普通高等教育“十二五”规划教材

国家理科基地大学数学系列教材

概率论与数理统计

孟新焕　邰淑彩　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
国家理科基地大学数学系列教材

概率论与数理统计

孟新焕　邰淑彩　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书包括概率论和数理统计两部分，系统地介绍了概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等基本理论与基础知识. 为方便读者自学，各章配有适量的习题；概率论和数理统计两部分各配有一套综合练习题；书末附有习题答案.

本书可以作为高等学校非数学专业本科生、专科生的教材，也可以供大学教师及相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孟新焕，邰淑彩主编. 一北京：科学出版社，2014.1

普通高等教育"十二五"规划教材　国家理科基地大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-039222-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.①孟…　②邰…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第283357号

责任编辑：吉正霞　黄彩霞／责任校对：董艳辉

责任印制：高　嵘／封面设计：蓝　正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2014年1月第　一　版　印张：14 1/4

2014年1月第一次印刷　字数：278 000

定价：29.80元

前　言

概率论与数理统计是高等学校理工类和经管类各专业学生必修的一门重要的学科基础课程. 编者本着教育要面向世界、面向未来、面向现代化的宗旨，参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求(修订稿)》，从培养学生的创新意识、加强学生的数学素养、提高学生的科学计算及运用数学的能力等现代化教育理念出发，针对学生客观情况，编写了本书.

经过 30 余年教学实践、完善，在保持传统教材优点的基础上，我们对教材内容、体系进行了适当调整和优化，并参考了众多国内外的教材和资料. 教材力求结构严谨、层次清晰、题型丰富、内容精炼. 力求做到语言通俗易懂，论证简明扼要，重点放在基本概念的准备叙述、常用方法的详细讲解上. 删去了大量冗杂的理论证明，注重培养学生对随机现象的理解和概率统计的直觉. 本书利用具体实例来诠释抽象的概念及理论方法，力求既不罗列太多的证明过程，又不失理论、结构上的严谨.

本书分 8 章，第 1 章～第 5 章为概率论，内容包括概率论的基本概念，一维、二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征及大数定律和中心极限定理. 第 6 章～第 8 章为数理统计，介绍样本及抽样分布，参数估计和假设检验. 在每章后面都配备了适量的习题. 另外，对概率论部分及数理统计部分各精心编写了一套综合练习题；为了学生考研需要，书中选用了部分考研试题；书末附有习题答案.

本书第 1 章、第 4 章及附录由杨丽华编写，第 2 章、第 3 章及综合练习 1 由孟新焕编写，第 5 章由唐五龙编写，第 6 章由刘园园编写，第 7 章、第 8 章及综合练习 2 由部淑彩编写. 全书由孟新焕、部淑彩统稿；由刘金舜主审.

本书可以作为高等学校非数学专业本科生、专科生的教材，也可以供大学教师及相关工程技术人员参考.

在编写过程中，我们参阅了国内外相关教材，参考文献中未能全部列出，敬请作者谅解. 在此，对所涉及的参考文献的所有作者，对关心和支持本书出版的同仁和老师们表示衷心感谢!

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请专家、同行、读者批评指正.

编　者
2013 年 6 月

目　　录

第1章

概率论的基本概念

在人类的生产实践和科学试验中，人们观测到的现象大致可以归为两类. 一类是在一定的条件下，进行观察或试验时，其结果总是肯定的，或者说某种结果的出现是必然的. 这类现象称为确定性现象或必然现象. 例如，在地球上，上抛石子必落下；同性电荷必相斥等. 而另一类是在相同的条件下进行试验时，每次试验的结果未必相同，但在大量重复试验时，其结果呈现某种规律性. 这类现象称为随机现象. 例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，出现正面或反面向上；播种 1 000 粒种子，有多少粒发芽；某射击选手在一次射击中击中的环数等. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学分支. 由上述例子可知概率统计的理论与方法应用很广泛，渗透于各个领域、各个部门.

本章介绍概率论的基本概念：样本空间，随机事件及其运算，随机事件的概率，条件概率，事件的相互独立性及概率的运算法则，包括乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式等.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机试验与事件

研究随机现象都是通过一些试验（各种科学试验或对事物的观察）来进行的，如抛掷硬币、测水位等，这类试验有以下共性：

（1）在相同的条件下可以重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确所有的可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果出现.

对于具有以上共性的这类试验称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E.

定义 1.1.1 随机试验中每一个可能结果称为一个**样本点**，记为 e；**样本点的**全体所构成的集合称为**样本空间**，记为 S.

例 1.1.1 在下列随机试验中，确定其样本空间.

(1) E_1:将一枚硬币连抛掷两次，观察其正(H)、反面(T)出现的情况；

(2) E_2:从两件次品(a_1,a_2)和三件正品(b_1,b_2,b_3)中任取两件；

(3) E_3:抛掷两颗骰子，观察出现的点数；

(4) E_4:某时间间隔内某公交车站出现的等车人数；

(5) E_5:在一批灯泡中任取一只，测试其寿命.

解 $S_1=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$；

$S_2=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),\cdots,(b_2,b_3)\}$；

$S_3=\{2,3,4,\cdots,11,12\}$；

$S_4=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

一个随机试验 E 的所有可能结果是可以预知的，但我们感兴趣的往往是那些满足某种条件的样本点所组成的集合，如

E_2:"取到正品"$A=\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$；

E_3:"出现偶数点"$B=\{2,4,6,8,10,12\}$；

E_4:"等车人数不多于 20 人"$C=\{0,1,2,\cdots,20\}$

这些事件的发生或不发生在试验或观察之前并不知道，是通过试验的结果来确定的.

定义 1.1.2 随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为**随机事件**，简称**事件**；常用大写字母 A,B,C 等表示. 事件 A 发生，是指在试验中，当且仅当集合 A 中某一样本点出现.

特别地，由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.

在每次试验中必然发生的事件，称为**必然事件**，而样本空间 S 包含所有的样本点，在每次试验中，S 中的样本点总是发生，所以 S 为必然事件；

在每次试验中必然不发生的事件，称为**不可能事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中无论结果如何都不可能属于 $\varnothing$，所以 $\varnothing$ 为不可能事件.

例 1.1.2 在例 1.1.1 的 E_1 中，

事件 A_1:"第一次出现 H"，即 $A_1=\{(H,H),(H,T)\}$；

事件 A_2:"两次出现同一面"，即 $A_2=\{(H,H),(T,T)\}$；

事件 A_3:"只有一次出现正面"，即 $A_3=\{H,T),(T,H)\}$.

在 E_3 中，

事件 A_4:"出现小于 6 的点"，即 $A_4=\{2,3,4,5\}$.

在 E_5 中，

事件 A_5:"灯泡的寿命小于 1 000 h"，即 $A_5=\{t \mid 0\leqslant t<1\,000\}$.

1.1.2　事件的关系和运算

在实际问题中,在同样条件下发生的一些事件,往往不是孤立的,而是彼此相互联系的.例如,检验圆柱形产品,要求圆柱的长度与直径都合格时才算合格,这时就要考虑"产品合格""产品不合格""长度合格""长度不合格""直径合格""直径不合格""长度合格而直径不合格""长度不合格而直径合格"等事件,需找出这些事件之间的关系,为此介绍事件之间的关系与事件的运算.

设试验 E 的样本空间为 S;A、B、A_i $(i=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生导致事件 B 发生,称**事件 B 包含事件 A**,或称**事件 A 包含于事件 B**,记为 $A\subset B$.

如"直径不合格"为事件 A,"产品不合格"为事件 B,则 $A\subset B$.

若 $A\subset B$,$B\subset A$,称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

如"产品合格"$=$"直径与长度都合格".

2. 和事件

若事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件,称为 A 与 B 的**和事件**,记为 $A\cup B$.

如"产品不合格"$=$"直径不合格"$\cup$"长度不合格".

类似地,n 个事件 A_1,A_2,$\cdots$,A_n 的和事件记为 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$,即 A_i 中至少有一个事件发生则事件 A 发生;可列 n 个事件 A_1,A_2,$\cdots$,A_i,$\cdots$ 的和事件,记为 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记为 $A\cap B$,也记为 AB.

如"产品合格"$=$"直径合格"$\cap$"长度合格".

类似地,可以定义 $A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 及 $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$,即 A_i 全部同时发生则 A 发生.

4. 差事件

若事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$.

如"直径合格而长度不合格"$=$"直径合格"$-$"长度合格".

5. 互不相容事件

若 $AB=\varnothing$,称事件 A 与事件 B 是**互不相容**(或**互斥**)**事件**;即"事件 A 与事件 B 不能同时发生".

若对任意的 i,j,有 $A_iA_j=\varnothing\ (i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

6. 逆事件

若 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**(或**对立事件**),即事件 A、事件 B 中必有且仅有一个发生,记为 $A=\bar{B}$(或 $B=\bar{A}$).

如"出现三点"与"不出现三点"互逆,"产品合格"与"产品不合格"互逆.

例 1.1.3 如图 1.1.1 所示,电路中 $D=$"灯亮",$A,B,C=$"开关 A,B,C 闭合",则 A,B 同时闭合,导致灯亮,即 $AB\subset D$. A、C 同时闭合,导致灯亮,即 $AC\subset D$.

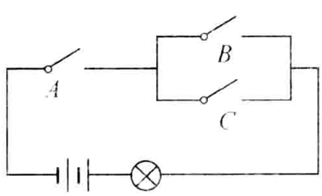

图 1.1.1

灯亮的充分必要条件是 A,B 闭合或 A,C 闭合,即

$$(AB)\cup(AC)=D$$

A 断开和灯亮不能同时发生,即 $\bar{A}D=\varnothing$,即事件 $\bar{A}$ 与事件 D 互不相容.

例 1.1.4 设 A_1,A_2,A_3 是三事件,试用它们表示下列事件:$B=$"恰有一个发生",$C=$"至多一个发生",$D=$"至少有两个发生".

解 $B=$"恰有一个发生"$=$"恰 A_1 发生"或"恰 A_2 发生"或"恰 A_3 发生";"恰 A_1 发生"$=$"A_1 发生且 A_2,A_3 都不发生"$=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$,故

$$B=(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$C=$"至多一个发生"$=$"三个都不发生"或"恰有一个发生"

即

$$C=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup B=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$D=$"至少有两个发生"$=$"恰有两个发生"或"恰有三个发生"

则

$$D=(A_1A_2\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_1A_2A_3)\cup(A_1\bar{A}_2A_3)\cup(A_1A_2A_3)$$

注意 $\overline{A_1A_2A_3}\neq\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

事件的运算性质如下:

性质 1.1.1 交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$

性质 1.1.2 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

性质 1.1.3 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

性质 1.1.4　德·摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，　$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

性质 1.1.5　$A - B = A \cap \overline{B} = A\overline{B}$，　$\overline{\overline{A}} = A$.

（证明留给读者自证）

1.2　频率与概率

1.2.1　频率

工人生产合格品是随机事件，但一个熟练工人生产的产品合格率比一个学徒工生产的产品合格率要高得多，由此一个熟练工人和学徒工生产的合格品，虽然都是随机事件，但这两类随机事件发生的可能性却大不相同. 这种可能性的不同可以用某数量来描述.

研究随机现象不仅要知道试验的结果可能出现哪些事件，还要知道各种事件出现的可能性的大小. 因此我们希望有一个描述事件发生的可能性大小的数量指标. 这个指标就是以后要讨论的事件的概率. 事件 A 的概率用 $P(A)$ 来表示.

对于一个随机事件来说，发生的可能性的大小的度量是由其自身决定的，并且是客观存在的. 为了判定事件发生的可能性的大小，一个可靠的方法是通过大量的重复试验. 为此，首先引入频率的概念，频率描述了事件发生的频繁程度.

定义 1.2.1　设随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，比值 $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

例 1.2.1　蒲丰与皮尔逊等科学家所做的抛掷硬币，观察其正面 H 出现的频率的试验，其结果如表 1.2.1 所示. 其中，n 为抛掷硬币的次数，n_H 为在 n 次试验中正面 H 出现的次数，$f_n(H) = \dfrac{n_H}{n}$ 为 n 次试验中出现正面 H 的频率.

表 1.2.1　抛掷硬币正面 H 出现的频率

	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.507 0
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

显然,当抛掷硬币的次数不多时,正面 H 出现的次数是带偶然性的,但从例 1.2.1 可以看出,随着试验次数的增多,正面 H 出现的频率总在$\frac{1}{2}$左右摆动而逐渐稳定于$\frac{1}{2}$,可见出现正面 H 的次数的规律可以由该试验的频率体现出来.

频率的性质如下:

性质 1.2.1 非负性 $f_n(A) \geqslant 0$.

证 因为 $0 \leqslant n_A \leqslant n$,所以 $0 \leqslant \frac{n_A}{n} \leqslant 1$,即 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$.

性质 1.2.2 规范性 $f_n(S) = 1$.

证 因为 S 是必然事件,所以 $n_A = n_S = n$,则 $f_n(S) = 1$.

性质 1.2.3 可加性:若随机事件 A,B 互不相容,即 $AB = \varnothing$,则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

证 因为 A,B 互不相容,则 $n_{A \cup B} = n_A + n_B$,所以

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

注 性质 1.2.3 可以推广到 m 个两两互不相容事件,即

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m)$$

人们在实践中发现,频率在一定程度上描述了事件 A 发生的可能性大小,但频率具有波动性,而随着试验次数 n 的增大,事件 A 的频率又具有一定的稳定性,且逐渐稳定于某个定常数.由此可见事件发生的可能性大小,是事件本身所固有的,是客观存在的一种属性,因此我们可以用频率 $f_n(A)$ 所稳定于的常数 $P(A)$ 来表示事件 A 发生的可能性的大小.

1.2.2 概率

定义 1.2.2 设 E 是随机试验,S 是样本空间,对于每一事件 A 赋予一实数 $P(A)$ 与之对应,称为事件 A 的**概率**,若 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) **非负性** 对于任意事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

(2) **规范性** 对于必然事件 S,$P(S) = 1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件 A_k $(k = 1, 2, \cdots)$,即对于 $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j)$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

由概率的定义,可以推导出概率的一些性质:

性质 1.2.4 $P(\varnothing) = 0$,即不可能事件的概率为 0.

证　令 $A_k=\varnothing(k=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$. 由概率的可加性得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

因为 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2.5　（**有限可加性**）设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k) \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)称为概率的有限可加性.

证　$A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为两两互不相容的事件，令 $A_k=\varnothing(k=n+1,n+2,\cdots)$，则 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 为两两互不相容的事件，由可列可加性

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

性质 1.2.6　　$P(A)=1-P(\bar{A})$

证　因为 $A\cup\bar{A}=S$，$A\bar{A}=\varnothing$，则

$$1=P(S)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

所以　$P(A)=1-P(\bar{A})$.

性质 1.2.7　若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且

$$P(A)\leqslant P(B)$$

证　因为 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，由概率的性质 1.2.5 可得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

再由概率的非负性知，$P(B-A)\geqslant 0$，故 $P(B)\geqslant P(A)$.

性质 1.2.8　（**加法公式**）对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证　设 $A\cup B=A\cup(B-A)$，$B=AB\cup(B-A)$，且

$$A(B-A)=\varnothing,\ AB(B-A)=\varnothing$$

由性质 1.2.5 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A),\quad P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

由此可得　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

加法公式的推广

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

由归纳法可得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例 1.2.2 设随机事件 A,B 互不相容，已知 $P(A)=p,P(B)=q$，试求 $P(A\cup B),P(\bar{A}\cup B),P(AB),P(\bar{A}B),P(\bar{A}\bar{B})$.

解 因为 A,B 互不相容，故有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q$；由于 $AB=\varnothing$，故 $B\subset\bar{A}$，所以

$$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})=1-P(A)=1-p$$
$$P(AB)=P(\varnothing)=0$$
$$P(\bar{A}B)=P(B)=q$$
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-p-q$$

1.3 等可能概型(古典概型)与几何概率

1.3.1 等可能概型

在讨论一般的随机现象之前，先来讨论一类最简单的随机现象，这就是下面所讨论的等可能概型.

定义 1.3.1 若随机试验具有下列两个特点：

(1) **有限性** 在随机试验 E 的样本空间中，样本点 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 只有有限个；

(2) **等可能性** 试验中每个样本点 e_i 出现的可能性相同，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$$

称这类随机试验为**等可能概型**. 因为这类随机现象是概率论发展初期的主要研究对象，所以也称之为古典型随机试验，简称**古典概型**.

显然，等可能概型是有限样本空间的一种特例. 现在讨论等可能概型中事件的概率.

由以上两条有
$$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$
$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$$

由于
$$1=P(S)=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})$$
$$=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\})$$

故
$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

若 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$ (A 包含 k 个基本事件)，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，则

$$P(A)=P(\bigcup_{j=1}^{k}e_{i_j})=P(e_{i_1})+P(e_{i_2})+\cdots+P(e_{i_k})$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

即
$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{S\text{ 中所包含的基本事件总数}} = \frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{S\text{ 中所包含的样本点总数}} \tag{1.3.1}$$

例 1.3.1　将一枚硬币抛掷三次，试求下列事件的概率：

(1) 恰出现一次正面；

(2) 至多出现一次正面；

(3) 至少出现一次正面.

解　样本空间

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$，　$n = 8$

(1) $A =$ "恰出现一次正面" $= \{HTT, TTH, THT\}$，$k = 3$，所以

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

(2) $B =$ "至多出现一次正面" $= \{HTT, TTH, THT, TTT\}$，$k = 4$，所以

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(3) $C =$ "至少出现一次正面" $= \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$，$k = 7$，所以

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

$P(C)$ 也可利用逆事件的概率来求，即 $\bar{C} =$ "正面一次都不出现" $= \{TTT\}$，所以

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

例 1.3.2　一口袋中有 4 只白球，2 只红球，依次取 2 只，考虑两种情况：

(a) 第一次取一球观察其颜色后放回袋中，第二次再取一球，这种情况称为**放回抽样**；

(b) 第一次取一球不放回袋中，第二次再取一球，这种情况称为**不放回抽样**.

试分别就(a)，(b) 两种情况求：

(1) 取到两只都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率；

(3) 至少取到一只白球的概率.

解　(a) 放回抽样(允许重复的排列)：　○○○○●●

设 $A =$ "取到两只白球"，$B =$ "取到两只都是红球"，$C =$ "至少取到一只白球".

(1) 由乘法原理，S 中样本点总数为 $n = 6 \times 6$ 个，事件 A 中包含的基本事件数