上的条件

t 尾部

T 尾翼

τ 切线方向

j 喷气

W 弹翼

$B(W)$ 弹翼对弹体的干扰

$W(B)$ 弹体对弹翼的干扰

WB 翼-体组合体

$W(V)$ 弹体涡对弹翼的干扰

$B(V)$ 弹翼涡对弹体的干扰

min 最小值

max 最大值

$\times$ 临界条件

第一篇

空气动力学基本方程式; 可压缩流中常用的关系式; 数据和图表

第一章 空气动力学基本方程式

§1 基本概念

在空气动力学研究中, 为了方便, 我们忽略流体的某些次要属性而保留其重要属性, 这称之为流体的模型化。现在把气动力研究和计算中经常遇见的流体模型分述如下:

一、理想气体和粘性气体

在实际气体中, 由于空气分子处于不规则热运动而造成动量交换, 这样就存在着内摩擦, 这种内摩擦通常称之为粘性。这就是真实气体固有的物理属性, 通常用粘性系数 μ 来度量, 一般说, 它只取决于气体的种类和气体的温度, 与气体压强无关。

当雷诺数很大时, 在附面层以外的大部分区域中惯性力较粘性力大得多。在研究某些问题时(如升力问题), 可以忽略粘性, 而把气体视为无粘性气体, 即理想气体。而在研究另一些问题时(如阻力问题), 则气体的粘性不能忽略。

二、可压缩气体与不可压缩气体

气体的体积或密度可随压强、温度的变化而变化的这种性质称为可压缩性, 这种气体称为是可压缩气体。这时整个流场一般来说 ρ 是变化的, 即

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (1-1-1)$$

若在全流场中

$$\rho = \text{const} \quad (1-1-2)$$

我们称为不可压缩气体。

对于通常的流动问题, 当 $M \leq 0.3$ 时, 空气密度相对于速度变化是微小的, 可认为这种气体为不可压的。而当 $M > 0.3$ 以后, 空气密度在流动过程中将有着显著的变化, 因此必须考虑可压缩性。

三、正压气体

如果在运动或静止的气体中, 密度只是压强的函数, 这样的运动或平衡的过程称为正压过程:

$$\rho = \rho(P) \quad (1-1-3)$$

例如不可压缩流、等温过程、绝热可逆过程均为正压过程。

四、等熵

我们知道, 在一个孤立的系统内, 熵的增加就意味着在这个系统内产生不可逆的机械能转化为热能的过程, 而伴随这个过程的是机械能的损失。

如果在孤立系统中, 气体微团在运动过程中满足条件

$$dS = 0 \quad (1-1-4)$$

我们称这样的运动是等熵的。若流动是等熵的，必有

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{const} \quad (1-1-5)$$

五、无旋和位流

气流运动满足条件

$$\text{rot} \vec{V} = 0 \quad (1-1-6)$$

时，称为是无旋的。在无旋流的假设下，必存在一速度位函数 ϕ 满足

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \quad (1-1-7)$$

故又称为位流。

§2 热力学关系式 [15]

一、气体状态方程

气体的状态参数，例如压强 P 、密度 ρ 和温度 T 三者之间的关系可以用状态方程来描述，其一般式为

$$f(P, \rho, T) = 0 \quad (1-1-8)$$

对于完全气体来说，可以用克拉贝隆方程来表达

$$P = \rho RT \quad (1-1-9)$$

或者写成

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T} = 0 \quad (1-1-10)$$

二、热力学第一定律

热力学第一定律表示热能与机械功的相互转换关系为

$$dQ = de + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (1-1-11)$$

$$\therefore i = e + P/\rho \quad (1-1-12)$$

$$\therefore dQ = di - dP/\rho \quad (1-1-13)$$

式中 Q —— 热量。

定压比热和定容比热定义为

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \quad (1-1-14)$$

$$c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v \quad (1-1-15)$$

对完全气体有

$$c_p - c_v = R \quad (1-1-16)$$

比热比为

$$k = c_p / c_v \quad (1-1-17)$$

对空气来说, $k = 1.40$ 。

三、热力学第二定律

对于一个孤立系统来说, 熵的表达式为

$$dS = dQ/T = \frac{1}{T} \left[de + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \quad (1-1-18)$$

对完全气体有

$$S - S_0 = c_p \cdot \ln \frac{T}{T_0} - R \cdot \ln \frac{P}{P_0} \quad (1-1-19)$$

$$= c_v \cdot \ln \frac{T}{T_0} - R \cdot \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1-1-20)$$

$$= c_v \cdot \ln \frac{P}{P_0} - c_p \cdot \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1-1-21)$$

对等熵过程有

$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k} = \text{const} \quad (1-1-22)$$

§ 3 理想气体的伯努利公式

在忽略重力影响时, 对定常不可压缩流来说

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const} \quad (1-1-23)$$

可压缩气体定常等温运动

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{P_\infty}{\rho_\infty} \cdot \ln \frac{P}{P_\infty} = \frac{1}{2} v_\infty^2 \quad (1-1-24)$$

可压缩气体定常绝热流

$$\frac{1}{2} v^2 + i = i_0 = \text{const} \quad (1-1-25)$$

对完全气体情况下, 有下述形式:

$$\frac{1}{2} v^2 + c_p T = \frac{1}{2} v^2 + \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = \text{const} \quad (1-1-26)$$

对等熵流

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) \quad (1-1-27)$$

§ 4 气体动力学方程

气体动力学的基本方程主要有连续方程 (即质量方程)、动量方程、能量方程和状态方

程。它们是相应的基本物理定律在空气动力学中的具体应用。这些基本物理定律是质量守恒定律、动量定律以及能量守恒定律。下面分三种坐标系（参看图 1-1-1 和 1-1-2）：直角坐标系（0— x, y, z ），柱坐标系（ r, θ, x ）和球坐标系（ r, θ, ω ）加以说明。引入下列符号：

散度：

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{直角坐标}) (1-1-28)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{柱坐标}) (1-1-29)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} \quad (\text{球坐标}) (1-1-30)$$

旋度：

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} \quad (1-1-31)$$

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (\text{直角坐标}) (1-1-32)$$

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1-1-33)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 r \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ v_x & v_r & v_\theta r \end{vmatrix} \quad (\text{柱坐标}) (1-1-34)$$

$$\omega_x = \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \quad \omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial x}, \quad \omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \quad (1-1-35)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 r & \vec{i}_3 r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \omega} \\ V_r & V_\theta r & V_\omega r \sin \theta \end{vmatrix} \quad (\text{球坐标}) (1-1-36)$$

$$\omega_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\omega \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \omega} \quad (1-1-37)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \omega} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\omega) \quad (1-1-38)$$

$$\omega_\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (1-1-39)$$

式中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_r, \omega_\theta, \omega_\omega$ 为旋度 $\vec{\omega}$ 在相应坐标系中的分量。

全微商： $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{直角坐标}) (1-1-40)$